

平成21年6月8日現在

研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18500657
 研究課題名(和文) 割合的アイデアと比例的推論を基礎とした小学校高学年における算数カリキュラムの開発
 研究課題名(英文) Development of Mathematical Learning Activities for 4th, 5th, and 6th Graders Based on Proportional Ideas and Reasoning
 研究代表者：布川 和彦 (NUNOKAWA KAZUHIKO)
 上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授
 研究者番号：60242468

研究成果の概要：

児童が自然に持っている比例的推論を適当な外的表象を利用して自覚化し、意図的に利用できるようにした上で、割合概念の学習をこのベースの上に導入することで、程度を表現するある種の量として割合を導入することが可能となった。またそうした導入の結果として、単元の後半でも量的な感覚に依拠して自分の思考を制御しながら学習を進めることができ、さらに次年度の関連した内容の学習においても、同様の学習の様相が見られた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	660,000	3,760,000

研究分野：数学教育学

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学 科学教育

キーワード：算数教育、比例的推論、割合、学習活動系列、学習過程

1. 研究開始当初の背景

小学校高学年で学習する内容には、乗除法により意味づけられる場面を扱うもの、いわゆる乗法構造の場面が多く含まれている。これらの内容に対して児童が学習につまずくとされることも多く、ひいては中学校での数学嫌いの一因になるとも考えられる。実際、割合の計算を公式に沿って行えるものの、その意味を理解しておらず、文章題などで題意に明らかに沿わない誤答をしても気づかない児童が見受けられる。

図形の学習や低学年での加減法の学習では学習対象が目で見えて捉えられることが多

いのに対し、乗除法で意味づけられる場面では2量の関係という目で見えない対象を扱うことに、この困難の原因の一端があると考えられる。

しかし他方で、児童は倍概念に基づく、いわゆる比例定期推論については、インフォーマルな形ではあるが獲得していることが多いとも言われている。また、割合的な感覚についても、半分といった基本的なものは使用できることが多い。

これらの状況および知見を総合すると、児童が自然にインフォーマルに持っている比例的推論や割合的な感覚を引き出し、その延

長上に乗法構造に関わる学習を組み立てること、つまり、児童の持つインフォーマルな比例的推論をフォーマルなものとするという方針を基本として乗法構造の学習を構想することが、前述のような児童が直面する困難を緩和するための1つの手立てとなると考えられた。

2. 研究の目的

前項で述べた基本的な発想の下に、本研究は、小学校高学年の始まりである5年生に着目し、その算数カリキュラムの一部を、児童がインフォーマルに持っている比例的推論や割合的なアイデアを基礎としながら、再構成すること、およびそのフォーマルな知識への移行を支えるような支援のあり方を明らかにすることを目的とするものである。

本研究では、小学校高学年をターゲットとしているが、しかし、そこでの学習を子どもたちにとってより効果的なものとするためには、小学校中学年から接続を考慮することが必要となる。割合や比例自体は小学校高学年で学習する内容であるが、割合的なアイデアや比例的推論は、単元としては明示的に取り上げられないものの、小学校2年生でかけ算を学習して以降、多くの場面で背後にある考え方として一定の役割を果たしている。しかし、そうした側面の発達をカリキュラムの中に意図的に組み込んだ扱いがされているとは言い難い状況である。例えば高学年への橋渡しとなる小学校4年生の乗除の学習では、筆算の習得に重きが置かれ、割合的なアイデアや比例的推論の発達は明示的には考慮されていないように見える。実際、小学校教師の多くから、中学年の学習でそうした側面が重要であることを意識していなかったと聞く場合が多い。

本研究では、代表者により以前から進められている小学校中学年における比例的推論の発達に関わる研究の成果も取り入れ、中学年段階においてインフォーマルに獲得しているであろう比例的推論をできるだけ自覚化させ、児童がより意識的、意図的に利用できるような素地を作っておく。そうした素地が醸成された児童に対して、高学年の学習内容を、この自覚化された比例的推論と、半分などを中心に児童が獲得しているインフォーマルな割合的なアイデアとを組み合わせる形で再構成する。

このように、本研究では児童が乗法構造に関わり持つインフォーマルな知識を軸として、中学年から高学年へかけての接続について考察していくこととなるので、高学年の内容の再構成についての知見を得ることを目指すに留まらず、インフォーマルな比例的推論のフォーマル化という発想での、小学校算数カリキュラムの系列化に関わる知見を得

ることも目指されることとなる。

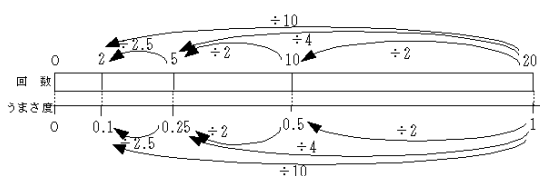
3. 研究の方法

研究は3年間の研究期間において、同一の学校の児童を学年を追って対象として行われた。すなわち、初年度4年生であった児童集団が第2年度に5年生になったときに、彼らに対して5年生の学習内容についての授業を実施し、さらに第3年度に6年生になったときに、彼らに対して6年生の学習内容についての授業を実施した。なお4年生～5年生で対象としたクラスが6年生の進級時にクラス替えを行い、そこに所属していた児童たちが2つのクラスに分かれてしまったため、6年生の際にはそれら2つのクラスに対して同じ授業を実施することとした。

目的に述べたように、本研究では児童がインフォーマルに持っている比例的推論をベースとして高学年の乗法構造の学習を考えることを基本的な発想としていた。そこで、初年度の対象である4年生では、教科書の内容にないものの、児童の比例的推論を自覚化させ、より意識的、意図的に利用できるような学習活動をデザインした。そのために、第一に対象となる児童が3年生の時点で実施した授業の分析を行い、彼らの比例的推論の様相を検討した。第二に、児童のインフォーマルな比例的推論でも十分に組みこめる単純な整数倍を利用する乗法構造の場面から学習を始めながら、最後には、与えられた単位を何分の一かをして下位単位を構成する必要のある場面へと学習活動系列を構成した。このように系列を構成することで、徐々に意識的、意図的に比例的推論を利用しなければならない状態を作り出し、またその中に自分が何気なく利用している比例的推論を振り返る契機にしようと考えたものである。第三に、自分の比例的推論を振り返り自覚化することを促すために、自分の比例的推論を表現するための外的表象を導入した。具体的には高学年の学習で用いられる二重数直線と類似な表象を“倍々図”という名称で利用した。このとき、代表者のグループにより以前の研究で行われた小学校中学年での調査の結果を取り入れ、数量どうしの関係に注意が向けられるように、問題場面の数量関係を表した外的表象に対して、学習者自身が書き込みをするといった働きかけを大切に扱うようにした。

第5学年では、割合的なアイデアが直接的に扱われる「割合」単元を題材として実験授業を行った。ここで、対象となった児童たちが4年生の段階で比例的推論をある程度自覚化するという経験を経ていることを前提に、比例的推論を利用して割合を導入するような単元のデザインを行った。具体的には、割合概念の導入にあたり、教科書などで行われ

てきた単位あたり量の発想に基づく導入ではなく、同一のもとにする量の下での比べられる量の程度を表す数値を“うまさ度”として導入し、児童が持っている比例的推論と半分などについての素朴な割合的アイデアを利用しながら、様々な量についてのうまさ度を求めるという形で割合を導入した。またこうした比例的推論の利用を意識的、意図的に行えるようにするために、4年生で利用したのと類似の外的表象を“割合メーター”と称して導入し、児童が様々な量についてのうまさ度を求める活動を促すことを試みた（下図参照）。



こうした導入では、上述したような意図の他に、次のような利点も期待されていた：児童の利用していた教科書での割合の定義と視覚的なイメージの整合性；基準を示す1が導入時から図に明示的に現れており、割合の理解が困難な理由の1つとされる1の見えにくさが軽減される；単元後半で割合の3用法を学習する際に用いられる図と導入の図が類似なものとなり、単元での表象の連続性が保たれる。

5年生の学習においても、4年生の学習と同様に、外的表象への働きかけが重視された。これは2つの形で授業のデザインに取り入れられた。第一には、上図に見られるように、量や割合の数値間の乗法的関係について、それらの量を結ぶ弧状の矢印とその関係を表す演算を割合メーターの中に書き込むことを推奨した。これにより、当該の量に対する関連づけという操作を学習者自身が自覚化できることを期待した。第二に、比べられる量や割合を割合メーター上にとる際に、動的な扱いを単元を通して心がけた。例えば8回を上図に記入する場合、教師が0から指でなぞり、適当な位置まで来たら「ストップ」と言わせるようにした。これは、児童が表象を見る際にも、程度のイメージをそこに投影するという操作を行いながら見ることを促すためであった。

5年生では単元後半でも導入時の程度のイメージを一貫して保持し、表象に対する操作を行いながら割合の3用法を学習できるようにし、また帯グラフや円グラフも割合メーターとの関連の中で学習できるように学習活動系列を工夫した。

6年生では、やはり割合的アイデアが直接扱われる「倍と割合」の学習を取り上げ、本

研究において再構成した5年生の学習を視野に入れ、以前より利用している外的表象（割合メーター）を媒介としながら、全体に対する部分の程度という割合の当初の意味づけを、一方の量に対する他方の量の程度（2つの独立した量の比較）へと拡張するようにした。なお量的な感覚を保持することを意図し、6年生でも教師の説明時を中心に割合メーターの動的な扱いは行った。ただし上述のようにクラス替えの結果として、児童の半数は5年次に本研究の授業を受けていなかったことから、割合メーターへの書き込みについては教師の説明時には一貫して行ったものの、児童による解決時には特に指示をせず、児童の判断に任せることとした。

以上の4～6年生の授業について、実施した全時間の授業の様子を、教室の後方と前方からの2台ビデオにより記録した。さらに5名の抽出児童に協力頂き、彼らの学習過程をそれぞれ1台ずつのビデオカメラにより記録した。5名中4名の児童の学習過程は4～6年間の3年間に渡り記録したが、4年次に協力してくれた1名の児童は5年進級時に転校してしまつたため、5～6年は別の児童1名の学習過程を記録した。なお、6年進級時のクラス替えに伴い、5名の抽出児童が2つのクラスに2名と3名で別れて所属することとなったが、研究の継続性を考え、5年次と同じ5名の児童の学習過程を記録することとした。

授業者は4年生、5年生においては、現職の小学校教員で本学大学院に派遣されていた大学院生があたり、いずれの学年でも2名の大学院生がティームティーチング形式で授業を行った。授業の計画は代表者とこれらの授業者で行い、各時間の終了後にミーティングを持って、その時間の児童の様子を見ながら次時の計画の修正を行った。6年生では2つのクラスでの実施が必要ということもあり、それぞれのクラスの担任に授業をお願いした。そのため、授業の計画は代表者が基本的に作成し、それを協力校の算数担当の教員に検討してもらった上で、事前に授業者と打ち合わせを行って実施をしてもらうという形をとった。

4. 研究成果

4年生では外的表象（倍々図）に対する操作を重視しながら、彼らがインフォーマルに持つ比例的推論の自覚化を促すことにより、数量間の乗法構造に注意を向けることができるようになり、例えば、28個分の値段から4個分の値段を求めるといった課題でも、単価を経由せずに、28と4の乗法関係に着目して求めることができるようになった。しかし他方で、30本分の重さから100本分重さを求めるといった数量間の乗法関係が整数倍

になっておらず、10本分の重さといった下位単位を自分で構成する必要のある課題には困難を示す児童がほとんどであった。

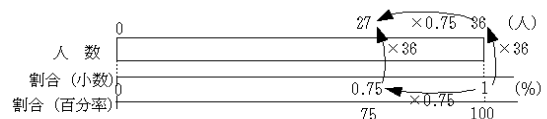
このように外的表象を用いて比例的推論をある程度意図的、意識的に利用できるようになった児童に対して、前項で述べたように比例的推論との接続を念頭おいて再構成した割合の学習活動系列を実施したところ、比例的推論を用いながら割合を生成することができ、またその結果として量的な感覚を持ちながら割合の学習を進めることができた。特に抽出児の学習過程を詳細に分析した結果として、次のような特徴が見られた。

(1) 割合が程度を表現する量であるとの感覚を持ちながら割合概念を形成することで、その感覚に基づいて自分の理解を修正・拡張することが可能となる。例えば、程度としての割合を2時間学習した後に、2つのジュースの濃さを比較する課題を出した際、それまでの場面との違いから加法方略を用いる児童が少なからず見られた。加法方略を用いた抽出児の学習過程を分析すると、途中で割合メーターに2つのジュースの濃さを表現してみることで、濃さの“程度”の量的感覚から加法方略の不適切さに気づき、自分から割合による比較へと修正できた。また同じ抽出児は1倍を越える割合が初めて出てきた際に違和感を感じる様子を見せていたが、途中で問題場面の量を割合メーターに表現し、しかもその際に問題には直接与えられていない「2倍」の割合とそれに対応する量を自ら導入して同じ割合メーター上にとることによって、1.25倍という割合を自分の理解のネットワークに位置づけることができた。

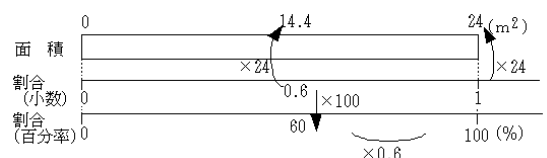
(2) 量的な感覚を持ちながら学習を進めることは、割合を求める場面や割合を含む文章題を考える場面（つまり割合の3用法の利用）においても、自分なりの意味づけに基づいた考え方の修正や吟味を可能としていた。抽出児のビデオ記録を分析してみると、割合メーターの上に数値をとる際に、線分の長さが基準量に対しておおよそ当該の量ある割合となるように意識してかく様子が、単元を通して観察された。例えば1人の抽出児の場合、第2時で $15 \div 75 = 0.2$ を計算した後で割合メーターに15人を記入する際、0.2として適切な位置にこの人数をかいていた。こうした様子は単元の多くの時間で見られ、割合単元の最終の授業で15mに対する12mの割合を求める際にも、12mの位置をかき直してまで0.8としてより適切な位置にしようとしていた。この抽出児童の場合、割合メーターの上に数値の相対的な関係を大切にかいていたが、その情報を利用して立式を選択する様子も見られた。例えば、第6時でくじ80本の5%を

求める際に、80本、100%、5%、0.05を割合メーターに記入し、その上で 80×5 と 80×0.05 を計算し、答えを4本と求めている。これは5%の位置に対応する本数として適当な4を与える式を選択したものと解釈された。第7時で□の24%が48dlであるときの□を求める際にも、割合メーターに数値を配置した後で 48×0.24 と $48 \div 0.24$ を計算して後者を選択した。確かにこうした立式は、他の抽出児に見られる（また教師が意図した）数値間の乗法関係をもとに立式を行うことに比べると十分に算数的とはいえない部分もあるが、公式の機械的な適用に比すれば乗法構造の意味に基づく思考とも解釈することができ、過渡的な推論として評価することができよう。

(3) 外的表象（割合メーター）上で数量間の乗法構造を自覚化することを通して割合を学習したことで、乗法構造をもつ場面に現れる4つの数量について、多面的な乗法関係により意味づけようとする様相が見られ、その結果、4量の1つとして導入された割合についても、そうした多面的な意味づけの中で理解されたり、求めようとされたりしていた。例えば、第7時前半の練習問題の1つであった36人の75%を求める問題で、1人の抽出児童は最初、1から36、0.75から27に向かう縦矢印をかき、「 $\times 36$ 」という乗法関係を割合メーターに表していた。しかし全体で解答についての確認をしている際にはここに、1から0.75、36から27に向かう横矢印をかき、「 $\times 0.75$ 」という乗法関係を加えた。こうした多面的な意味づ



けは、立式を納得するという点からも有用である様子が見られた。第5時で第2用法の初めての学習で 24m^2 の60%を考えた際に、前述の抽出児童は数値を割合メーターに配置をし、いくつかの計算をした後に、まず求めた14.4という答えの候補について、 $14.4 \div 24 = 0.6$ を確認して、これを答えとして選択していた。第1用法に相当する乗法関係がここでの理解を支えていたと考えられる。割合メーターで24と1の関係を吟味している中で、「あっ」と呟いて 0.6×24 を計算したことは、0.6を乗ずることや積の14.4が求める面積となることを、縦矢印



の逆により支持できたことを示していよう。

さらに100と60の関係を考える中で、これらの間に横矢印をかき「 $\times 0.6$ 」の関係としたことは、0.6を乗ずることを100から60への変換との関係でも捉えたことを意味する。このように4量の関係を多面的に意味づけることで、自信の持てなかった立式を自分の理解のネットワークの中に位置づけ、納得をすることが可能となっていた。

6年生の授業においては、割合の基本的な理解ができてきたこともあり、上述の多面的な意味づけをすることは減り、算数科で意図されている標準的な乗法関係に焦点をあてる子が多くなったが、外的表象が4量の乗法関係の自覚的な利用を促すことや、量的な感覚が割合の理解を助ける様子が観察された。6年生の学習では分数倍を新たに学び、分数を含む乗除の理解の曖昧さにより分数倍を含む割合の3用法での困難を生ずることがあるが、比例的推論の自覚化をベースにすることで、5年生のときと同様、考え方を自分で吟味したり修正したりすることが可能となっていた。

なお、今回の一連の実験授業とそこでの学習過程の分析を通して、次のような問題点も明らかとなった。

- (1) 4年生で下位単位を自分で構成する課題に困難が見られると述べたが、この比例的推論の学習の限界が高学年でも同様に現れた。そのため下位単位を経由して割合を求める考え方が予想していたよりも出現しにくかった。
- (2) 本研究では外的表象の役割が、わかっていることを表現する表現機能から、考える拠り所となる思考機能へ移行することを想定していたが、この移行が十分に生じない児童が見られた。1つの原因として、わかっていることを記入するため表現機能の段階で外的表象を積極的に構成しなくなる児童も多く、結果として、表現機能段階での経験が乏しくなり、思考機能に移行しにくかったのではないかと推測される。

今後はこうした問題点を回避するための手立てを考えることで、本研究で開発された学習活動系列をよりよいものとするのが課題となる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① 布川和彦. 比例的推論を利用した割合単元の構想と児童の学習過程. 上越数学教育研究. 第24号. pp. 1-12. 2009年. 査読無.
- ② 布川和彦. 算数の授業における小学校6

年生の問題解決過程についての一考察:初期の意味づけから離れる過程に着目して. 数学教育学論究. 第90号. pp. 19-39. 2008年. 査読有.

- ③ 布川和彦. 小学校3年生による比例的推論の課題の解決:下位単位の利用に焦点を当てて. 上越数学教育研究. 第22号. pp. 1-10. 2007年. 査読無.

[学会発表] (計3件)

- ① 布川和彦. 比例的推論を利用した割合の導入の試み. 日本数学教育学会. 2008年11月2日. 筑波大学.
- ② Nunokawa, K. & Fukuzawa, T. Operating on and understanding of problem situations in proving. International Congress on Mathematical Education. 2008年7月12日. Universidad Autónoma de Nuevo León, Mexico.
- ③ Nunokawa, K. Explanations in mathematical problem solving. The International Conference "Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives". 2006年11月3日. Essen, Germany.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

布川 和彦 (NUNOKAWA KAZUHIKO)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授
研究者番号: 60242468