連分数について

上越教育大学　中川　仁

平成 11 年 10 月 16 日

実数は有理数と無理数に分けられる．まず，有理数を小数で表したときのある性質について述べる．次に，無理数の連分数展開について説明し，整数係数の 2 次方程式の解になっているような無理数の持つある性質について述べる．その応用として，ペル方程式と呼ばれる不定方程式の整数解の求め方について述べる．

1　小数展開

実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す.

$$0 \leq x - [x] < 1.$$

実数 x に対して，実数からなる数列 $\{x_n\}$ と整数からなる数列 $\{b_n\}$ を

$$x_0 = x, \quad b_n = [x_n],\ \ x_{n+1} = 10(x_n - b_n),\ \ n = 0, 1, \ldots$$

によって定義する．そのとき，実数 x は無限小数

$$b_0.b_1b_2\cdots$$

で表される．有理数は有限小数かまたは循環小数として表せる．これは次のようにして，簡単に証明できる．有理数を既約分数として，$\dfrac{a}{b}$ とかく．もし，これが有限小数にならないとすれば，小数に直す過程において，割り算の余りとして現れるのは 1 以上 $b-1$ 以下の整数であるから，必ず同じ余りが現れ，そこから先の割り算は全く同じことの繰り返しになって，循環小数になる.

具体例として，$\dfrac{1}{7}$ を循環小数として表してみる.

$$\frac{1}{7} = 0.\overbrace{142857}\overbrace{142857}\cdots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

となる．このような筆算のアルゴリズムは次のように記述できる．簡単のために，分母は $2, 5$ 以外の素数 p とし，$1 \leq a \leq p-1$ とする．有理数 $x = \dfrac{a}{p}$ が

$$\frac{a}{p} = 0.b_1b_2b_3\cdots$$

と小数展開されたとする．

$$\frac{10a_{n-1}}{p} = b_n + \frac{a_n}{p}, \quad 0 < \frac{a_n}{p} < 1 \tag{1}$$

である．漸化式 (1) によって現れる有理数 $\dfrac{a_n}{p}$ は，

$$\frac{1}{p},\ \frac{2}{p}, \cdots,\ \frac{p-1}{p} \tag{2}$$

の $p-1$ 個の有理数のどれかである．$\dfrac{a}{p}$ を循環小数に表したときの循環節の長さを m とすれば，漸化式 (1) によって現れる有理数は，m 個である．さらに，m は $p-1$ の約数であり，$p-1$ 個の有理数 (2) は m 個の有理数からなる $\frac{p-1}{m}$ 個のグループに分かれる．各グループは，一つの有理数からスタートして，それを次々に 10 倍して整数部分を引くという操作によって移りあうサイクルになっている．

例 1.1. $p=7$ のとき，$\dfrac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ であるから，循環節の長さは 6 である．この両辺を 10 倍して，整数部分を引けば，6 個の有理数 (2) はすべて現れる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}\,, \quad \frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}\,, \quad \frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}\,, \\
&\frac{6}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2}\,, \quad \frac{4}{7} = 0.\dot{5}7142\dot{8}\,, \quad \frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}\,.
\end{aligned}$$

例 1.2. $p=13$ のとき，$\dfrac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}$ であるから，循環節の長さは 6 である．12 個の有理数 (2) は 2 つのグループに分かれる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{13} = 0.\dot{0}7692\dot{3}\,, \quad \frac{10}{13} = 0.\dot{7}6923\dot{0}\,, \quad \frac{9}{13} = 0.\dot{6}9230\dot{7}\,, \\
&\frac{12}{13} = 0.\dot{9}2307\dot{6}\,, \quad \frac{3}{13} = 0.\dot{2}3076\dot{9}\,, \quad \frac{4}{13} = 0.\dot{3}0769\dot{2}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{13} = 0.\dot{1}5384\dot{6}\,, \quad \frac{7}{13} = 0.\dot{5}3846\dot{1}\,, \quad \frac{5}{13} = 0.\dot{3}8461\dot{5}\,, \\
&\frac{11}{13} = 0.\dot{8}4615\dot{3}\,, \quad \frac{6}{13} = 0.\dot{4}6153\dot{8}\,, \quad \frac{8}{13} = 0.\dot{6}1538\dot{4}\,.
\end{aligned}$$

2 ユークリッドの互除法

整数 a, b の最大公約数を $\gcd(a,b)$ で表す．

補題 2.1. 整数 a と自然数 b に対して，a を b で割ったときの余りを r とすれば，$\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$.

定理 2.2 (Euclid の互除法). 整数 a と自然数 b に対して,

$$\left.\begin{array}{rcl} a &=& bk_0 + r_1, \quad 0 \le r_1 < b, \\ b &=& r_1 k_1 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1, \\ r_1 &=& r_2 k_2 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2, \\ && \cdots\cdots\cdots \\ r_{n-2} &=& r_{n-1} k_{n-1} + r_n, \quad 0 \le r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &=& r_n k_n \end{array}\right\} \tag{3}$$

であるとすると, $\gcd(a, b) = r_n$.

[証明] 補題 2.1 によって, $\gcd(a, b) = \gcd(b, r_1)$ である. これを繰り返せば,

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, r_1) = \gcd(r_1, r_2) = \cdots = \gcd(r_{n-1}, r_n) = r_n$$

となる. □

例 2.3. 1995 と 1029 の最大公約数を求める.

$$\begin{array}{rcl} 1995 &=& 1029 \times 1 + 966, \\ 1029 &=& 966 \times 1 + 63, \\ 966 &=& 63 \times 15 + 21, \\ 63 &=& 21 \times 3. \end{array}$$

したがって, $\gcd(1995, 1029) = 21$ である.

3 連分数展開

ユークリッドの互除法を次のように書き直してみる.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{a}{b} &=& k_0 + \dfrac{r_1}{b}, \quad 0 \le \dfrac{r_1}{b} < 1, \\ \dfrac{b}{r_1} &=& k_1 + \dfrac{r_2}{r_1}, \quad 0 \le \dfrac{r_2}{r_1} < 1, \\ \dfrac{r_1}{r_2} &=& k_2 + \dfrac{r_3}{r_2}, \quad 0 \le \dfrac{r_3}{r_2} < 1, \\ && \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &=& k_{n-1} + \dfrac{r_n}{r_{n-1}}, \quad 0 \le \dfrac{r_n}{r_{n-1}} < 1, \\ \dfrac{r_{n-1}}{r_n} &=& k_n. \end{array}$$

これから，

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= k_0 + \frac{r_1}{b} = k_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_1}} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&= k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{k_n}}}}}
\end{aligned}
$$

を得る．このような形の分数を**連分数**という．上の計算において，有理数 $x = \dfrac{a}{b}$ に対して，整数 k_i と有理数 $x_i = \dfrac{r_{i-1}}{r_i}$ は

$$
x_0 = x, \quad k_i = [x_i], \quad x_{i+1} = \frac{1}{x_i - k_i} \tag{4}
$$

によって定まる．したがって，x が無理数のときでも (4) によって，整数 k_i と実数 x_i を定めることができる．そのとき，x が無理数であることから，常に $0 < x_i - k_i < 1$ であり，この計算は無限に続く．

$$
x_i = k_i + \frac{1}{x_{i+1}}
$$

であるから，

$$
x = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}} \tag{5}
$$

である．この右辺を記号 $[k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}, x_n]$ で表す．

$$
x_i = k_i + \frac{1}{x_{i+1}}
$$

より，

$$\begin{aligned} x &= x_0 = k_0 + \frac{1}{x_1} = \frac{k_0 x_1 + 1}{x_1} \\ &= \frac{k_0\left(k_1 + \dfrac{1}{x_2}\right) + 1}{k_1 + \dfrac{1}{x_2}} = \frac{(k_0 k_1 + 1)x_2 + k_0}{k_1 x_2 + 1}. \end{aligned}$$

一般に，

$$x = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}} \tag{6}$$

の形にかけると予想される．(6) の右辺に，$x_n = k_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$ を代入すれば，

$$x = \frac{p_n\left(k_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}\right) + p_{n-1}}{q_n\left(k_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}\right) + q_{n-1}} = \frac{(k_n p_n + p_{n-1})x_{n+1} + p_n}{(k_n q_n + q_{n-1})x_{n+1} + q_n}.$$

したがって，数学的帰納法によって (6) は正しいことが証明された．さらに，

$$\begin{cases} p_{n+1} = k_n p_n + p_{n-1}, & p_1 = k_0,\ p_2 = k_0 k_1 + 1, \\ q_{n+1} = k_n q_n + q_{n-1}, & q_1 = 1,\ q_2 = k_1 \end{cases} \tag{7}$$

が成り立つことがわかった．等式 (7) より，

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$$

がわかる．これを繰り返して用いれば，

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-2}(p_2 q_1 - p_1 q_2) = (-1)^n \tag{8}$$

を得る．さらに，(7), (8) から

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = k_n(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^{n-1} k_n \tag{9}$$

を得る．(5), (6) から，

$$\frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\ddots\ \cfrac{1}{k_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}.$$

これは，変数 x_n についての恒等式であるから，$x_n \longrightarrow \infty$ として，

$$\frac{p_n}{q_n} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{k_{n-2} + \cfrac{1}{k_{n-1}}}}}}$$

を得る．$\frac{p_n}{q_n} = [k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}]$ と表す．(8) から，$\frac{p_n}{q_n}$ は既約分数であることがわかる．さらに，

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x \tag{10}$$

であることが示される．これを x の**連分数展開**といい，

$$x = [k_0, k_1, k_2, \ldots]$$

とかく．

例 3.1. $x = \sqrt{2}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
x_0 &= \sqrt{2}, \quad k_0 = [\sqrt{2}] = 1, \\
x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1, \quad k_1 = [\sqrt{2} + 1] = 2, \\
x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \sqrt{2} + 1, \quad k_2 = [\sqrt{2} + 1] = 2, \\
\cdots & \quad \cdots \\
x_n &= \sqrt{2} + 1, \quad k_n = 2.
\end{aligned}$$

したがって，$\sqrt{2}$ は循環する連分数

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, \ldots] = [1, \dot{2}]$$

として表せる．有理数を連分数展開すれば，ユークリッドの互除法によって，有限連分数になる．$\sqrt{2}$ は循環する無限連分数に展開されたから，$\sqrt{2}$ は有理数ではなく，無理数である．(7) より，

$$p_1 = 1,\ p_2 = 3,\ p_3 = 7,\ p_4 = 17,\ p_5 = 41,\ p_6 = 99, \ldots$$

$$q_1 = 1,\ q_2 = 2,\ q_3 = 5,\ q_4 = 12,\ q_5 = 29,\ q_6 = 70, \ldots$$

である．

$$\frac{1}{1} = 1,\ \frac{3}{2} = 1.5,\ \frac{7}{5} = 1.4,\ \frac{17}{12} = 1.416\cdots,\ \frac{41}{29} = 1.413\cdots,\ \frac{99}{70} = 1.4142\cdots\ \ldots$$

である．

4　2次無理数

$\sqrt{2}$ のように整数係数の 2 次方程式の根になっているような無理数を 2 **次無理数**という．2 次無理数は循環連分数で表せることを説明しよう．

m を 2 以上の自然数で，自然数の平方では割り切れないとする．m を 4 で割ったときの余りが 1 のとき，$D = m$ とおき，m を 4 で割ったときの余りが 2 または 3 のとき，$D = 4m$ とおく．$X(D)$ によって，判別式 D の整数係数 2 次方程式の大きい方の根であるような 2 次無理数全体の集合を表す．$\alpha \in X(D)$ とすれば，α は 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \text{ は整数 }, a > 0,\ b^2 - 4ac = D$$

の大きい方の根である．この 2 次方程式のもう一つの根を α' とする．

$$R(D) = \{\alpha \in X(D) \,|\alpha > 1, -1 < \alpha' < 0\}$$

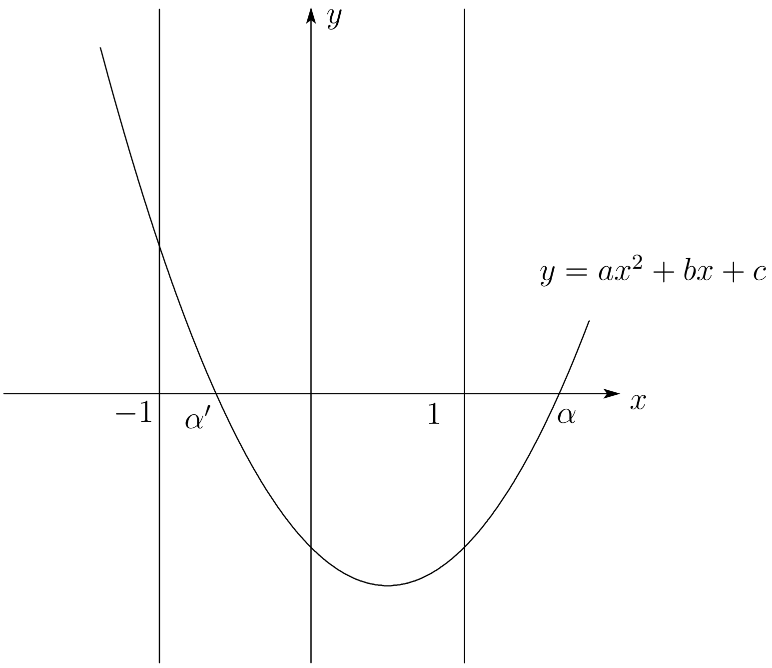
とおく．$\alpha \in R(D)$ とし，$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ を α の満たす判別式 D, $a > 0$ の整数係数 2 次方程式とする．そのとき，2 次関数 $y = f(x)$ のグラフから，$\alpha > 1$, $-1 < \alpha' < 0$ であるための必要十分条件は，

$$f(0) = c < 0, \quad f(-1) = a - b + c > 0, \quad f(1) = a + b + c < 0 \tag{11}$$

である．これから，$a > 0, b < 0, c < 0$ がわかる．さらに，

$$D = b^2 - 4ac = b^2 + 4a|c| > b^2, \quad D = b^2 - 4ac = b^2 + 4a|c| > 4a|c|$$

より，$-\sqrt{D} < b < 0, 0 < a|c| < \frac{D}{4}$ がわかる．a, b, c は整数であるから，このような a, b, c の組は有限個である．したがって，$R(D)$ は有限集合である．



今，$\alpha \in R(D)$ として，

$$k = [\alpha], \quad \beta = \frac{1}{\alpha - k}$$

とおく．そのとき，$\beta \in R(D)$ であることを示そう．$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ を α の満たす判別式 D, $a > 0$ の整数係数 2 次方程式とすると，$\alpha = k + \dfrac{1}{\beta}$ より，

$$a\left(k + \frac{1}{\beta}\right)^2 + b\left(k + \frac{1}{\beta}\right) + c = 0,$$

$$(ak^2 + bk + c)\beta^2 + (2ak + b)\beta + a = 0.$$

したがって，

$$g(x) = (ak^2 + bk + c)x^2 + (2ak + b)x + a$$

とおけば，$g(x)$ の判別式は

$$(2ak + b)^2 - 4(ak^2 + bk + c)a = b^2 - 4ac = D$$

である．

$$g\left(\frac{1}{\alpha' - k}\right) = \frac{a(\alpha')^2 + b\alpha' + c}{(\alpha' - k)^2} = 0$$

であるから，$g(x) = 0$ の根は

$$\beta = \frac{1}{\alpha - k}, \quad \beta' = \frac{1}{\alpha' - k}$$

である．$0 < \alpha - k = \alpha - [\alpha] < 1$ であるから，$\beta = \dfrac{1}{\alpha - k} > 1$ である．$-1 < \alpha' < 0$, $k = [\alpha] \geq 1$ であるから，$\alpha' - k < -1$，したがって，$-1 < \beta' = \dfrac{1}{\alpha' - k} < 0$ である．ゆえに，$\beta \in R(D)$ である．

$\alpha \in R(D)$ を連分数展開する．

$$\alpha_0 = \alpha, \quad k_i = [\alpha_i], \quad \alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - k_i}$$

である．そのとき，上で示したように各 α_i は $R(D)$ の元であり，$R(D)$ は有限集合であるから，ある番号 $\ell > 0$, $n \geq 1$ が存在して，

$$\alpha_{n+\ell} = \alpha_n$$

が成り立つ．これから，逆向きに戻って，$\alpha_{n+\ell-1} = \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_\ell = \alpha_0 = \alpha$ となることがわかる．実際，

$$\alpha_{n+\ell-1} = k_{n+\ell-1} + \frac{1}{\alpha_{n+\ell}}, \quad \alpha_{n-1} = k_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}$$

であるから，$\alpha_{n+\ell} = \alpha_n$ より，

$$\alpha_{n+\ell-1} - \alpha_{n-1} = k_{n+\ell-1} - k_{n-1}.$$

これから，

$$\alpha'_{n+\ell-1} - \alpha'_{n-1} = k_{n+\ell-1} - k_{n-1}.$$

ここで，$\alpha_{n+\ell-1}$, α_{n-1} ともに，$R(D)$ の元であるから，$-1 < \alpha'_{n+\ell-1} < 0$, $-1 < \alpha'_{n-1} < 0$ である．よって，

$$|k_{n+\ell-1} - k_{n-1}| = |\alpha'_{n+\ell-1} - \alpha'_{n-1}| < 1$$

である．この左辺は整数であるから，$k_{n+\ell-1} = k_{n-1}$ でなければならない．したがって，$\alpha_{n+\ell-1} = \alpha_{n-1}$ を得る．これを繰り返せば，$\alpha_{n+\ell-1} = \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_\ell = \alpha_0 = \alpha$ を得る．結局，$\alpha_{i+\ell} = \alpha_i$, $k_{i+\ell} = k_i$ がすべての i について成り立つ．したがって，α は循環する連分数展開を持つ．

$$\alpha = [\dot{k}_0, \ldots, \dot{k}_{\ell-1}].$$

このように，$R(D)$ に属する 2 次無理数は純循環連分数展開を持つ．もっと一般に，次の定理が成り立つ．

定理 4.1 (ラグランジュの定理). 2 次無理数は循環連分数で表せる．逆に，循環連分数で表せる実数は 2 次無理数である．

例 4.2. $m = 29$, $D = m = 29$ とする．整数の組 (a, b, c) は $b^2 - 4ac = 29$, $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ を満たすとする．そのとき，b は奇数であるから，$b^2 + 4a|c| = 29$ より，$b = -1, -3, -5$ である．$b = -1$ のとき，(a, b, c) は

$$(1, -1, -7),\ (7, -1, -1),$$

$b = -3$ のとき，

$$(1, -3, -5),\ (5, -3, -1),$$

$b = -5$ のとき，$(1, -5, -1)$ である．これらのうち，$a - b + c > 0$, $a + b + c < 0$ を満たすものは，$(1, -5, -1)$ だけである．したがって，

$$R(29) = \left\{ \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \right\}$$

である．$\alpha = \alpha_0 = \dfrac{5 + \sqrt{29}}{2}$ を連分数展開する．

$$k_0 = [\alpha_0] = 5, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - 5} = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} = \alpha_0.$$

したがって，$\dfrac{5 + \sqrt{29}}{2} = [\dot{5}]$ である．

例 4.3. $m=19,\ D=4m=76$ とする．整数の組 (a,b,c) は，$b^2-4ac=76,\ a>0,\ b<0,\ c<0$ を満たすとする．そのとき，b は偶数であるから，$b=2b'$ とかく．$(b')^2+a|c|=19$ より，$b'=-1,-2,-3,-4$ である．$b'=-1$ のとき，(a,b,c) は

$$(1,-2,-18),\ (2,-2,-9),\ (3,-2,-6),\ (6,-2,-3),\ (9,-2,-2),\ (18,-2,-1),$$

$b'=-2$ のとき，

$$(1,-4,-15),\ (3,-4,-5),\ (5,-4,-3),\ (15,-4,-1),$$

$b'=-3$ のとき，

$$(1,-6,-10),\ (2,-6,-5),\ (5,-6,-2),\ (10,-6,-1),$$

$b'=-4$ のとき，

$$(1,-8,-3),\ (3,-8,-1)$$

である．これらのうち，$a-b+c>0,\ a+b+c<0$ を満たすものは，

$$(3,-4,-5),\ (5,-4,-3),\ (2,-6,-5),\ (5,-6,-2),\ (1,-8,-3),\ (3,-8,-1)$$

の 6 つである．したがって，

$$R(76)=\left\{\frac{2+\sqrt{19}}{3},\ \frac{2+\sqrt{19}}{5},\ \frac{3+\sqrt{19}}{2},\ \frac{3+\sqrt{19}}{5},\ 4+\sqrt{19},\ \frac{4+\sqrt{19}}{3}\right\}.$$

これらの連分数展開を計算しよう．$\alpha=\alpha_0=4+\sqrt{19}$ とする．

$$\begin{aligned}
k_0&=[\alpha_0]=8, & \alpha_1&=\frac{1}{\alpha_0-8}=\frac{4+\sqrt{19}}{3},\\
k_1&=[\alpha_1]=2, & \alpha_2&=\frac{1}{\alpha_1-2}=\frac{2+\sqrt{19}}{5},\\
k_2&=[\alpha_2]=1, & \alpha_3&=\frac{1}{\alpha_2-1}=\frac{3+\sqrt{19}}{2},\\
k_3&=[\alpha_3]=3, & \alpha_4&=\frac{1}{\alpha_3-3}=\frac{3+\sqrt{19}}{5},\\
k_4&=[\alpha_4]=1, & \alpha_5&=\frac{1}{\alpha_4-1}=\frac{2+\sqrt{19}}{3},\\
k_5&=[\alpha_5]=2, & \alpha_6&=\frac{1}{\alpha_5-2}=4+\sqrt{19}=\alpha_0.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
4+\sqrt{19}&=[\dot{8},2,1,3,1,\dot{2}], & \frac{4+\sqrt{19}}{3}&=[\dot{2},1,3,1,2,\dot{8}],\\
\frac{2+\sqrt{19}}{5}&=[\dot{1},3,1,2,8,\dot{2}], & \frac{3+\sqrt{19}}{2}&=[\dot{3},1,2,8,2,\dot{1}],\\
\frac{3+\sqrt{19}}{5}&=[\dot{1},2,8,2,1,\dot{3}], & \frac{2+\sqrt{19}}{3}&=[\dot{2},8,2,1,3,\dot{1}]
\end{aligned}$$

である．

例 4.4. $m=10,\ D=4m=40$ とする．整数の組 (a,b,c) は，$b^2-4ac=40,\ a>0,\ b<0,\ c<0$ を満たすとする．そのとき，b は偶数であるから，$b=2b'$ とかく．$(b')^2+a|c|=10$ より，$b'=-1,-2,-3$ である．$b'=-1$ のとき，(a,b,c) は

$$(1,-2,-9),\ (3,-2,-3),\ (9,-2,-1),$$

$b'=-2$ のとき，

$$(1,-4,-6),\ (2,-4,-3),\ (3,-4,-2),\ (6,-4,-1),$$

$b'=-3$ のとき，$(1,-6,-1)$ である．これらのうち，$a-b+c>0,\ a+b+c<0$ を満たすものは，

$$(3,-2,-3),\ (2,-4,-3),\ (3,-4,-2),\ (1,-6,-1)$$

の 4 つである．したがって，

$$R(40)=\left\{\frac{1+\sqrt{10}}{3},\ \frac{2+\sqrt{10}}{2},\ \frac{2+\sqrt{10}}{3},\ 3+\sqrt{10}\right\}.$$

これらの連分数展開を計算しよう．$\alpha=\alpha_0=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
k_0&=[\alpha_0]=1, \quad \alpha_1=\frac{1}{\alpha_0-1}=\frac{2+\sqrt{10}}{2},\\
k_1&=[\alpha_1]=2, \quad \alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-2}=\frac{2+\sqrt{10}}{3},\\
k_2&=[\alpha_2]=1, \quad \alpha_3=\frac{1}{\alpha_2-1}=\frac{1+\sqrt{10}}{3}=\alpha_0.
\end{aligned}$$

これから，

$$\frac{1+\sqrt{10}}{3}=[\dot{1},2,\dot{1}],\ \frac{2+\sqrt{10}}{2}=[\dot{2},1,\dot{1}],\ \frac{2+\sqrt{10}}{3}=[\dot{1},1,\dot{2}]$$

を得る．$\beta=\beta_0=3+\sqrt{10}$ とおけば，

$$h_0=[\beta_0]=6, \quad \frac{1}{\beta_0-6}=\frac{1}{-3+\sqrt{10}}=3+\sqrt{10}=\beta.$$

これから，$3+\sqrt{10}=[\dot{6}]$ である．このように，$R(40)$ の 4 つの数は，連分数展開によって *2* つのグループに分かれる．

このように，$R(D)$ の数は連分数展開によって，いくつかのグループに分けられる．各グループは，一つの 2 次無理数からスタートして，それを次々に整数部分を引いて逆数をとるという操作によって移りあうサイクルになっている．

このグループの個数を $h(D)$ とかき，**類数**と呼ぶ．例でみたように，$h(29)=1,\ h(76)=1,\ h(40)=2$ である．ガウスは $h(D)=1$ となる D が無数に存在するであろうと予想したが，これは現在でも未解決の問題である．

5　ペル方程式の整数解

平方因数を持たない 2 以上の自然数 m が与えられているとする．そのとき，連分数を用いて，ペル方程式と呼ばれる不定方程式

$$x^2 - my^2 = \pm 1 \tag{12}$$

の整数解が求められることを説明しよう．簡単のために，m を 4 で割ったときの余りは，2 または 3 であるとする．$D = 4m$ とおく．$\alpha \in R(D)$ をとる (例えば，$\alpha = [\sqrt{m}] + \sqrt{m}$)．既に示したように，α は純循環連分数で表せる．

$$\alpha = [\dot{k}_0, \ldots, \dot{k}_{n-1}].$$

$\alpha = [k_0, \ldots, k_{n-1}, \alpha]$ であるから，

$$\alpha = \frac{p_n\alpha + p_{n-1}}{q_n\alpha + q_{n-1}} \tag{13}$$

である．ここで，$\dfrac{p_n}{q_n} = [k_0, \ldots, k_{n-1}]$ である．(13) の分母を払って整理すれば，

$$q_n\alpha^2 + (q_{n-1} - p_n)\alpha - p_{n-1} = 0.$$

すなわち，α は 2 次方程式

$$q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1} = 0 \tag{14}$$

の根である．この 2 次方程式の判別式は，

$$\begin{aligned}(q_{n-1} - p_n)^2 - 4q_n(-p_{n-1}) &= q_{n-1}^2 + p_n^2 - 2p_nq_{n-1} + 4p_{n-1}q_n \\ &= (p_n + q_{n-1})^2 - 4(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n) \\ &= (p_n + q_{n-1})^2 - 4(-1)^n.\end{aligned}$$

一方，$\alpha \in R(D)$ であるから，α は整数係数の判別式 $D = 4m$ の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad b^2 - 4ac = 4m$$

の根である．これを整数倍したものが (14) であるから，整数 y が存在して，

$$q_n = ay, \quad (q_{n-1} - p_n) = by, \quad -p_{n-1} = cy$$

である．そのとき，(14) の判別式は，

$$(p_n + q_{n-1})^2 - 4(-1)^n = y^2(b^2 - 4ac) = 4my^2$$

である．これから，$p_n + q_{n-1}$ は偶数であることがわかり，$p_n + q_{n-1} = 2x$, x は整数とかけば，$4x^2 - 4(-1)^n = 4my^2$, すなわち，

$$x^2 - my^2 = (-1)^n$$

を得る．

例 5.1. $m=19$ とする．$\alpha = 4+\sqrt{19}$ を連分数展開すれば，$\alpha = [\dot{8}, 2, 1, 3, 1, \dot{2}]$ であった．(7) を用いて，$p_i,\ q_i,\ 1 \le i \le n = 6$ を計算すると，

$$p_1 = 8,\ p_2 = 17,\ p_3 = 25,\ p_4 = 92,\ p_5 = 117,\ p_6 = 326,$$
$$q_1 = 1,\ q_2 = 2,\ q_3 = 3,\ q_4 = 11,\ q_5 = 14,\ q_6 = 39$$

である．$\alpha = 4+\sqrt{19}$ の満たす 2 次方程式は

$$x^2 - 8x - 3 = 0$$

であるから，$a=1$．したがって，$x = \dfrac{p_6+q_5}{2} = 170,\ y = \dfrac{q_6}{a} = 39$ はペル方程式

$$x^2 - 19y^2 = 1$$

の整数解である．一般に，ペル方程式は無数の整数解を持つ．上のペル方程式の一般解は，

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 170x_n + 741y_n, \\ y_{n+1} &= 39x_n + 170y_n, \quad x_0 = 1,\ y_0 = 0 \end{aligned}$$

によって，数列 $\{x_n\},\ \{y_n\}$ を定めるとき，$(\pm x_n, \pm y_n)$ で与えられる．

A　補題 2.1 の証明

整数 a を自然数 b で割ったときの商を q，余りを r とすれば，

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b$$

とかける．$m = \gcd(a,b),\ n = \gcd(b,r)$ とおく．$a = ma',\ b = mb',\ a', b'$ は整数とかけるから，

$$r = a - bq = m(a' - b'q)$$

である．よって，m は b と r の公約数である．$n = \gcd(b,r)$ より，$m \le n$ である．同様に，$b = nb'',\ r = nr'',\ b'', r''$ は整数とかけるから，

$$a = n(b''q + r'')$$

である．よって，n は a と b の公約数である．$m = \gcd(a,b)$ より，$n \le m$ である．ゆえに，$m = n$ である．　$\square$

B　連分数展開の収束の証明

(10) を証明しよう．$y_n = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}] = \dfrac{p_n}{q_n}$ とおく．$n \geq 1$ について，k_n は自然数であるから，(7) から，$\{q_n\}$ は自然数からなる数列であり，

$$1 = q_1 < q_2 \cdots < q_{n-1} < q_n < \cdots$$

を満たすことがわかる．(9) より，

$$y_n - y_{n-2} = (-1)^{n-1} \frac{k_n}{q_n q_{n-2}}.$$

したがって，$y_{2n} - y_{2n-2} < 0$, $y_{2n+1} - y_{2n-1} > 0$ である．また，(8) より，

$$y_n - y_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}.$$

したがって，$y_{2n} > y_{2n-1}$ である．以上によって，

$$y_1 < y_3 < \cdots < y_{2n-3} < y_{2n-1} < y_{2n} < y_{2n-2} < \cdots < y_4 < y_2,$$

$$\lim_{n \to \infty} |y_{2n} - y_{2n-1}| = 0$$

であることが示された (これから，$\lim_{n \to \infty} y_n$ が存在することもわかる)．最後に $\lim_{n \to \infty} y_n = x$ であることを示そう．$x_n \geq [x_n] = k_n$, $q_n x_n + q_{n-1} \geq k_n q_n + q_{n-1} = q_{n+1}$ に注意すれば，

$$|y_n - x| = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n (q_n x_n + q_{n-1})} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2} \tag{15}$$

であるから，$y_{2n} < x < y_{2n+1}$ であり，$\lim_{n \to \infty} y_n = x$ であることが示された．□

C　ラグランジュの定理の証明

ラグランジュの定理 (4.1) を証明しよう．α を 2 次無理数とする．α の満たす整数係数の 2 次方程式を

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \text{ は整数},\ a, b, c \text{ の最大公約数は } 1$$

とする．α を連分数展開する．

$$\alpha_0 = \alpha, \quad k_i = [\alpha_i], \quad \alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - k_i}$$

とする．さらに，$\dfrac{p_n}{q_n} = [k_0, k_1, \dots, k_{n-1}]$ とする．そのとき，

$$\alpha = \frac{p_n \alpha_n + p_{n-1}}{q_n \alpha_n + q_{n-1}}$$

である．したがって

$$a\left(\frac{p_n\alpha_n+p_{n-1}}{q_n\alpha_n+q_{n-1}}\right)^2+b\left(\frac{p_n\alpha_n+p_{n-1}}{q_n\alpha_n+q_{n-1}}\right)+c=0.$$

これを分母を払って整理すれば，α_n は次の 2 次方程式を満たすことがわかる．

$$A_nx^2+B_nx+C_n=0. \tag{16}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
A_n &= ap_n^2+bp_nq_n+cq_n^2,\\
B_n &= 2ap_np_{n-1}+b(p_nq_{n-1}+p_{n-1}q_n)+2cq_nq_{n-1},\\
C_n &= ap_{n-1}^2+bp_{n-1}q_{n-1}+cq_{n-1}^2
\end{aligned}$$

とおいた．(8) を用いれば，2 次方程式 (16) の判別式は

$$B_n^2-4A_nC_n=b^2-4ac$$

であることがわかる．(15) より，

$$p_n=\alpha q_n+\frac{\delta_n}{q_n},\quad |\delta_n|<1$$

と表せる．これから，

$$\begin{aligned}
A_n &= a\left(\alpha q_n+\frac{\delta_n}{q_n}\right)^2+bq_n\left(\alpha q_n+\frac{\delta_n}{q_n}\right)+cq_n^2\\
&= (a\alpha^2+b\alpha+c)q_n^2+2a\alpha\delta_n+a\left(\frac{\delta_n}{q_n}\right)^2+b\delta_n\\
&= 2a\alpha\delta_n+a\left(\frac{\delta_n}{q_n}\right)^2+b\delta_n.
\end{aligned}$$

したがって，

$$|A_n|\le 2|a||\alpha|+|a|+|b|.$$

同様にして，

$$|C_n|\le 2|a||\alpha|+|a|+|b|.$$

さらに，

$$B_n^2=4A_nC_n+b^2-4ac\le 4(2|a||\alpha|+|a|+|b|)^2+|b^2-4ac|.$$

これから，整数の組 (A_n,B_n,C_n) は有限個の可能性しかないことがわかり，2 次方程式 (16) の根 α_n は有限個の可能性しかないことがわかる．したがって，ある番号 $\ell>0,\, n\ge 1$ が存在して，

$$\alpha_{n+\ell}=\alpha_n$$

が成り立つ．すなわち，α は循環連分数で表せる．逆に，実数 α が循環連分数で表せるとする．$\alpha = [k_0, \ldots, k_{n-1}, \dot{h}_0, \ldots, \dot{h}_{m-1}]$ とする．

$$\alpha = [k_0, \ldots, k_{n-1}, \alpha_n], \quad \alpha_n = [h_0, \ldots, h_{m-1}, \alpha_n]$$

であるから，

$$\alpha = \frac{p_n \alpha_n + p_{n-1}}{q_n \alpha_n + q_{n-1}}, \quad \alpha_n = \frac{p'_m \alpha_n + p'_{m-1}}{q'_m \alpha_n + q'_{m-1}}$$

である．これから，α_n は 2 次無理数であり，したがって，α も 2 次無理数であることがわかる．□

参考文献

[1] 草場公邦，整数論，日本放送出版協会，1974.

[2] 和田秀男，数の世界:整数論への道，岩波書店，1981.