上越数学教育研究, 第 13 号, 上越教育大学数学教室, 1998 年, pp.13–22.

解決の進展を促すいくつかの活動について

ー解決者による行き詰まり箇所の考察をもとにー

布川　和彦

1　はじめに

「問題場面の構造」(Nunokawa, 1994) を視点とした解決過程の記述・分析を目指し、筆者は同一被験者に対し 9 回の問題解決を行ってもらった。そしてその第 2 回 (Nunokawa, 1994)、第 3 回 (Nunokawa, 1997b)、第 5 回 (Nunokawa, 1997c)、第 7 回 (Nunokawa, 1993)、第 8 回 (布川, 1997)、第 9 回 (布川, 1996) についての分析を行い、解決過程に関していくつかの知見を得てきた。本稿ではこの 9 回のセッションのうちの第 6 回目をとりあげ考察する。このセッションでは解決の途中までは成功的に行われていたが、場合分けされた 4 つの場合のうち、3 番目の場合で解決が行き詰まってしまった。その行き詰まりが生じた原因を考察するとともに、問題場面の構造を変化させるという立場や、他のセッションからの知見を参照しながら、解決を促進させる可能性のある活動について考察をしていく。

2　データの収集および解決の概要

2.1 データの収集

本稿で分析される第 6 回の解決では次のような問題が扱われた。

問題：$\{X_n\}, \{Y_n\}$ を次の式で定義される整数の数列とする。

$X_0=1, X_1=1, X_{n+1}=X_n+2X_{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$Y_0=1, Y_1=7, Y_{n+1}=2Y_n+3Y_{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

このとき、これらの数列の最初のいくつかの項は

X: 1, 1, 3, 5, 11, 21, …

Y: 1, 7, 17, 55, 161, 487, …

となる。この 2 つの数列両方に現れる数は、1 以外にないことを証明せよ。

(クラムキン, 1991, p.8)

解決者にはこれを発話思考法で解いてもらい、また解決後にはどのようにして考えたかについてのインタビューを行った。それらを ATR と VTR で記録し、後にプロトコルに変換した (*cf.* Nunokawa, 1994)。

2.2 解決の概要

第 6 回のセッションでの解決は、おおよそ以下のような流れであった。

(i)与えられた漸化式を $X_{n+1}-\beta X_n=\alpha(X_n-\beta X_{n-1})$ といった形に直すことを考え α と β の値を求める。求めた値に従って X_n の方の漸化式を変形しているが、「解答のように書くことにして」として、新しい紙に変える。その後、先ほどの α と β の値に従い X_n の漸化式と与えられた初期値から、$X_{n+1}+X_n=2^{n+1}$ および $X_{n+1}-2X_n=(-1)^{n-1}$ を導く。さらにこれらを連立させて解き、$X_n=(1/3)(2^{n+1}+(-1)^{n-1})$ を得ている。$n=1$ を代入し X_1 の値が合わないことから式を見直し、$X_n=(1/3)(2^{n+1}-(-1)^{n-1})$ に修正をする。修正後 $n=1, n=2$ の場合を代入してチェックをし、「いいね、なってるね」として X_n の式を確認した。

(ii) Y_nの式を求めても「本当に一致しないのは1以外だっていうのを示すのは難しいかな」としながらも、X_nの場合と同じようにしてY_nの計算を始める。$Y_{n+1}+Y_n=8\cdot3^n$および$Y_{n+1}-3Y_n=4\cdot(-1)^n$を導いた後、これらを連立させて解き、$Y_n=2\cdot3^n-(-1)^n$を求めている。これについても$n=0, n=2, n=1, n=3$を代入して確かめをした。

(iii)「何が分かったかっていうと」として求めたX_nとY_nの式を上下にならべて書いて四角で囲った後、$X_n=Y_n$かつ$n=1$でないnが存在するか、という形で問題を定式化した。その途中では、X_n, Y_nが増加することから、nより大きければX_n, Y_nが1にならないといった旨の発話が聞かれた。

(iv) 求めたX_nとY_nの式が等しいと置き、さらに両辺に3をかけて、$2^{n+1}-(-1)^{n-1}=6\cdot3^n-3(-1)^n$とする。左辺を移項し、6を$2\cdot3$と読み替えて$2^{n+1}-2\cdot3^{n+1}-(-1)^{n-1}-3(-1)^n=0$となるかどうかを考えようとする。しかし「指数方程式解くのは難しそうだからグラフで考えてみよう」として、それ以上の式の変形はしない。

(v) $X_n=(2/3)2^n+(-1)^n$とし、$Y_n=2\cdot3^n-(-1)^n$も改めて書くが、何かのグラフをかくことはなく、Y_nの方が増加率が大きいので「どんどん離れていく」とすればよいと発話した。その後、「両方に現れる数ってことは、番号が一致しなくてもいい」「ということは条件がきつい」「同じ番号じゃなくてもいいってところがミソなんだ」と発話した。ここでは両者の増加率より、同じ番号で一致しないことは自明であり、それより番号が一致する必要がないという題意が把握されており、問題の難易度を見ながら問題文の解釈を調整する様子 (Nunokawa, 1993b) が見られる。

数の系列だけを「比べるよりほかない」とし、両方の数列に現れるということを「$\exists p,q$ s.t. $X_p=Y_q$」と定式化した。$3X_p=2\cdot2^p+(-1)^p$と$3Y_q=6\cdot3^q-3(-1)^q$を比べるようにし、このとき$(p,q)=(0,0),(1,0)$だけは除くとした。しかし特にアイデアはなく「一般項求めた方が有利だと思ったけどそうでもない」と発話した。$3X_p$と$3Y_q$がともに3の倍数になることに一旦疑問を感ずるが、「とびとびだったらおんなじにならない可能性ある」として納得した。

(vi) $3X_p$と$3Y_q$が等しいとして式をたて、さらに$3X_p$から$3Y_q$を引いたものが0になるとして矛盾を導こうとした。その際、p,qがともに偶数の場合をまず考えようとした。この場合に式を変形し、$2(2^p-3\cdot3^q-1)=0$とし(計算ミスを含む)、$2^p-3\cdot3^q-1$が0になるかを調べようとした。その中で「偶奇性くらいじゃダメ」との発話があった。

(vii) $y=2^p-1$と$y=3^{q+1}$のグラフを図1のようにかき、矢印の部分を指しながら「1離れているかもしんない」ので、「ダメだ」とした(2^pと3^{q+1}の差が1になるか、ということと混同していると思われる)。

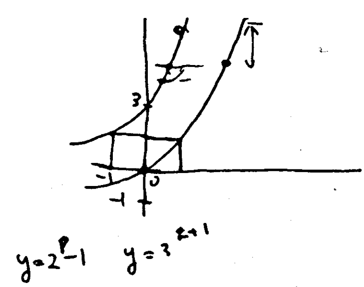

図1

(viii) 数学的帰納法を「ダブルで使う」のかとして、$2^p-3^{q+1}-1<0$を示そうとするが、「正なったり負なったりする」のでダメだとする。さらに$2^p-3^{q+1}-1\neq0$および$2^p-3^{q+1}=1$かどうかに言及するが、特に変形はしなかった。途中で今考えている式でp,qがともに0のときの数値が合わないことに気づき、そこから(vi)での計算ミスに気づいた。

(ix) (viii)でのミスを直し、p,qがともに偶数のときの式として、$2^p-3\cdot3^q+2$を得て、

$2^p-3\cdot3^q+2\neq0$を示せばよいとする。このときすぐに $2^p-3\cdot3^q+2=2(2^{p-1}+1)-3\cdot3^q$ と変形し、$2(2^{p-1}+1)$ が 2 を因数に含むのに対し、$3\cdot3^q$ は 2 を因数に含まないことより、先の式が 0 にならないことが証明できたとした。同様に p, q が奇数の場合にも $3X_p-3Y_q$ の式から$2^p-3\cdot3^q-2$ の式を得て、これを$2(2^{p-1}-1)-3\cdot3^q$ と変形することで証明をしている。さらに p が奇数、q が偶数の場合についても念頭で予想し、「出来た」と発話した。しかし実際に式を書いてみると、$2^p-3\cdot3^q+1$ となり、同様の変形ができないことに気づいた。

(x) 先の式について、「2^p+1 が3 で割れるか」を考える。その際にフェルマーの小定理に言及するが、具体的に適用することはなかった。$p=3$ のとき 2^p+1 が 3 で割れることに気づき、3 で割れるかという「条件が強すぎ」と発話した。その後、$2^p-3\cdot3^q+1$ を $2^p-3\cdot3^q-3+4$、$2(2^p+2)-3(3^q+1)$ と変形し(正しくは 2^{p-1})、すぐに「これゼロじゃない」としてpが奇数で q が偶数の場合ができたとした。p が偶数で q が奇数の場合にも、$3X_p-3Y_q$ から得られる$2^p-3\cdot3^q-1$ の式を $2(2^p-2)-3(3^q-1)$ と変形し、これがゼロにならないとして証明を終えた。ここまでで約82分であった。

(xi) ここでインタビュアーから被験者に自分の解決を説明するよう求めた。(x) の箇所を説明する途中で、その場合には「かたっぽは 3 の因数だけを含む」という議論が使えないことに気づき、「早とちりでこれはダメ」とした。その後、89分過ぎから被験者の方から解決を再開した。

(xii) 「2の p 乗たす 1 が3 を因数に含まないってことが言えりゃいい」と言ってすぐに「言えない」と発話した。その後 p 奇数、q が偶数の場合を計算し、再び $2^p-3\cdot3^q+1=0$ を得るが、次に指数 $p=2p'+1, q=2q'$ とおいて変形をし、$2\cdot4^{p'}-3\cdot9^{q'}+1=0$ とした。その後、p と q がともに偶数の場合、およびともに奇数の場合を見直した。さらに p' の範囲を気にするが、「整数にする範囲ならいい」「1はいい」として(xii) 前半で書いた式にバツをつける。

(xiii) 2^p+1 が 3^{q+1} と書けないことが言えればいいとした後で、フェルマーの小定理に言及しこれを書き下す。しかし「使えそうもない」として、特に適用することはなかった。
2^p+1 の式のあたりを指しながら「3 の累乗にこの形がなりそうもねえ」と発話した。この時点でインタビュアーが介入し、解決を終了させた。所要時間は約100分40秒であった。

2.3 解決過程における問題場面の構造の変化

第6回のセッションの問題における問題場面は、与えられた漸化式で定義される二つの数列である。この場面の中に解決者が見ている要素、要素間の関係、それらに対して解決者が与えている意味が、ここでの問題場面の構造となる(*cf.* Nunokawa, 1994)。

(a) 解決の概要の (i) と (ii) では、問題文の字義通りの構造、つまり与えられた漸化式により定義される数列、というところから出発し、一般項がそれぞれ $X_n=(1/3)(2^{n+1}-(-1)^{n-1})$、$Y_n=2\cdot3^n-(-1)^n$となる数列という構造へと変化している。

(b) 基本的には (a) と同じだが、二つの数列が増加する、n が大きいときには 1 という値には戻らないという情報が付加されている。

(c) (iv) では、二つの数列の 3 倍どうしの差である$2^{n+1}-2\cdot3^{n+1}-(-1)^{n-1}-3(-1)^n=0$ という要素が付加されている。またグラフへの言及より、X_n, Y_n を n の関数として意味づけている。

(d) (v) ではそれぞれの数列の増加率という要素が付加され、Y_n の方が増加率が大きい、それ故両者は「どんどん離れていく」という情報が付加されている。また $3X_p, 3Y_q$ はともに 3 の倍数であるが、互いに「とびとび」

になっているという情報も付加されいてる。

(e) (vi) では、それぞれの数列の3倍の差の計算より、$2^p-3\cdot3^q-1$ という要素を付加している。計算の途中での $(-1)^p$ や $(-1)^q$ の扱いから、問題場面に対して p,q の偶数、奇数に応じた場合分けが考慮されるようになっている。

(f) (e) で現れた $2^p-3\cdot3^q-1$ の式のうち、(vii) では 2^p-1 と $3\cdot3^q$ の部分が要素として取り出され、さらにそれらが関数として意味づけられている。それらの関数について、p,q が実数を動くときには、値の差が1になる箇所が存在するという情報が付加されている。

(g) (viii) では数学的帰納法を二重に使うことより、p,q に関しての配列が (e) とは異なってきている。つまり、特定の q に対して全部の p を考えるような配列になっている。

(h) (ix) では、数列の3倍の差を $2^p-3\cdot3^q+2$ (p,q は偶数) と意味づけ、さらにその中から $2(2^{p-1}+1)$ と $3\cdot3^q$ という要素が得られている。この前者は2を因数に含むが後者は2を因数に含まないという情報が付加されいてる。同様に $2^p-3\cdot3^q-2$ (p,q は奇数) という意味づけをし、この中から $2(2^{p-1}-1)$ と $3\cdot3^q$ の要素を得ている。さらに $2^p-3\cdot3^q+1$ (p は奇数、q は偶数) という意味づけを与えている。このようにこの段階では、問題場面は p と q が奇数か偶数かで場合分けされて捉えられている。

(i) (x) では先の式から 2^p+1 という要素が得られ、これが3で割り切れるという情報が付加されている。また $2^p-3\cdot3^q+1$ の"+1"を $-3+4$ と意味づけ、そこから今の式に対して $2(2^p+2)-3(3^q+1)$ という意味づけを与え、$2(2^p+2)$ と $3(3^q+1)$ という要素を得ている。このとき後者について3だけを因数に含むという (誤った) 情報が付加されていたと思われる。同様に、$2^p-3\cdot3^q-1$ (p は偶数、q は奇数) に対して $2(2^p-2)-3(3^q-1)$ という意味づけを与え、そこから $2(2^p-2)$ と $3(3^q-1)$ という要素を得ている。(xi) での問題場面の構造は (x) と同じものと考えられる。

(j) (xii) では 2^p+1 という要素が考えられているが、これについての情報は特に付加されていない。また p が奇数 q が偶数の場合の式に $2\cdot4^{p'}-3\cdot9^{q'}+1=0$ という意味づけが与えられている。(xiii) でも、2^p+1 と 3^{q+1} という要素が考えられているが、特に情報は付加されていない。

以上より、第6回のセッションでは、基本的には、数列が一般項の式により与えられるという情報、およびそれらの差という要素が付加された構造が問題場面に与えられている。これに他の付加的情報が加わって、各時点での問題場面の構造が構成されている。

3 既有の解法に対する操作・修正に基づく解決促進の可能性

3.1 解決の可能性と文脈の影響

本稿で取り上げた事例では、解決者は二つの数列の奇数番目の項、偶数番目の項の組み合わせにより4つの場合を区別し、そのうちの二つの場合については、適当な式変形によりその証明を構成している。その部分の発話を見ると、示すべき式を書いた後、30秒ほど黙って何もせずにいた後、「出来たあ」としてすぐに証明を完成させている。これより、ここでは、示すべき式 $2^p-3\cdot3^q+2$ に現れている2カ所の2を括ることで証明が得られたものと考えられる。

p と q の一方が奇数で他方が偶数の場合はこの方法が使えず、結局証明は完了していない。しかし、クラムキン (1991) による解答を参考にするならば、彼の解答を次のように続けることにより、証明を完了させることができる。まず p が奇数、q が偶数の場合に被験者は、$2\cdot2^p-6\cdot3^q+(-1)^p+3(-1)^q=2\cdot2^p-6\cdot3^q+2=2\{2^p-3\cdot3^q+1\}$ とし、$2^p-3\cdot3^q+1$ が0になるかを調べようとして行き詰まってい

る。このとき、$2^p \equiv 0 \pmod 4$、$3 \cdot 3^q - 1 \equiv -2 \pmod 4$ (ただし $p \geqq 2$ のとき) であること使えば、先の式が0にならないことがわかる。同様に、p が偶数、q が奇数の場合も、$2^p - 3 \cdot 3^q - 1$ が0にならないことが示され、証明が完成する。

さらに彼の解決過程を見ると、この考え方に彼が気づくことのできた契機があったことがわかる。解決過程の (xii) では p が奇数、q が偶数という条件を式の中に取り入れるために、$p=2p'+1, q=2q'$ を代入し、$2 \cdot 4^{p'} - 3 \cdot 9^{q'} + 1 = 0$ としている。一方、(viii) では $2^p - 3^{q+1} - 1 \neq 0$ の中の 2^p と 3^{q+1} をそれぞれ指して「2の倍数3の倍数」と発話しており、また (ix) では、$2^p - 3 \cdot 3^q + 2 = 2(2^{p-1}+1) - 3 \cdot 3^q$ の中の $2(2^{p-1}+1)$ が2を因数に含むのに対し、$3 \cdot 3^q$ が2を因数に含まないことに言及している。

この議論を $2 \cdot 4^{p'} - 3 \cdot 9^{q'} + 1 = 0$ の式に適用すれば、「4の倍数9の倍数」を考え、この式のある部分は4を因数に含むが、残りの部分は4を因数に含まないことを示そうとすることになる。これはちょうど上で示した mod 4 に着目した解決になり、この意味で、本稿の被験者は解決を完遂する可能性を持っていたと言える。

布川 (1996) の事例では、解決を完遂するだけの情報や論理の進め方が被験者自身によって言及されていながら、その時点で解決者が目指していた下位目標により作られる文脈の影響で、それらが適切に組み合わされず、解決に到達できないという過程が示されていた。ここでの考察によれば、本稿の事例においても、同様のことが生じていたことになる。では今の事例で、適切な組み合わせを阻害した原因はどこに求められるであろうか。

先にも述べたように、(ix) でpとqがともに偶数のときの証明を書く際には、「$2(2^{p-1}+1)$ は2を因数に含む」「$3 \cdot 3^q$ は2を因数に含まない」としていた。ところが (xi) で解決を説明してもらう際には、次のように発話している。

[86:51] … 2の倍数引く3の倍数、って形になるからこれは絶対にならない、ああ3の倍数っていうよりももっと、もっと言えば2の、倍、2の倍数引く、3の何とか乗、だからかたっぽは2の、2を因数に含むんですけど、かたっぽは3に因数に含む、3を、3だけを因数に含む、だからこれイコールになるはずない、

ここでは、$3 \cdot 3^q$ が単に2を因数に含まないということだけにとどまらず、それが「3だけを因数に含む」という言い方に移行している。確かに「3だけを因数に含む」ことは2を因数に含まないことの理由になっている。しかし (xii) で解決を再開した後では、$2^{p-1}+1$ が3を因数に含まないことを示そうとし、すぐに $2^{p-1}+1$ が3を因数に含みうることに気づき、この試みを止めている。さらに (xiii) では、2^p+1 が 3^{q+1} の形に書けないという言い方に変わり、終了直前には「3の累乗にこの形 [2^p+1 のあたりを指しながら] がなりそうもねえもんな」という発話もなされている。

つまりここには、式の一部がある特定の因数を含まないという条件から、式の一部が特定の数を底とする累乗の形に書けないという条件への移行が見られる。このために、2の累乗や3の累乗の形に書けるかという探求へと移行することとなり、4や9といった2と3以外の因数に関してそれを含むか、という方向へ探求が向かうことが妨げられたと考えられる。

さらに先に示した解答と比べたときに、示された解答では $-3 \cdot 3^q + 1$ (q は偶数) が4を因数に含まないという性質を用いていたのに対し、本稿の解決者は $2^p - 3 \cdot 3^q + 1$ の式を $2^p + 1$ と -3^{q+1} という組み合わせで考察している。これは、p と q がともに偶数のときの証明で、$2^p - 3 \cdot 3^q + 2$ の式の $2^p + 2$ を一まとまりとし、これと $3 \cdot 3^q$ を対比させることで証明が成功したことによるものと思われる。つまり、以前の

成功した証明のやり方により文脈が作られ、それが後の問題場面の意味づけの仕方を固定してしまっている。

3.2 既有の解法に対する操作

この文脈から逃れることは、新しい視点で眺めることで構えをブレイクする(今井, 1997)こととは異なると思われる。それは、当該の式を二つの部分にわけ、それらに共通には含まれない因数があることを示す、という解決者が採っていた方針は、前項で示したように妥当性を持っているからである。しかし一方で、2^p+1 は$p=3k$のときは9の倍数になってしまうので、2^p+1 をひとまとまりとして調べ、これが9を因数に含まないということは言えず、$-3\cdot3^q+1$ をひとまとまりにして考えるように式の捉え方を変える必要があり、上述のような文脈の中で考えていることは不適切である。

ところでCifarelli (in press)は類似した一連の問題に対する二人の解決者の活動を調べることにより、解決活動の三つの水準を見出している。それは、課題の類似性を認識し適切な行為のとれる水準、その適切な行為を新たな場面に適用した際の困難点が予想できる水準、そして予想される行為に対して操作を施しそこから推論を導くことのできる水準(構造的抽象)である。

本稿での事例において4つの場合のそれぞれの証明を一連の問題と見なしたとき、3番目の場合の証明を考えるにあたり、解決の(ix)では実行する以前に適当な行為を(誤りながらも)念頭で予想したり、あるいは(x)においては、$2^p-3\cdot3^q+1$ を$2^p-3\cdot3^q-3+4$ と読み替えることを行っており、構造的抽象の水準を解決者は示している。ここではむしろ、構造的抽象の水準で、どの程度自由な操作が可能であったかが、問題となると考えられる。すなわち、式の2^p+1と$3\cdot3^q$のそれぞれの部分が2や3を因数に含むかを考えることに留まらず、式の他のまとめ方をしたり、調べる因数として他の数を選ぶなどの修正を、1番目、2番目の場合の証明から抽出されていたと思われる解決活動に施す必要があった。解法を全くブレイクする必要はないが、しかしそこに十分な操作が施される必要はあったということである。

このことは、1番目と2番目の場合の証明方法への意味づけの仕方にも関係していよう。これらの証明を、式を二つの部分に分け、ある因数が一方には含まれるが他方には含まれないことを示した、として意味づけるならば、証明方法に対して柔軟に操作を施し、二つのわけ方を変えたり、別の因数で試みるなどの修正の余地があろう。しかし証明方法を、式を 2^p+定数 と $3\cdot3^q$に分け、後者が3の累乗であることより前者と一致しないことを示した、として意味づけるならば、前者が3や3^2を因数に含みうることより、前者が後者と同じ3の累乗の形にならないことを示すことが目指されることになる。つまり、式の一定のわけ方や累乗という観点の制約の下での解法の修正となってしまう。

このことは単にモニタリングの欠如に帰着させることはできない。本稿の被験者である解決者は、他のセッションでも適度にモニタリングを行っている(例えば布川, 1997)が、この第6回のセッションでも、解決の(vi)での計算ミスについて、(viii)ではわかっている項の数値と対比させることで自分のミスを見つけている。また、解決の(xii)の95分過ぎのところで、3番目の場合の証明に行き詰まった際に、1番目および2番目の証明を振り返ることを実行している。

この(xii)での振り返りは、上で述べた証明方法への新たな意味づけの機会となりうるものであった(1)。しかし、その振り返りの中で確認している事項は、必ずしも適切とは言いがたい。振り返りの中では例えば次のような発話があった；「分数になっちゃったら

意味ねえ」「整数になるときだけ」「整数なるよね、そ、だからいいんだ」「pダッシュの範囲を考える、…整数にする範囲だったらいいのか」。これらより、この振り返りにおいては、解決者は式の指数の範囲、特に指数が負にならないような範囲に注意を向けている。その結果、1番目および2番目の証明の方針やそのアイデアを反省することは行われていない。

なお、(xii) で解決を再開して2分ほどして、pが奇数、qが偶数の場合の式を計算しなおしているが、これはこの場合にも以前の証明方法が適用できるという期待を表すものであり、反駁が証明方法ではなく、むしろ式の方に向けられたものと考えることができよう。これも、証明方法自体を反省の対象としていないことの現れと考えることができる。

第3回のセッションでは、以前の解決への不適切な意味づけから出発しながらも、問題場面の表面的な特徴により、意味づけの移行が起こっていた (Nunokawa, 1997b)。本稿の事例でも、3.1 で示したように、この振り返りの時点で扱われていた $2\cdot4^{p'}-3\cdot9^{q'}+1=0$ の式の表面的な特徴に着目すれば、4や9などの因数に新たな意味づけへと移行できた可能性はある。しかし振り返りの際の解決者の注意がこの式の指数にのみ向けられていたことが、意味づけの移行を妨げたと思われる。3.1 で示したような文脈から逃れるためには、既有の解法を振り返りの対象にするなど、モニタリングの内容が問題となるが、既有の解決にどの程度一般的な意味づけをするかの判断は、実際には容易ではないと予想される。

4　発見法に基づく解決促進の可能性

2.3 の (j) からわかるように、(xii) で解決が再開されて以降、そこで問題となっている $2^p-3\cdot3^q+1$ という式に関して、2^p+1 という部分が取り出される他は、特に新しい情報は付加されていない。そこで、ここで解決を促進するために、この式についての新たな情報を得るべくその探求を行うことが考えられるが、「考え方」としてのストラテジーを試みることは、問題場面の構造の変化を促す可能性がある (布川, 1995)。

今の式の中には整数のパラメータが含まれていることから、このパラメータに値を代入して、そこからパタンを見つけるといった発見法 (Schoenfeld, 1985) を採用することが考えられる。実際、本稿の解決者は第8回のセッションでは、一般式を扱って解決が進展しない場合に、このような発見法を (成功的とは言えないながらも) 用いていた (布川, 1997)。

例えば、解決者が最後のところで行き詰まった箇所で考えていた 2^p+1 と $3\cdot3^q$ について、p (奇数) と q (偶数) にいくつかの値を入れてみると次のようになる[(2)]。

$$2^p+1 : 3, 9, 33, 129, 513, 2049, 8193, \cdots$$
$$3\cdot3^q : 3, 27, 243, 2187, 19683, \cdots$$

これを見ると、共通の3 (これは $p=1, q=0$ の場合で除外されている) 以外は、前者は4の倍数より1大きく、後者は4の倍数より1小さい数であることがわかる。しかも後者が4の倍数より1小さい数であることも、数学的帰納法により証明することができる[(3)]。また、ここで両者が4の倍数により特徴づけられていることから、「4の倍数」を問題場面の重要な要素として捉え、それが現れるような式変形を試みる (*cf.* Nunokawa, 1997b) ならば、例えば、

$$2\cdot4^{p'}-3\cdot9^{q'}+1=2\cdot4^{p'}-3\cdot(2\cdot4+1)^{q'}+1$$

とすることで、この式を4で割ったときの余りが常に2になることを示すことができる。つまり、具体的な値を生成しパタンを見つけることは、当該の場面において重要な要素についての情報を与え、式変形の方向性を示す可能性も持っていたと言える。

もしも $-3\cdot3^q+1$ の部分を考えることができたならば、パタンは一層見やすくなる。今、

$3 \cdot 3^q-1$の値をいくつか具体的に求めてみると次のようになる。

$3 \cdot 3^q-1$: 2, 26, 242, 2186, 19682, …

これを見ると、$(3 \cdot 3^q-1) \div 2$が奇数になることがわかり、2の累乗の形にはならないことがわかるとともに、その1の位が1と3の繰り返しになることにも気づく。さらに、これが$3 \cdot 3^q$の1の位が3と7の繰り返しになることによることがわかり、解決に至ることができる。

2^p+1をまとまりと見るか、$3 \cdot 3^q-1$をまとまりと見るか(あるいは2^pや$3 \cdot 3^q$だけで見るか)により、数値の間のパタンの見出し易さには差が出てくる。またこうしたパタンを必ず見いだせるというわけではないが、しかし上述のことより、第6回のセッションにおいて解決者が行き詰まった際に、整数のパラメータに値を代入し、数列を具体的に書いてパタンを探すことは、解決を促進できた可能性を持っていたと言えよう。またそれらのパタンは、式による証明とは別の証明を与えるだけでなく、解決者が考えていた式の変形の方針をも示しうるものであることがわかる。

5 問題場面の探求による解決促進の可能性

本稿の事例では、二つの数列の一般式の差がゼロにならないことを示すという下位目標、さらには差がゼロにならないことを示すために、式を二つの部分に分け因数の含み方の違いを示すという下位目標で解決を進め、行き詰まりを見せている。布川(1996, 1997)によれば、こうした場合、問題場面自体の探求に戻ってみること、あるいは大局的再構成を生じさせることが行き詰まりの解消になる可能性がある。そこで、本稿の事例についてもその可能性を考えてみる。

2.3で述べたように、第6回のセッションの問題の問題場面は、与えられた漸化式で定義される二つの数列である。これについて、それぞれの数列の一般項が求められている。一般項の式は問題場面に解決者が働きかけて得られた新たな情報であるが、これは自然に問題場面自体を構成する原理としても機能するようになると考えられる。また、一般項の差を調べる中で、$(-1)^n$の項の扱いなどから、項数が偶数か奇数かで二つの数列の関係に違いがあることが、見出されてきていた。特に、行き詰まりが生じていた時点では、X_nが奇数番目、Y_nが偶数番目の場合が問題になっていた。そこで、一般項に基づき、かつ項が奇数番目か偶数番目かに依りながら、数列を生成することは、解決の中で場面について得られた情報を、逆に構成原理として用いて問題場面を再構成することになると考えられる。

実際に、$X_n=(1/3)(2^{n+1}-(-1)^{n-1})$と$Y_n=2 \cdot 3^n-(-1)^n$の式を元に、$X_n$の奇数番目の項、$Y_n$の偶数番目の項を生成してみると次のようになる。

X_n : 1, 5, 21, 85, 341, 1365, …
Y_n : 1, 17, 161, 1457, 13121, …

これを見ると、例えば、いずれの数列も4の倍数よりも1だけ大きくなっていることに気づく。両者は一致する項がないことから、4の倍数の位置に違いがあると考え、それぞれどのような4の倍数に1を加えたものかを探ると、X_nの方が4×(奇数)+1の形であるのに対し、Y_nの方は4×(偶数)+1の形である(4)ことがわかり、これは数学的帰納法により証明される。X_nとY_nがある数の倍数と同じ関係を持ちながら、かつその系列の中で同じ位置には出現しないということは、解決の(v)で$3X_p$と$3Y_q$がともに3の倍数となりながら、「とびとび」に現れるので一致しないと考えたことにより、支持されうるであろう。同様に、X_nの偶数番目の項とY_nの奇数番目の項についても、前者が4×(奇数)−1、後者が4×(偶数)−1の形となることがわかる。なお、言うべき主張を数学的帰納

法で示すというアイデアは、2.2の(viii)において解決者自身によっても言及されている。

なお上のことに従えば、X_n, Y_nはそれぞれ$4(2k+1)+1, 4(2l)+1$と書け、さらにこれは$8k+5, 8l+1$となることから、註3に示すクラムキン(1991)による一つの解決に見える"8"という数が現れることがわかる。この8によって解決者が考えていた$2\cdot 4^{p'}-3\cdot 9^{q'}+1$という式を見直すと、$2\cdot 4^{p'}-3\cdot 9^{q'}+1=8\cdot 4^{p'-1}-3(8+1)^{q'}+1$などの新たな変形の方針を考えることもできる。つまり式変形の仕方そのものを示しうるわけではないが、第4節の場合と同様、「8の倍数」を重要な要素として示唆しうると言えよう。

上で示した再構成された問題場面を探求することによる解決は、見つけたパタンを数学的帰納法で証明するという同じ方針をもった前節での解決に比べ、そのパタンが見出しにくいことは否定できない。特に、二つの数列を4の倍数との関係だけで見た場合には、いずれも4の倍数より1だけ大きい数になっており、両者の違いを見出すには、それらが「とびとび」になっていると予想し、両者が(4の倍数＋1)の系列の中でどのような位置に(奇数番目、偶数番目)出るかまで、注意を向けなければならない。しかしともかくも、それまでの解決により得られた情報をもとに問題場面を再構成し、問題場面自体を探求することが、解決に至りうる情報を提供しうることを、本節の議論は示している。

数列自体からパタンを見出し数学的帰納法で証明するのであれば、一般項を求める必要はないようにも見える。実際、註3で示したクラムキン(1991)による解答では一般項の式は必要ない。しかし、本節で示した解答においては問題場面である数列全体を奇数番目の項および偶数番目の項という点から組織化することが必要であったが、本稿で考察した解決過程においては、そうした観点は一般項の式の中に現れる$(-1)^n$という項の扱いから生じてきたものであることを想起すれば、一般項の式を求めたことは、パタンを数学的帰納法で証明するやり方に対しても、有用な情報を与えていたと言えるであろう。

6　おわりに

本稿では解決者が行き詰まった箇所を中心に考察を行い、その行き詰まりを解消し解決を促進する可能性を持つと思われる三つのアプローチ、すなわち既有の解法に対する操作・修正、発見法の適用、および問題場面の探求への回帰を考えてきた(図2)[5]。解決者による解決を完成させるには、当該の式のある部分が4を因数に含むかを考えることが一つのポイントであったが、第一のものはこれまでの解決の中に暗に含まれていたこのアイデアを、既有の解法の新たな意味づけにより探り出す可能性を示していた。この場合、それまでの流れを継承しながら、かつある部分ではその文脈から逃れる、ということをしなければならない。

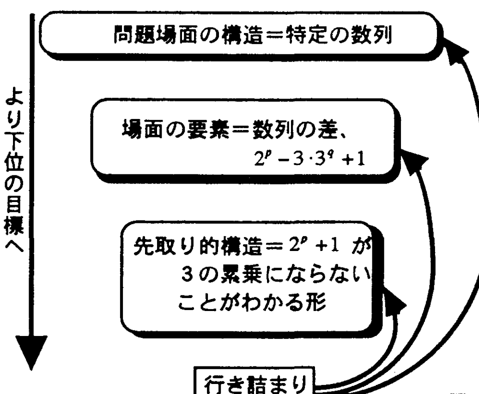

図2

これに対し第三のアプローチでは、問題場面自体を探求することで、それまでの文脈から逃れる代わりに、暗に含まれていた「4という因数」というアイデアも放棄することとなり、これを数列自体から見出さねばならなかった[6]。今の文脈から逃れる代わりに、それまでの"資産"も放棄することになりかね

ない。ただし、本稿の事例では、それまでの解決から得られた情報により問題場面を組織化することが、パタンを見出すことを容易にしていた。第二のものは二つの中間であり、それまでの解決の方針から離れ、そこで問題になっている式の値を考える一方で、2^p+1 という要素の値を考えることで、4の倍数との関係が見出しやすくなっているとも言えよう。

本当に行き詰まっている解決者に対して、これら三つのアプローチに沿って支援をすることが、それぞれどのような効果や困難点を持つのかは、今後調べていく必要があろう。

註および引用・参考文献

1. ただしここでは振り返ることで問題の構造の理解を深める (高橋, 1990) ことよりも、証明の基本的なアイデアをより一般的に捉え直すことが目指される。
2. 第4節および第5節のパタンに基づく解法は、筆者による活動の内省に基づくものである。
3. クラムキン (1991) の示す解答の中に一つのやり方として、問題文中のXとYの最初の数項について、8で割ったときの余りがそれぞれ3と5の繰り返し、1と7の繰り返しになることをみつけ、それを数学的帰納法で証明するというものがある (pp. 36-37)。したがって、ここで述べたような解法も受け入れてよいであろう。
4. 実はこの奇数と偶数には、それぞれ末尾が1か5、0か4になるというパタンも見いだせる。また例えば、$p=2p'+1$, $q=2q'$ とするとき、$X_p=(1/3)(4^{p'+1}-1)$, $Y_q=2(4-1)^{2q'}-1$ として証明することもできよう。
5. 図中の「先取り的構造」については Nunokawa (1993a) を参照されたい。
6. Nunokawa (1997a) が示すように、具体的な数列というデータを見る際に、それまでに持っている予想などが影響を及ぼすことはあろう。

Cifarelli, V. V. (in press). The development of mental representations as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behavior*.

今井敏博. (1997). 問題解決の構えをブレイクすることとその過去の経験との関連について. 日本数学教育学会第30回数学教育論文発表会論文集, 277-282.

クラムキン, M.S.(1991). 数学オリンピック問題集：アメリカ編 (国際数学オリンピック日本委員会訳). 東京図書.

布川和彦. (1995). 「考え方」としてのストラテジーの指導. 古藤怜先生古稀記念論文集編集委員会 (編), 学校数学の改善：Do Math の指導と学習 (pp. 99-113). 東洋館.

布川和彦. (1996). 問題場面の構造の構成に対する下位目標からの制約. 数学教育研究 (上越教育大学数学教室), *11*, 21-30.

布川和彦. (1997). 成功的でない解決過程のいくつかの観点からの分析. 上越数学教育研究, *12*, 21-30.

Nunokawa,K. (1993a). Prospective structures in mathematical problem solving. In Hirabayashi et al. (Eds.), *Proceedigns of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp.49-56). Tsukuba.

Nunokawa, K. (1993b). Solvers' sponteneous balancing of the level of difficulty in mathematical problem solving. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 12* (B), 47-56.

Nunokawa,K. (1994). Solver's structures of a problem situation and their global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior, 13* (3), 275-297.

Nunokawa, K. (1997a). Data versus conjectures in mathematical problem solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19* (1), 1-19.

Nunokawa, K. (1997b). Microanalysis of the ways of using simpler problems in mathematical problem solving. In E. Pehkone (Ed.), *Proceedigns of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 296-303). Lahti, Finland.

Nunokawa, K. (1997c). Physical models in mathematical problem solving: A case of a tetrahedron problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 28* (6), 871-882.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orland, FL: Academic Press.

高橋のぞみ. (1990). 生徒の問題解決における「振り返ってみる活動」に関する一考察. 日本数学教育学会第23回数学教育論文発表会論文集, 261-266.