

中学校数学における文字式の認識過程モデルの構築：

記号論的なアプローチから

服部 泰伸

上越教育大学大学院修士課程 1 年

中学校数学における単元「数と式」における文字式は，他の数学の領域に対して道具的性質を伴う。そのため単元「数と式」は領域「図形」や「関数」などの学習に大きな影響を及ぼす。生徒は文字式に対して苦手意識をもってしまえば，数学を学習することに難しさが生じるだろう。さらに，文字式については様々な研究が行われてきた。例えば，藤井（1992）は数学を言語として捉え，児童や生徒の文字式における文字の理解とミスコンセプションを解明しようとした。また，鈴木（2007）は文字式の指導における「式を読む」ことの重要性をまとめた。

文字式は数学的記号の一部であって，文字式を使わないと考えることが困難な問題がたくさんある。例えば，関数や証明などは文字式を用いることによって問題解決への視野が広がる。文字式があることによって，数学を効率的または多義的に考えることができる。文字式は表現の一つであり，文字式の言語性や形式性は数学の抽象性を反映させている。

文字式は他者に自分の数学的思考を表現することや問題解決の際に，効果的な道具である。しかし，その文字の意味内容は個人によって異なる場合がある。その意味内容の差異はどのように生じて，数から文字へ認識の移行にどのような影響を及ぼして

いるのだろうか。文字式における文字の困難性として，数を文字に表現を置き換える難しさや数から文字に至る際に突然現れる抽象性と形式性がある。文字式においてなんらかの具体的な数が存在し，生徒はそれらを簡潔にまとめようと思いをめぐらせて文字に置き換える。例えば 2, 4, 6, 8, … という偶数の集合があり，その偶数の集合を文字に表そうとする思考過程を経て $2x$ や $2n$ といったように表す。また，数は実際に存在している対象そのものではない。例えば，みかん 1 個とりんご 1 個で共通しているものは「1」という概念である。しかし，同じ「1」でもみかんとりんごの大きさや質などの特徴は違う。物理的対象が異なっても数としては同じものである。文字式における文字においても数の代表として表現されるため，文字として表現された途端に数としての抽象性や形式性が飛躍的に増す。文字式の困難性を捉えるために，認識において数から文字へと移行する過程を考察する必要がある。

本研究の目的は，文字式における文字の認識過程を理論的に整理し，その結果から文字式の記号論的な認識過程モデルを構築することである。そのために想定プロトコルで問題意識の焦点化を行い，数に関しての記号論の先行研究と Saussure の理論を関連させて考察を行う。

1 問題意識の焦点化

ここで、自身の問題意識を具体的に表すために以下のような想定プロトコルを提示する。

課題

一辺の個数が a 個の基石を並べてできた正方形がある。次の図を参考に、いろいろな考え方で基石の総数を求めなさい。

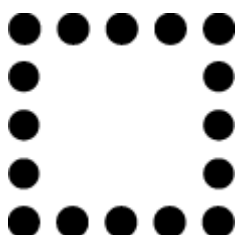


図1 問題意識の焦点化における課題

この場面は、一つの課題に対して二人の生徒がグループワークを行う。プロトコルはその課題の問題解決を行っている一部である。なお、プロトコルにおける S は生徒を表す。生徒を区別する場合は、 S の後に数字をつける。

$S1$: こういう感じに区切ってみよう。

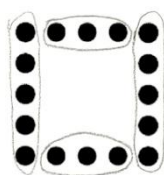


図2 $S1$ における解答

$S2$: そうすると、 $(5-2) \times 2 + 5 \times 2$ となって、一個の個数が a 個だから $(a-2) \times 2 + a \times 2$ となるね。

$S1$: よし。これで完璧。

$S2$: でも、こういう考え方もあるよ？

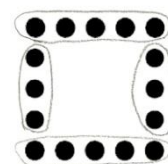


図3 $S2$ における解答

$S1$: なるほど、くるっと回転させたんだね。

$S1$: これは $5 \times 2 + (5-2) \times 2$ となって、 $a \times 2 + (a-2) \times 2$ ということになるのか。

$S2$: さっきのと一緒にの考え方でいいのかな？

$S1$: でも(縦の個数の合計) $\times 2 +$ (横の個数の合計) $\times 2$ って考えるから違うんじゃない？

$S2$: それだところち(縦の個数)の a とところち(横の個数)の a って違うもの？

$S1$: えっと…

この場面で、 $S1$ が $(a-2) \times 2 + a \times 2$ と表したことに對して $S2$ は $5 \times 2 + (5-2) \times 2$ といった考え方があることに気がついている。しかし、両者が同じ考え方でいいのかわからなくなっている。

数から文字への置き換えはできているが、意味理解の視点から見ると、 $S2$ の「でも(縦の個数の合計) $\times 2 +$ (横の個数の合計) $\times 2$ って考えるから違うんじゃない？」という発言から文字の意味を理解していない。ただ単に 5 を a に変えただけであることが分かる。また、 $S2$ の「それだところち(縦の個数)の a とところち(横の個数)の a って違うもの？」という発言から文字の意味は同じであるにもかかわらず、別の物として考えなければならないという状況をつくっている。これは文字を「数を入れる箱のようなもの」としてしか考えておらず、その文字の意味まで考えることができていないこと

がわかる。このように生徒は文字を用いることができるが、意味の認識まで至っていない。

2. 文字と文字式

2.1 文字と文字式の定義

文字式はその文字式に含まれる文字によって様々な意味を捉えることができる。ここでは、文字式と文字の違いについて明らかにする。

杜威(1991)は、文字は文字式の世界に入ってから数の代わりに使うために新しく導入されたものであり、文字式は数と文字を計算記号や関係記号やまた()で正しく結び付けることによって、数量や数量関係を表すものであると述べている。例えば、「一本 120 円のジュースを a 本買いました。代金はいくらか」という問題では、数の代わりに用いている a が文字であり、代金 $120a$ が文字式である。ここから、文字は数などの仲介者のような役割をもっていて、文字式はその文字の意味を表現したものである。

杜威(1991)は文字式の構文法を考えることについて次のように述べている：

数の世界で使われてきた数の式に関する構文法を、そのまま文字式に適用するものと、文字式の世界に入ってから新しく規定されたものの 2 つの側面からみる必要がある。(p.42)

さらに杜威(1991)は文字式にそのまま適用するものは小学校で学習した $7+8$ や $5-2$ などのような規定であり、文字式の世界に入ってから新しく規定されるものは以下の六つのような規定であると主張した。

①計算記号 \times を省略するか、または \cdot で代用すること。

②計算記号 \div の代わりに分数の横線を使うこと。

③数と文字、数と括弧を掛けるとき、数を前に書くこと。

④文字の係数の絶対値は 1 である場合、その 1 を省略すること。

⑤一般的に、文字をアルファベット順に書くこと。

⑥文字の指数を文字の右上に書き、指数が 1 である場合、その指数を省略すること。(p.45)

これら六つの規定より、数と文字の間には因果関係があり、数の知識が文字式の知識に拡張していくことを認識していく。生徒はこの六つの規定のような数学の「仕組み」が理解できず、混乱してしまう。この記号的な複雑さの中に文字の重要な意味が入り混じっていて、さらに文字式の困難性を引き起こす原因となる。

2.2 文字の意味

文字式における文字の意味は定数、未知数、変数の三つがある。杜威(1991)によると、定数というものは「ある決まった数値」、未知数というものは「決まっているが、まだその値が分からない数値」、変数というものは「ある範囲の中で、変わっていく値」として使用される。

杜威(1991)は定数、未知数や変数の間の相互関係が文字式の学習にかなりの影響を与えていると次のように述べている：

未知数としての文字は、その値が決められているという観点からみれば、それが定数としての文字とみることもできる。例えば、方程式 $2x-3=5$ の場合では、その方程式を解く前に、文字 x の値は未知ではあるが、しかし、その値が他ならぬ、方程式 $2x-3=5$ に満たす数 4 でなければ

ばならない。この意味において、この方程式にある文字 x を未知の定数と呼ぶということである。

定数と変数の間にも、相互関係が考えられる。例えば、長方形の面積を求める公式 $S=ab$ において、面積 S が一定であるとき、縦の長さが変われば、一定の面積を保ちながら、横の長さも変わっていく。このようにして、ある条件を備える場合では、定数を表す文字は変数ともみられる。(p.52-53)

このようにある条件において、生徒は文字式における文字を定数、一般数もしくは変数として捉えてしまうために混乱を招いてしまう。文字を多義的に扱うことができれば、数学の他の領域において柔軟に思考を巡らすことができる。文字一つ一つの意味を認識して文字の多義性を区別し、その多義性を柔軟に考える思考が重要である。このように文字式における文字の意味が多数存在するという困難性が一方ではある。

3. 数学教育学における記号論的認識論の先行研究

3. 1 Ernest (2006) の研究から

Ernest (2006) は、数学の教授と学習の間の本質を数学教育の記号論的視点の立場から探るために、論理的根拠が求められることを述べている。数学は sign (記号) の基礎を踏まえた活動であり、数学に sign (記号) の科学を適用することは有効である。数学の教授と学習の間の論理的根拠の正当化は多数の利用する sign (記号) の文脈にわたって、ある人の sign (記号) の形成、読むことや解釈のすべての側面を含む sign (記号) の研究として記号論の役割に基づいているため、多数存在する。記号論的視点の焦点は聞くこと、書くこと、話すことなどの sign (記号) を活用する数学でのコ

ミュニケーション上にある。コミュニケーション活動を通して sign (記号) を具現化していく。 sign (記号) の創作、発言や表現は代理人のような活動であり、事物を正確に伝えるためには話すもしくは書くことで文章を選び、構成しなければならない。このような意味では、 sign (記号) や使用される sign (記号) は個人の創造性や創作のパターンによって内面化や展開され、社会的規則、意味または文脈に関係する。

記号論的なシステムの用語で以下のような三つの必要な構成要素がある。

- 1) sign (記号) の集合 (S)
- 2) 規則の集合 (R)
- 3) 意味構造の集合 (M)

sign (記号) の集合 (S) は言い表されたり、話されたり、書かれたりなど記号化された sign (記号) の明示された本性から考慮されている対象や過程の言語要素である。規則の集合 (R) は sign (記号) を創作するために、原子的 (単一) や分子的 (合成物) の sign (記号) を作ったり、言い表す。つまり、 sign (記号) の意味を形成するための要素である。この規則の集合の中には暗黙的な規則も存在する。意味構造の集合 (M) は基本的な意味構造を具体化させた sign (記号) とこれらの意味の関係であり、具現化された sign (記号) と sign (記号) の意味の関係を示すための集合である。意味構造の集合の関係は表現や内容の観点から見ると、個人的な構成に基づく。

これら三つの構成要素は数学的構造の解釈を促進するためにあり、社会的機能などの役割のような簡略化はできない。また、数学的理論は数学的実践において明らかにされているが、記号論的なシステムを完全に明示的にすることができない。記号論的なシステムは正式な理論であり、明確な sign (記号) を作り出す規則をすべて与えるのは難しいために、理論的に示すことが

できる可能性はある。記号論的なシステムの理論は抽象的な理論でもあり、存在している社会的使用から取り除くほど、理論が簡易化される。しかし、簡易化が成し遂げたり、できなかつたりした場合でも、基本的な意味構造は示すことができない。あらゆる言語と同じように、簡略化できない暗黙の知識要素が存在する (Ernest, 2006)。sign (記号) を作り出す規則はほとんどが暗黙であって、生徒が社会的実践から記号論的なシステムの妥当性や使用を見ることによって学習される。記号論的なシステムは教室の実践での授業展開や新しい対象を作り出したり、表現したりする過程の中で大抵存在する。

3. 2 Godino ら (2010) の研究から

文字式の困難性を考える上で、数についての知識が必要である。数は生活やコミュニケーションを行う中で重要な道具であり、初等教育の段階から学んでいる。しかし、私たちがいつも使っている数字はただの「記号」にすぎない。数字だけでは意味をもつことができなく、第三者によって意味を与えなければならない。1, 2, 3, … などのような数字もまたその数字の記号の内容にある考え方をどのように定義するかによって意味が変わっていく。例えば、数字の 4 が何を意味しているのか伝えたいならば、4 本のチョーク、4 本の指、4 人、4 脚の椅子などのように 4 の集合の例を表現する。ある対象が存在し、その順序数を表現することにより数、数字もしくは数詞となる。Godino ら (2010) はある対象の記数法について、特別の言語の資源、手続き、特性、概念、正当化を使用することにより数字として表現できると述べている。これら五つを使用することにより対象物や集合の濃度を説明することができる。

数字のような「記号」に対して意味を結

び付けるために用語に定義を関連させることが必要である。つまり、表現と内容の間に相互関連があって、その相互関連の中で内容が先に存在する。また、Godino ら (2010) は記号論的なシステムについての概念を導入している。

彼らは、記号論的なシステムについて次のように述べている：

相対的配置について構成要素である対象を関連付ける記号論の機能のネットワークを含む同じ間で確立される説明過程に加えて、実践のシステムにおける介入して新しく生まれ出る対象の構成によって形成されたシステムである。(p.255)

実践のシステムは数学的実践において記号を使用する人々、または数学的実践における文化や社会のような環境によって決定するため、記号論的なシステムもまた記号を使用する人々や制度によって決まる。したがって私たちが記号と意味を結び付けるとき、相互に作用するコミュニケーションにおいて文化的、社会的な影響が関与してくる。数字に意味付ける構成要素の中には、概念的、命題的および論争的な対象の言語要素が含まれている。

また、私たちは記号に意味を結び付けるために用いる暗黙の規則が存在する。その規則は言語対象、概念、手続き、定理といった記号論的な機能である。この四つの暗黙の規則は第 3.1 節で述べた記号論的なシステムの三つの要素である sign (記号) の集合 (S)、規則の集合 (R)、意味構造の集合 (M) に従って説明されたものである。Godino (2010) は言語対象、概念、手続き、定理の四つを分析することが存在論的な記号論的複雑さに関しての困難を理解することができると述べている。

文字式における文字は数の場合と同様に

して文字の意味を定義することができると思われる。すなわち、文字式における文字は数の概念を拡張することによって存在し、意味を成すことがわかる。

4. 「signifiant」と「signifie」

生徒の文字式に対する記号論的な認識過程の解釈を得るために、Saussure の理論である「signifiant」と「signifie」のアプローチを用いる（以下「signifiant」を能記、「signifie」を所記と呼ぶ）。能記とは表現のことを意味し、所記とは能記によって表されたり、意味される概念や意味内容のことである。つまり記号表現が能記で、記号内容が所記である。例えば、能記は空という言葉の「空」という文字や「そら」という音声のことを言い、もう一方で所記はこの能記によって意味や表現された「空」というイメージや概念のことを指す。この例から分かるように「能記」と「所記」はお互い切り離せない関係である。Saussure は能記と所記からなる記号の二面をそれぞれ聴覚映像と概念と呼んだ。そして図 4 のように示しながら一つにはその二項がいずれも心的な存在であること、二つにはその二項が不可分離であり、相互依存関係におかれることを述べている（丸山，1991）。

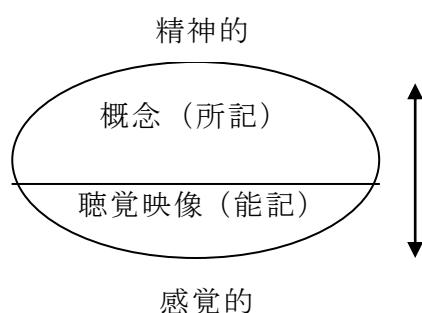


図 4 記号の二面性

Saussure の考え方によると、話し手と聞き手が存在し、話し手が発した音を聞き手

が受け取り、その聞き取った音を概念化する。しかし、文字式における文字を音のイメージから概念へと変換することは難しい。文字式における文字はほとんどが表記することによって伝えられる。そこで本研究においては聴覚映像を無視しないまでも、表記された文字について着目していく。

これらの先行研究に基づいて、能記と所記を関連させて構造化を行う。記号論的なシステムの三つの構成要素において、sign（記号）の集合（S）が記号表現（能記）であり、意味構造の集合（M）と規則の集合（R）が記号内容（所記）である。この規則の集合（R）はその記号内容と記号表現を結び付けるための決まりである。能記と所記の結び付きは恣意的であるために、この規則の集合（R）は記号表現と記号内容を結び付けるための決定的な役割を果たし、言語対象、概念、手続き、定理といったような暗黙の規則が働く。

以上のことを整理すると、記号論的な認識過程モデルは図 5 のようになる。

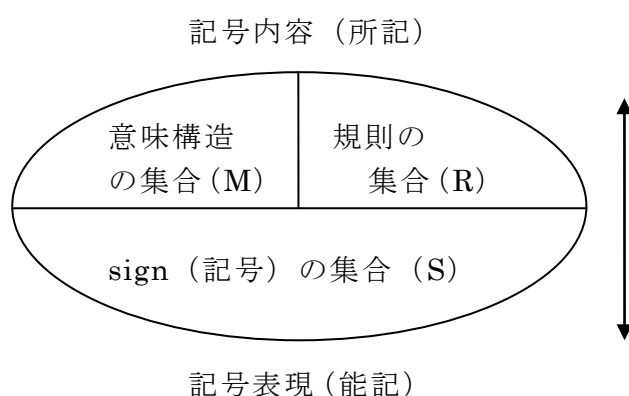


図 5 記号論的な認識過程モデル

5. 想定プロトコルにおける分析

ここで第 1 節のプロトコルとは別に、新たに想定プロトコルを作り、図 5 のモデルを用いて分析を行う。想定プロトコルで扱

う授業の問題は以下の通りである.

問題

3つの続いた偶数の和は6の倍数になる。
このわけを, 文字を使って説明しなさい。
(東京書籍)

図 6 想定プロトコルにおける問題

この場面は, 問題の考え方から証明の仕方を考える. プロトコルは教師と生徒が問題解決を行っている場面からである. プロトコルにおける T は教師を表し, S は生徒を表す. 生徒を区別する場合は, S の後に数字をつける.

T: 3つの続いた偶数とは, 例えばどのような数ですか?

S1: 2, 4, 6.

S2: 18, 20, 22 とか.

T: そうですね。それでは, その3つの続いた偶数の和は6の倍数になるか確かめてみましょう。

S1: えっと。2, 4, 6 の場合は $2+4+6=12$ となるから6の倍数になるね。

S2: 18, 20, 22 の場合は全部足すと60になるから6の倍数だ。

T: この結果から3つの続いた偶数の和は6の倍数になりそうだということが分かりました。それではこのわけを, 文字を使って説明してみましょう。

S2: まず偶数を文字に表してみよう。

S1: 偶数というのは2の倍数だから $2n$ ってなるのかな。

S2: うん。

S1: ということは, 3つの続いた偶数の和は $2n+2n+2n$ と表せるね。

S2: おれは $2n+(2n+2)+(2n+4)$ と表したよ。

S1: えっ。どうして $2n+(2n+2)+(2n+4)$ ってなるの?

S2: だって, $2n+2n+2n$ って表したら「3つの偶数の和」になるじゃん。

例えば, $4+4+4$ とか $6+6+6$ とか。

S1: たしかに。

S2: この問題は「3つの続いた偶数の和」だから, 最初の数から2ずつ増えていかなきゃいけないんだよ。

S1: なるほど。そうすると2, 4, 6の場合だと2が $2n$, 4が $2n+2$, 6が $2n+4$ になるんだね。

S2: その通り。そしてこの $2n+(2n+2)+(2n+4)$ を全部足すと…。

S1: $2n+(2n+2)+(2n+4)=6n+6$ 。それで $6(n+1)$ となるから6の倍数になるんだね。

この想定プロトコルを図5の理論を用いて分析を行う。最初の段階で, Tが「3つの続いた偶数とは, 例えばどのような数ですか?」という発言に対して, S1とS2はそれぞれ「2, 4, 6」, 「18, 20, 22」と表している。この場面で, 「3つの続いた偶数」という内容に, 手続きという規則が働いて「2, 4, 6」, 「18, 20, 22」と表現した。つまり, 「3つの続いた偶数」が記号内容であり, 「2, 4, 6」, 「18, 20, 22」が記号表現である。

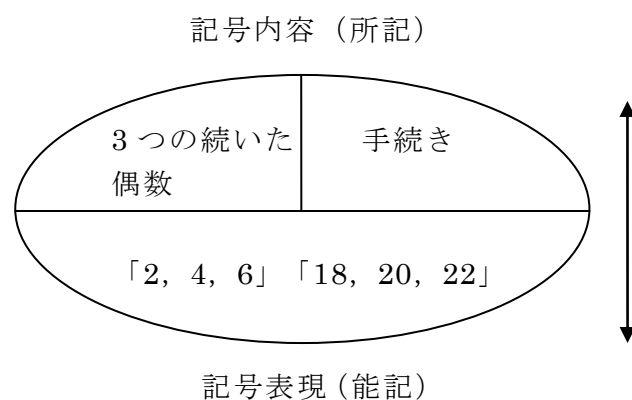


図 7 対象から具体的な数への認識過程モデル

さらに、3 つの続いた偶数の和が 6 の倍数になることを確かめるために上述の記号表現を用いて演算操作を行っている。

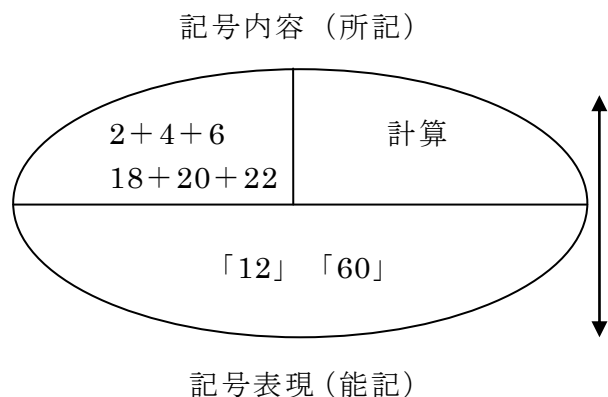


図 8 演算操作から演算結果への認識過程モデル

次に S2 の「偶数を文字に表してみよう」という発言から、S1 は「偶数というのは 2 の倍数だから $2n$ ってなる」と述べている。ここで偶数という集合があって、その偶数は 2 の倍数であるという概念が働き、 $2n$ と表した。偶数という記号内容から $2n$ という記号表現に表す前に、偶数は 2 の倍数であることを記号内容と記号表現の間に取り入れていることが分かる。

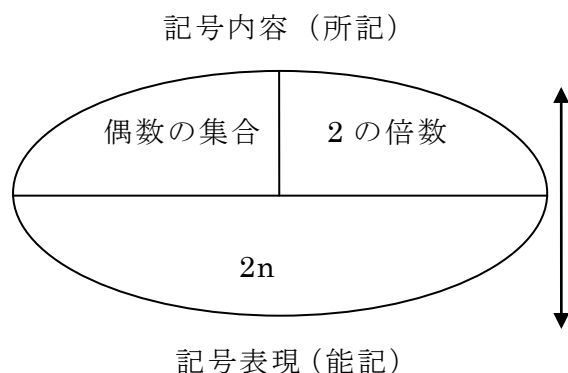


図 9 偶数の集合から文字への認識過程モデル

S1 は 3 つの続いた偶数の和を「 $2n+2n+2n$ 」と表現した。しかし、S2 はそれを誤

りだと指摘し、「 $2n+(2n+2)+(2n+4)$ 」と表現した。S1 は 3 つの続いた偶数の和を「偶数が 3 つ続いている」と解釈したために「 $2n+2n+2n$ 」と表し、S2 は 3 つの続いた偶数の和を「3 つ続いている偶数」と解釈したので「 $2n+(2n+2)+(2n+4)$ 」と表したことが考えられる。つまり、S1 は文字から文字へと表現を置き換えていて、S2 は具体的な数から文字へと表現を置き換えていることが分かる。S1 は置き換えができていないものの、置き換えた文字の内容までは理解できていない。

S1 と S2 の認識過程モデルを表現すると図 10、図 11 のようになる。

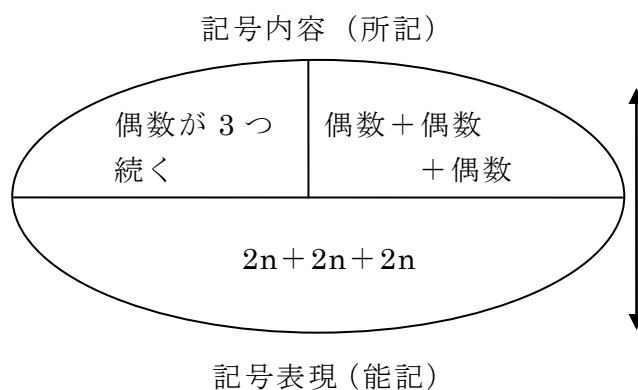


図 10 S1 における数の式から文字の式への認識過程モデル

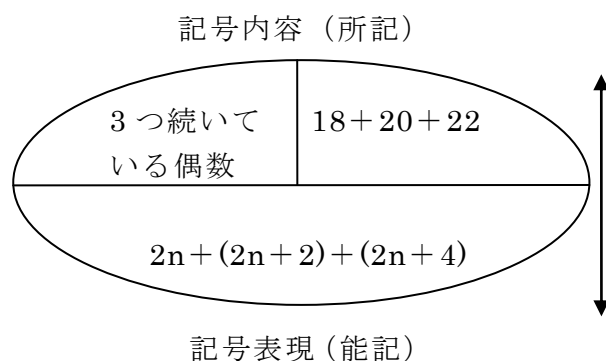


図 11 S2 における数の式から文字の式への認識過程モデル

図 11 から、文字は数の延長として表現されていることが分かる。同時に文字の意味をしっかりと捉えなければいけない。S2 は、文字は数として扱っていることや文字の意味について理解している。

次に S2 の「この $2n + (2n + 2) + (2n + 4)$ を全部足すと」という発言から 3 つの続いた偶数の和は 6 の倍数になるかどうか求めた文字式から導こうとしている。S1 の発言である「 $2n + (2n + 2) + (2n + 4) = 6n + 6$ 。それで $6(n + 1)$ となるから 6 の倍数になる」より、「3 つの続いた偶数の和 ($2n + (2n + 2) + (2n + 4)$)」が記号内容であり、「 $6(n + 1)$ 」が記号表現である。ここで $6(n + 1)$ は 6 の倍数であるという暗黙の規則が働いている。

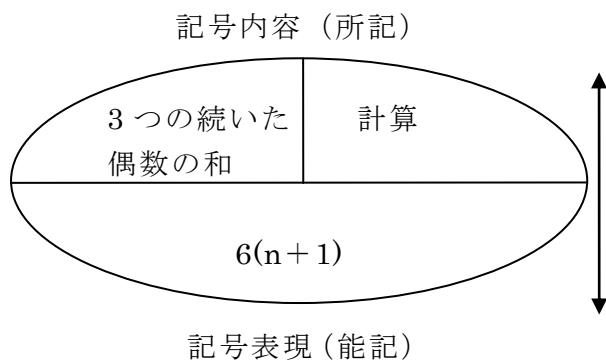


図 12 対象から演算への認識過程モデル

6. まとめと今後の課題

本稿は、杜威 (1991) の研究から文字式と文字の意味や構造をまとめ、Ernest (2006) と Godino ら (2010) の先行研究と Saussure の理論を組み合わせた理論と認識過程モデルを示した。

今後の課題は本稿で示した記号論的な認識過程モデルをより明確に示すことである。そして数から文字へと移行の過程の際に、どのような困難が生じているのか考察する。その方法として生徒に対してインタビュー

を行い、数に関する記号論の先行研究と Saussure の理論を用いて分析をし、生徒の文字式における文字の記号論的な困難性を明らかにする。

7. 引用・参考文献

Juan D. Godino・Vicenc Font・

Miguel R. Wilhemi・Orlando Lurduy.

(2010) . Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects . Educational Studies in Mathematics, 77, 247 - 265.

Paul Ernest . (2006) . A semiotic perspective of mathematical activity : The case of number . Educational Studies in Mathematics, 61, 67 - 101.

Sford, A. (2000) . Steering (dis) Course Between Metaphors and Rigor : Using Focal Analysis to Investigate an Emergence of Mathematical Objects . Journal for Research in Mathematics Education, 31, (3) , 296 - 327.

大阪教育研究会 . (1987) . 分数・文字式を教えるということ . 明治図書 .

片桐重男 . (1982) . つまづきを生かす指導 . 明治図書 .

杉山吉茂 . (1982) . 数学のつまづきとその指導 . 東京書籍 .

鈴木敬介 . (2007) . 「式を読む」を視点とした文字式の授業改善に関する研究 . 上越数学教育研究, 22, 33 - 44.

杜威 . (1991) . 学校数学における文字式の学習に関する研究 : 数の世界から文字の世界へ . 東洋館 .

藤井斉亮 . (1992) . 児童・生徒の文字

の理解とミスコンセプションに関する
インタビュー調査．日本数学教育学会
誌，臨時増刊，数学教育学論究，58，3
- 27.

藤井斉亮．（2011）．文字式．日本数学
教育学会，数学教育研究ハンドブック，
83 - 94.

藤井斉亮，俣野博ら．（2012）．新しい
数学 2，東京書籍．

丸山圭三郎．（1991）．ソーシャルを読
む．岩波書店．

丸山圭三郎．（2009）．ソーシャル小事
典．大修館書店．