上越数学教育研究, 第 14 号, 上越教育大学数学教室, 1999 年, pp.29-38.

或る小学6年生の持つ分数の知識に介入している内面の存在と潜在化

高 橋 等

1. はじめに

高橋は数学的知識の比喩を扱った一連の研究（高橋, 1996a, 1996b, 1998; Takahashi, 1998）により，子どもが価値観やイメージ，情意などの内面を含む変形した数学的知識を獲得していることを明らかにしてきた。数学教育において内面には少なくとも二重の価値がある。一つは，内面が新たな数学的知識の獲得を促進させる可能性を持つが故の価値である。もう一つは，内面それ自体の形成が数学教育における独立的な目標となるが故の価値である。算数や数学に一層肯定的で積極的な内面を，かつ子どもが生きていく上で充分に威力となり，持つこと自体が幸福であるような内面を，形成することは数学教育において実現していかねばならない目標であり，特に今日では最重要課題である。

ところが，内面の形成を目標概念とするような数学教育学研究は，知る限りでは多くはない。高橋の一連の研究は数学的知識の獲得に関心を払いながらも，内面それ自体の形成を目標に置く研究である。

高橋の一連の研究の流れに位置するこの研究では，インタビューの最中における児童の数学的知識の変容の実際を，分数の知識に介入している内面に焦点を当て，明らかにすることを目的とする。

この研究を以下の順に述べていく。第一に，高橋による一連の研究の幾つかと，他の関連する研究を取り上げ，紹介し，数学教育学におけるこの研究の位置を述べる。第二に，数学的知識の獲得における比喩の成立過程を述べ，この研究の理論的背景を提示する。最後に，児童の数学的知識の変容が起こっているデータの分析結果と考察とを述べる。

2. 関連する研究とこの研究の位置

高橋は Polanyi（1958）および Polanyi & Prosch（1975）に理論的足場を置き，児童・生徒が数学的知識を比喩により獲得している様を明らかにした。例えば，高橋（1996b）では，或る中学一年生が正の数，負の数の知識を木と土の中に喩えて獲得していること，正の数，負の数の乗法が成り立つ理由を数の比喩的な表し方である数直線を用いて説明し，指導された式を用いる説明を受け入れ難いなどの知見を得た。Takahashi（1998）では，或る中学二年生が比喩により獲得した幾つかの教材の数学的知識の何れにも好意と実感とを持ち，これらの獲得を能動的に行っていること，他者の介入のある立方体の体積の求め方に好意と実感，信頼を持つこと，正の数，負の数の乗法の説明を数直線を用いてアニミズム的に行うことなどの知見を得た。

高橋（1996b）による知見は，比喩による数学的知識の獲得が対象の全体の包括的な獲得である括握によるものであることを，Takahashi（1998）による知見は，比喩による数学的知識の獲得を促す幾つかの要因があり，これらの要因が生徒の数学的知識の中に介入

していることを主に明らかにしたものである。

最近，注目されて来ている数学教育学研究における比喩の研究のうちの幾つか（Lakoff & Núñez, 1997; Presmeg, 1997）は Lakoff G. の認知論を比喩論の基礎理論とする。Lakoff & Núñez（1997）は，数学的言語，記号の意味の考察により，数学それ自体が比喩的に構成されていることを示し，数学の本性が人間にとって内在的であるとする mind-based mathematics なる数学観を基礎とした理論を打ち立てている。Lakoff & Núñez（1997）によれば数学は人間の生活経験からの生産物である。

Lakoff, G. の理論を基礎理論の一つとする Presmeg（1997）は，数学的言語，記号に含まれる曖昧さに着目する。Presmeg（1997）によれば，隠喩による数学的構成は本義と喩義との間の類似性を見出す活動であるものの，本義と喩義との間の非類似的なものが類似的な構造と分離されずにあり，曖昧さが数学的言語，記号に含まれていく。

数学的知識に含まれる曖昧さが数学の本性の一つであることは，科学哲学の立場から Polanyi（1958）が指摘したことである。Polanyi（1958）は，数学をそれならしむる価値として，客観的確実性（certainty (accuracy)），体系的関連性（systematic relevance (profundity)），および内在的興味（intrinsic interest）をあげる。数学においては客観的確実性（certainty (accuracy)）とは証明の確実性であり，体系的関連性（systematic relevance (profundity)）とは或る数学的事実が体系に組み込まれていることである。内在的興味（intrinsic interest）とは個人が数学に関して持つ固有の興味である。Polanyi（1958）によれば客観的確実性（certainty (accuracy)）と体系的関連性（systematic relevance (profundity)）とは数学そのものの価値であり，内在的興味（intrinsic interest）とは数学そのものとは別の，個人の持つ内面の価値であるものの，内在的興味（intrinsic interest）が含まれない数学はあり得ない。

Polanyi（1958）は数学そのものについて考察しているのであり，学校で扱われる教材化された数学の考察は行っていない。しかし，教材化された数学では客観的確実性（certainty (accuracy)）や体系的関連性（systematic relevance (profundity)）がより緩やかであることは間違いない。Polanyi（1958）の言う内在的興味（intrinsic interest）が入り込む余地を教材化された数学はより広く持つ。

さて，Lakoff & Núñez（1997）が明らかにした数学的言語，記号に含まれる意味は一般の視点からの考察によるものであり，個人を対象としない。Presmeg（1997）は数学的知識に含まれる曖昧さが個人が持つ意味であることを指摘しつつも，個人の持つ意味の曖昧さの様態や働きを分析する方向には論を展開していない。一方，高橋（1996b）および Takahashi（1998）では，個人を対象として中学生の数学的知識に含まれる曖昧さの様態や働きを捉えたが，しかし，曖昧さが生徒の数学的知識の中でどのように変容していくかまでは扱っていない。

3. 比喩による数学的知識の獲得の理論的背景

3 では比喩による数学的知識の獲得の理論的背景を，数学的知識の獲得における比喩の成立過程，および根拠の働きと内面の性格に着目し，述べる。

3.1 比喩による数学的知識の獲得の成立過程

Polanyi & Prosch（1975）は比喩の成立過程を詩を読む場合を例として図（図1，2）を用いながら説明する。図1，2の t は本義（tenor），v（vehicle）は喩義である。Fは注意を向ける対象に向かう意識である焦点的意識（focal awareness）で，Sは注意は向けないが焦点的意識に溶けこみ，しかも焦点的意識に影響を及ぼしつつ支え，知識の暗黙性，Polanyi（1966）の語を用いれば tacit dimension であるが，をもたらす意識である従属的意識（subsidiary awareness）である。

は内面の巻き込みがあることを，$+ii$ は内在的興味を伴うことを示す。

$$\begin{array}{ccc} t & & v \\ +ii & & +ii \\ \mathrm{S} & & \mathrm{F} \end{array}$$

図１ 比喩の成立過程Ａ

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Ourselves} & & (t & & v) \\ +ii & & +ii & & +ii \\ \mathrm{S} & & & \mathrm{F} & \end{array}$$

図２ 比喩の成立過程Ｂ

詩の本義に相当する一節を読み，次に喩義に相当する一節を読むときに，図１では従属的意識に含まれる本義が内面を巻き込みながら焦点的意識の向かう喩義の読みに影響を及ぼすことを示す。続いて図２に示すように本義が焦点的意識へと浮上し，焦点的意識の中で本義と喩義とが対比される。このとき，Polanyi & Prosch（1975）が我々自身（ourselves）なる語により言い表す個人の内面が本義と喩義とに巻き込まれる。この巻き込みがあるからこそ，感動が得られ，獲得した知識に当人にとっての現実味が生じる。内在的興味は図１，２の場合とも焦点的意識と従属的意識との両方にある。

数学的知識の獲得の場合に Polanyi & Prosch（1975）の言う比喩が成立するかどうかは，本義，喩義および根拠に相当する三者の関係があるかどうか，内面の巻き込みがあるかどうかに係わる。高橋（1996b）および Takahashi（1996）において数学的知識に含まれる内面を見出したことは数学的知識の獲得の場合に比喩が成立している証拠である。

ところで，上記の比喩論をそのままに適用するとすれば，本義に相当するのは論理的で形式的な数学的知識であるか，論理的で形式的な数学的知識を翻案した知識で，喩義には本義に比較し，本義とは異なる相対的には数学的ではない知識が対応することになる。

しかしながら，数学的知識の獲得において，本義であるか，喩義であるかの区別は，獲得後の結果により観察者から判断されるのであって，数学的知識を獲得しようとする者にとって，対象に対し，本義ないし喩義という名辞を与えようとする意識は，当然のことながら，ない。数学的知識を獲得しようとする場合にあって焦点的意識の向かう対象が本義であるか喩義であるかは，個人の持つ数学的知識の有り様，内面と言ってもよいが，に依存するのである。

Polanyi & Prosch（1975）の比喩論をそのままに適用し本義，喩義という名辞を与えることが適当な場合もあろうし，図１と図２とに示した本義 t と喩義 v とを入れ換えた図を用いて説明できるような場合もあろう。この研究では，数学的知識の獲得において，本義ないし喩義と呼ぶに適当な場合を除いては，これらの語に換えて，喩えられる対象，喩える対象という語を用いる。

3.2 根拠の働きと内面の性格

データの分析では，内面の巻き込みと，巻き込まれた内面の性格，変容に焦点を当てるが，ここで，根拠の働きについて述べておく。根拠の働きとは，高橋（1996b）が Polanyi（1958）の理論から展開し，論じたように，Piaget & Szeminska（1962），Piaget & Inhelder（1975）の語で言えばシェマの働きである。Polanyi（1958）がシェマの働きを設定し知識の獲得の有り様を端的に述べている箇所を引用しよう。

In the same chapter I enlarged upon this further by suggesting that in all our thought – weather tacit or articulate – we, rely jointly on two faculties, namely (1) on the power of our conceptual framework, based on reality, to assimilate new experiences and (2) on our capacity to adapt this framework in the very act of applying it, so that it may increase its hold on reality. (Polanyi, 1958, p.317)

この Polanyi（1958）の言及は，知識の獲得が暗黙的であれ，分画的であれ Piaget & Szeminska（1962），Piaget & Inhelder（1975）の言う同化と調節に相当するシェマの活動，Polanyi（1958）は シェマを概念枠組み（conceptual framework）と呼ぶが，に依拠することを示すものである。

しかし，高橋（1996b）が指摘するように，Polanyi（1958）と Piaget & Szeminska（1962），Piaget & Inhelder（1975）とでは概念枠組み（conceptual framework）ないしシェマの捉えが異なる。Polanyi（1958）が概念枠組み（conceptual framework）に入り込んでいる暗黙性（tacit dimension）を知識の本性と捉えることは Polanyi がゲシュタルト心理学や現象学を重視するなど，Piaget & Szeminska（1962），Piaget & Inhelder（1975）とは理論において異なる出発点を持つからである。この暗黙性（tacit dimension）は知識の獲得において従属的意識に相当するのであり，数学的知識に介入する内面である。

概念枠組み（conceptual framework）に入り込んでいる内面は，当然のことながら一人びとりによって異なる。それ故，この内面が個人にとっての数学的知識に関する個性であり，概念枠組み（conceptual framework）に内面が入り込んでいる以上，概念枠組み（conceptual framework）自体が個性である。

しかし，個性そのものと言える内面が共有不可能なのではない。Polanyi（1958）の知識観に立脚すると言うと，知識があたかも共有不可能であるかのごとく捉えられ，素朴な誤解が起こることもあろう。ところが，Polanyi & Prosch (1975) が論ずるように，比喩の成立において巻き込まれていく ourselves は，彼らが ourselves なる語を用いていることからも伺えるのだが，文化的に共有されている価値観や感情であり得る。実際，詩を読んで全くに同一ということはないとしても同じような感動を得ることができる。個人の持つ数学的知識においても介入している内面には共有可能性があるのである。

この共有可能性があるからこそ，算数・数学に関し或る集団で共通の傾向をもって形成される価値観や意味，イメージ，情意などが生まれる。湊（1991）が示唆するように内包的意味における一位数の困難度の類似な傾向が我国の広い年齢層に渡りあることは，内面に共有可能性があることの証左であろう。

4. 児童の数学的知識の変容の実際

3.2 の後半ではこの研究における分析の視点からはやや逸脱して論を進めたけれども，4 では児童の数学的知識の変容が起こっているデータを提示し，分析と考察とを行う。

4.1 調査ついて

調査参加者は新潟県内の国立大学附属小学校に通う六年生（女子）一名であった。

調査方法はインタビュー法で，技法としてカウンセリング法を用いた。

データを二期に渡り収集した。第一期は 1998 年８月，第二期は 1999 年２月で，第一期と第二期との間には約六ヶ月の期間があった。第一期，第二期ともインタビューの回数は一回であった。

第一期のインタビューに臨み，調査参加者となる児童との相互信頼を形成するために 1998 年６月中旬から７月上旬にかけて，上記附属小学校において算数授業の参与観察を行った。第二期のインタビューに臨んでは，1999 年１月下旬から２月中旬にかけて参与観察を行った。

ここで分析するデータは或る児童（朝田さんと呼ぶ）が分数１／３について気付くこと

を述べていく場面である。次の 4.2 および 4.3 では第一期のインタビューで得たデータを，4.4 では第二期のインタビューで得たデータを提示し，分析する。

なお，聞き手はこの研究の研究者（I と記す）である。

4.2 分数１／３の知識に介入している内面の様態

次は朝田さんに小数 0.3 について思い付くことは何かと尋ね，朝田さんがこの質問に一通り答えた後に，朝田さんに分数１／３について思い付くことを尋ねたときの展開である。朝田さんは図（図３上下）を描きつつ考えを述べる。データの括弧の中に朝田さんのペンと紙とによる活動を記す。

95 I　　これくらいか。だとすると今度は１／３というとどういうことが考え付く。

96 朝田　１／３。（図３上，左の１／３を書く）１／３をこうしてみると，先ず，（図３上，丸を３つ書く）何かボールみたいなのが３つあったとして，あの，もしも，こん中で，３があって，それの１個なんだから，これは１／３だから，（図３上，３つの丸のうちの左の丸の上に印をつけその上に矢印と丸を書く）この１個だけを取るってことは，１／３があるから，（図３上，３つの丸の下方に矢印と１／３とを書く）これはボールと見れば，ちゃんとした１／３だと思うから，１／３はもしもボールで表したりすると，やっぱり１個減って，ボールも１個減るから，３の中の１個って感じだから，だからこれは，（図３上，３つの丸を線で囲む）３個の中で，これを１個取り出しちゃって，そうすれば，これは３個の中の１個だから，だから，（図３上，３つの丸の下方の矢印と１／３とを指す）これは，１／３ってわかる。

97 I　　１／３ってわかる。ほおう。んん。他に１／３について気付くことある。

98 朝田　んん，（図３下，左の１／３を書く）先生から教えてもらった１／３は，（図３下，左の１／３の分母３を線で囲む）もしもこれが３だとして，（図３下，丸を３つ書く）これが，３個が，これが丸が３個あったとして，（図３下，左の１／３の分子１を線で囲む）１は，あの，この３個から１個，（図３下，右の丸の上に矢印を書く）あの３個の中から１個取り出した１個だから，（図３下，３つの丸の下方に＝１／３と書く）これは，１／３だって教えられました。

99 I　　教えてもらった。今の，最初に説明したのと同じ説明。

100 朝田　て言うより，（図３上，指す）これは，あの３個で，これが１個取れば１／３だから，（図３下，指す）これは，教えられた方です。

上

下

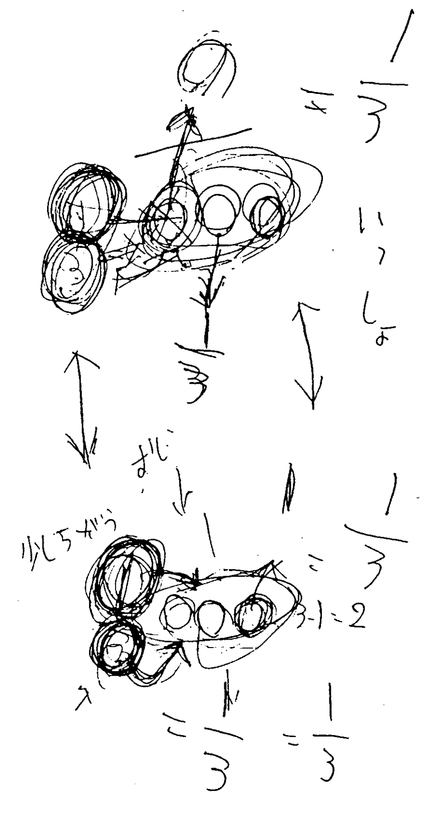

図３ 分数１／３の説明のために朝田さんが書いた図（１）

101 I　　その違いをもう一回言ってもらえる。

102 朝田　んん，これの違いって言えば，何て言えばいいのかな。似たようなもんだから。これは，

あのこれが（図３上，３つの丸を指す）３つで，これは，３個あるし，で，（図３上，左の１／３の分子１を指す）これの１が全部，（図３下，左の１／３を指す）あのこの１が取り出されて，１／３だから，（図３下，左の１／３を指す）こっちは分母の方が３だから，先生から教えられたときは，それに分子が１なんだから，３引く１なんですけど，で３から１引いちゃえば，もし，２になっちゃうけど，これは，３個の中の１個っていうことだから，（図３下，指す）こっちは，ちょっと違う１／３なんだと思う。

103 I　ちょっと違う１／３だと思う。

104 朝田（図３上下の間に矢印を書く）これとは大体似たようなものだけど，（図３下，指す）こっちだけちょっと違うような気がする。

朝田さんは分数１／３の意味を96と98との双方で，３個の丸い絵を用い説明する。数学的言語，記号で表した１／３が喩えられる対象であり，３個のボールあるいは丸を用いた説明が喩える対象である。朝田さんは１／３と３個のボールあるいは丸の両方に焦点的意識を向けているからこそ，言葉によりこれらの喩えられる対象と喩える対象とを説明し得るし，これらの絵を描ける。ここでは図２に示した比喩が成立している。

朝田さんの１／３の意味の説明は96と98とでは同様に見えながらも異なる。96では朝田さんは１／３の意味を「１／３はもしもボールで表したりすると，やっぱり１個減って，ボールも１個減るから」と１個減るという意味を介入させながらも，「３個の中の１個」という意味により捉える。一方で，98では朝田さんは「３個の中から１個取り出した１個だから」という意味に，「先生から教えてもらった」という文脈を介入させる。101で聞き手が96での説明と98での説明との違いを尋ねたところ，朝田さんは102で，98での説明にさらに「３引く１なんですけど，で３から１引いちゃえば，もし，２になっちゃうけど，これは，３個の中の１個っていうことだから」という説明を加え，３引く１という減法による意味を介入させる。

朝田さんによる先生から教えてもらったという文脈を伴う意味付け（98，102）は１／３の知識に介入している内面である。他方，減法による意味付け（96，102）はどうであろうか。朝田さんは96で「減る」という意味付けにより図３上の分数１／３を説明し，102では「３から引１いちゃえば」という減法により図３下の分数１／３の知識を説明する。これらの減法による説明は，朝田さんが自分の持つ信頼できる数学的知識を使っての説明であり，内面が強く関与したものである。図４に朝田さんの持つ二種類の分数１／３の知識と内面との対応を示す

	数学的説明	内面あるいは内面が強く関与
図３上	３つがあってそれの１個（96） ３個の中の１個（102）	１／３はもしもボールで表したりすると，やっぱり１個減ってボールも１個減る（96）
図３下	３個の中から１個取り出した１個（98） ３個の中の１個（102）	先生から教えてもらって（98，102） ３引くと１何ですけど，３から１引いちゃえば２になっちゃうけど（102）

図4 朝田さんの持つ二種類の分数１／３の知識と内面との対応

4.3 分数１／３の知識に介入している内面の潜在化

続いて，朝田さんに96で述べる１／３の意味と98で述べる１／３の意味との違いをさらに説明するよう求めていく。

105 I　　ちょっとのところがよくわからないな。うまく説明できる。

106 朝田 ううう，んんん，んんん，できません。ごめんなさい。できないいい。できませんでした。

107 I　　どこが違うんだろう。

108 朝田 んん，どこが違うって言われてもな。自分で説明しても，自分で分からないんじゃ，こりゃ，困っちゃうな。似たもの同士なんだと思う。

109 I　　似たもの同士だと思う。

110 朝田 うん，実際，両方一緒なんだと思う。一緒のような気がする。

111 I　　一緒。

112 朝田 だと思う。

113 I　　んん，何で一緒なの。

114 朝田 んんと，これは，（図３上，左の　１／３の分母３を線で囲む）これが３つあって，で，（図３上，左の１／３の分子１を指す）これの１個だから，（図３上，３つの丸の上の丸を指す）これは１個取り出された図になってるから，やっぱり，これは３個から１個取り出して，で，（図３上，３つの丸とその上の丸との間に線を書く）これにすると，（図３上，右の＝１／３を書く）１，２，３の１で１／３になるから，（図３下，左の１／３を指す）これも分母が３だから，（図３下，３つの丸を指す）これも３個あるし，（図３下，左の１／３の分子１を指す）これも１から１個取り出しちゃったんだから，で，ここにあるんだから，（図３下，３つの丸の右に＝１／３と書く）これも１／３だからやっぱ同じなんだと思う。

106で，朝田さんは 96 で述べた１／３の意味と98で述べた１／３の意味の違いを説明することができない。107での聞き手の再度の質問に，108では「似たもの同士なんだと思う」と答え，96と98との１／３の意味の違いを認めつつも，違いよりも同じところに着目した言い回しとなる。朝田さんは110では96と98とでの１／３の意味が「一緒」であると言い，114では「３個から１個取り出す」という96と98とでの説明で共通であった１／３の意味を一緒である理由として述べる。

105から114までの聞き手との係わり合いの過程で，朝田さんが96で述べた１／３の説明と98で述べた１／３の説明とを同じと見なしていく契機となっているのは，106で96と98とで説明している１／３の意味の違いを適切に説明することができないこと，108で「自分で説明しても，自分で分からないんじゃ，こりゃ，困っちゃうな」と述べるようにその違いを説明することができない自己を対象化して見たことである。

4.4 期間を置いた後の分数１／３の知識

第二期のインタビューにおいて，朝田さんに第一期のインタビューと同様に，分数１／３について思い付くことを尋ねたところ，次の展開となる。

A1　I　　ええと，１／３について何か気付くことがあったら言ってください。

A2　朝田 １／３について何か気付くことがあるって言うなら，（図５，１／３と書く）前，説明した通り何ですけど，やっぱあ，（図５，書いた１／３の右に丸を並べて３個描き，右端の丸を斜線で塗り，右端の丸の左上に？と書く）私の考える中では，３個か，何かが，何かの物体が，（図５，右端の丸の上に３と書く）３個あって，それの中，（図５，丸の絵の右に３この中の１つと書く）３個の中の，の中の１つってことで，（図５，書いた１／３の分母３を丸で囲み，描いた３つの丸のうちの左の方の２つに下線を引く）これは３個の中の（図５，書いた１／３の分子１を丸で囲み，この１から３つの丸の右端に向かって矢印を書く）１つっていう意味だから，だから私は１／３って言ったら，（図５，描いた３つの丸の下に，１／３＝３この中の１つ，と書く）３個の中の１つぐらいしか思い浮かばない方です。

A3　I　　え，３個の中の１つって。

A4 朝田（図5，右端の丸の下から矢印を描き）3個の中の1つって言う，説明すると難しいなあ，1／3で思い付くと言うと，んん，やっぱ，説明できません。

A5 I 他にはない。

A6 朝田 んん，考えてみたけどあんまり思い浮かばないし。、

A7 I あまり思い浮かばない。

A8 朝田 はい。

A9 I 1個だけか。

A10 朝田 はい。1個だけっす。

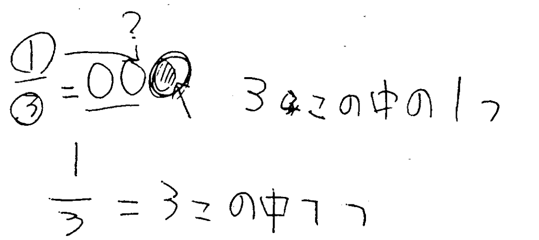

図5 分数1／3の説明のために朝田さんが書いた図（2）

第二期のインタビューでは，朝田さんの分数1／3の知識は，A2 に見られるように「3個の中の1つ」という意味づけにより，成立している。A3，A5 で聞き手が分数1／3について思い付くことを繰り返し尋ねたにも拘わらず，朝田さんによるこの意味づけは変わらず，しかも，唯一つの意味づけであった。

第二期のインタビューから得られた朝田さんの分数1／3の知識は，第一期のインタビューにおける内面が潜在化した後の分数1／3の知識と同様に見える。この分数1／3の知識は，教材という視点から，分数の知識を論理的，数学的に捉えた意味としては，朝田さんが3つの丸をどのように捉えているかが問題点となるものの，等分割したものから幾つかをとるといういわゆる操作分数ないしは分割分数の範疇に入る。

さて，Nik Pa（1989）が，子どもが分数の知識を構成するという立場に立ち，インタビュー法により三年生，四年生，五年生の分数1／2，1／3，1／4の知識に対応するシェマを分析し，分類しているので，Nik Pa (1989)の知見と対比させ，朝田さんの持つ分数1／3の知識を支えるシェマの同定を試みることにする。

Nik Pa（1989）によれば，子どもの持つ分数1／3，1／4のシェマには，仕切のある範囲を分けること（splitting split regions），範囲を等分割すること（partitioning regions into equal-sized parts），集まりを分けること（fragmenting collections），一対多あるいは多対多の比較（one-to-many or many-to-many comparison），数字のパタンを用いて合成単位を分けること（partitioning composite units using numerical patterns），の五つがある。これらのうち，仕切のある範囲を分けること（splitting split regions），および範囲を等分割すること（partitioning regions into equal-sized parts）では，範囲を部分に分けるときに部分の同一性に子どもの意識が向かうのに対し，この2つ以外では，子どもにとって部分の同一性は当然のことであり，この同一性に意識は向かない。第二期のインタビューで見られた朝田さんの分数1／3の説明では3つの丸の同一性を朝田さんは意識していないことから，朝田さんの分数1／3の知識のシェマが，この2つ以外の何れかである可能性がある。

朝田さんの分数1／3の知識のシェマに相当するのは，集まりを分けること（fragmenting collections）である。集まりを分けること（fragmenting collections）というシェマとは，分数a／bの意味を，分母bに相当する対象を，分子aに相当する対象とb－aに相当する対象とに分けることであるとするシェマである。朝田さんが，描いた3つの丸の右端の丸を斜線で塗り，3つの丸を2つの丸と1つの丸に分けることは，分母3に相当する対象を分子1に相当する対象と3－1に相当する対象とに分けることである。朝田さんが一回目のインタビュー102で減法により分数

1／3の知識を説明しようとしたのもこのシェマを持っていたからと考え得る。

4.5 考察

4.4 で述べたように,「3個の中の1個」という朝田さんの分数1／3の知識は,内面の介入がないとすれば,数としての抽象性,形式性は高くはないとはいえ,数学的には操作分数ないしは分割分数に相当する。一方,子どもが構成するという立場からの Nik Pa (1989) の知見に対応させると,朝田さんの分数1／3の知識は,集まりを分けること (fragmenting collections) というシェマに対応する。他方で,潜在化する以前の朝田さんの分数1／3の知識に介入している内面により,朝田さんは,集まりを分けること (fragmenting collections) というシェマと呼び得る二種類のシェマを持つことになる。朝田さんが異なると見なしていた以上,これら二種類のシェマが全く同一であるとは言い難い。

朝田さんが,集まりを分けること (fragmenting collections) というシェマに相当する二種類のシェマを持つことは分数1／3の知識に介入している内面の存在を示すものである。この存在は前半で論じてきた理論的背景である Polanyi (1958) の知識論,および Lakoff & Núñez (1997) や Presmeg (1997) Núñez (1997) や Presmeg (1997) が指摘するような数学的言語,記号に含まれる曖昧さの存在に応ずる知見である。

朝田さんの内面が介入した二種類の分数1／3の知識はインタビューの最中に統合され,統合された知識は6ヶ月後のインタビューにおいても変わらずにあった。インタビューの最中にこの統合を促したのは,聞き手との係わり合いにおいて生じた,二種類の分数1／3の知識の違いを適切に説明することができないことからの葛藤と,説明することができない自己を対象化して見たことである。この知見は葛藤や自己の対象化が算数・数学学習を促進するという従来の知見を補強するものである。

さて,インタビューの過程で見えなくなった,朝田さんの持っていた内面はどうなったか。Polanyi (1958) の知識観に,あるいは Lakoff & Núñez (1997) や Presmeg (1997) が指摘するような数学的言語,記号に曖昧さが必然的に含まれるという立場に立てば,朝田さんの持つ1／3の知識に関する内面は1／3の知識から切り離されたのではなく,むしろ朝田さんの数学的知識の中で潜在化し,潜在化しつつも分数1／3の知識の支えとなっていることになる。

朝田さんの持つ分数1／3の知識に係わる内面が潜在化しつつも存在していることは,湊らによる一位数に関する内包的意味の研究(湊,八柳,斎藤,1977; 湊,斎藤,八柳,1979; 湊,1991)からの知見から考えても間違いのないことであろう。特に,湊,八柳,斎藤 (1977) では,大学2,3年生116名を対象とし,SD法および一対比較法を採用し,一位数における数の内包的意味の存在を明らかにしたのである。この研究で扱った分数よりも単純な一位数における内包的意味を大学生が持つことから考えると,分数1／3の知識の中には潜在化しつつも内面が存在しているに違いない。

ところで,分数1／3の知識に介入する内面の存在は一時的に見えただけのもので,無視してよいとの意見があるかも知れない。しかしながら,内面は或る時点でこの数学的知識を支えていたのである。内面の存在がなければ分数の知識の獲得が適切になされていかないのかも知れない。

数に関する知識が未発達であり,それ故に内面の介入があったと解釈することも可能である。この解釈をしたとしても,聞き手との係わり合いを通して,分数に関する知識を発達させるまでの間,内面が分数の知識の支えとなっていたことになる。

5. 結語

この研究では，インタビューの最中における児童の持つ数学的知識の変容の実際を，分数１／３の知識に介入している内面に焦点を当て，分析した。その結果，分数１／３の知識に介入している内面の違いによって，数学的には同様の意味付けをしている１／３の知識を異なると捉えていること，聞き手との係わり合いの過程で，それらの内面を数学的知識の中で潜在化させ，異なると捉えていた１／３の知識を同じであると見なしていくことが明らかになった。

児童の持つ分数の知識に介入している内面は通常は見過ごされそうな微妙なものである。しかし，この内面の介入があるからこそ児童の数学的知識が成立し得る。数学的知識への内面の介入に関心を払い，適切な内面の形成を目指すことが指導において必要なこととなろう。

付記：この研究は上越教育大学平成10年度教育改善推進費の助成を受けて行った研究である。

この研究に際して援助を下さった方々に感謝申し上げます。調査に参加して戴いた児童の皆さんと教師の方々，調査を引き受けてくださった学校の教師の方々に感謝申し上げ下ます。上越教育大学付属小学校田村学教諭からは研究を進めていく上で様様な示唆を戴きました。また，参与観察とインタビューの補助をして下さった，藤田尚徳氏，濱田和彦氏，新堀栄氏に感謝申し上げます。

文献

Nik Pa, N. A. (1989). Research on children's conceptions of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11, 3, 3-25.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for mind-based mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pp. 21-89), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

湊三郎，八柳久夫，斎藤孝雄．(1977)．数1, 2, …, 9 の，内包的意味における困難度の尺度構成について．数学教育学論究, 32, 1-17.

湊三郎，斎藤孝雄，八柳久夫．(1979)．乗法九九の相対的困難度と内包的意味における数の困難度との関係．数学教育学論究，34・35，1-18.

湊三郎．(1991)．１位数に関する内包的意味における数の困難度の形成過程．日本数学教育学会誌，73，6，2-17.

Piaget, J. & Szeminska, A. 遠山啓，銀林浩，滝沢武久訳．(1962)．数の発達心理学．東京：国土社.

Piaget, J. & Inhelder, B. 久米博，岸田秀訳．(1975)．心像の発達心理学．東京：国土社

Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago: The University Chicago press.

Polanyi, M. (1966). *The tacit dimension*. Gloucester: Peter Smith Pub.

Polanyi, M. & Prosch, H. (1975). *Meaning*.Chicago: University Chicago press.

Presmeg, N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pp.267 -279), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

高橋等．(1996a)．数学的知識に関する中学生の持つ比喩の様相．筑波数学教育研究，15，35-44.

高橋等．(1996b)．数学的知識の比喩に関する研究－数学的知識の比喩とは何か－．教育学研究集録，20，91-99.

高橋等．(1998)．児童の算数の見方と学習活動との関連．上越数学教育研究，13，33-42.

Takahashi, H. (1998). Some characters of metaphorical knowledge of several materials: A case of a junior high school student. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, *17*, 241-248.

田仲誠祐．(1994)．中学生のもつ数学的概念の内包的意味について．第27回数学教育論文発表会論文集，119-124.