上越数学教育研究, 第 18 号, 上越教育大学数学教室, 2003 年, pp.49-58.

全体論的な立場からの文字と式の単元構成について

岡崎　正和
上越教育大学

１．はじめに

中学校の文字式は、「数学」を明確に特徴づけるものであり、この学習の成否は、後の学習を大きく左右する。それは、「算数」のように「量の世界」を捉えるのでなく、負の数を含めた「数の間の関係性」を考察の対象にし、しかも個別的な数の関係でなく一般的関係を捉えるところに文字式の威力があり、また生徒の学習困難の源がある。すなわち、算数から数学への移行が、この単元では問題となる。

また、文字と式は特にそのアルゴリズム的な性格ゆえに、学習指導が原子論的・機械論的パラダイムに支配される傾向がある。このパラダイムでは「全体は独立した部分の総和からなり、部分の確実な実行・定着が全体の達成に繋がる」とする考えが根底にあり、そのためすべてを「細分化」して、一つ一つ積み上げていこうとする発想が生まれる。この考えは学校全体に蔓延しているという指摘もあるが(佐藤,1996)、算数・数学教育、その中でも文字と式の単元は、規則の暗記と練習による強化型の授業がなされる傾向にある。

しかし、個々の知識・技能は何のために学んでいるのか、それがどのように機能するのかを知らねば、有効には機能しないとする立場がある。J.Smuts が提唱した全体論（ホリズム）の立場(ミラー,1994)では、部分は全体との関連でしか存在し得えないものであるため、全体としての原理的把握が重要となる。この思想は、数学教育のみならず、社会や人間の心におけるエコロジー的視点へ通じており(平林,2001)、そうであるからこそ、数学教育が人間の営みに貢献する道筋が開かれているのだと理解することができよう。

本研究は主としてこの２つの視点、すなわち算数から数学への移行、及びホリスティックな思想の視点から、代数の導入過程に関する授業・単元の開発研究を行うものである。特に、文字と式の授業や単元がどのように組織されるかは、その中心をなしている。

文字と式の学習指導において、日本では画一的に、数の一般化の活動を通して文字を一般数として導入するが、文字の意味にしても文字が使われる文脈にしても、それに限ったことではない。一般的に言って、文字には一般数、未知数、変数の意味があり、それぞれの意味に適した文脈がある。最終的には文字を文脈にあわせて色々な意味で柔軟に使うことができることが目標となるが(Gray & Tall, 1994)、それを理解していく順序は必ずしも固定的ではない。近年 Bednarz らによる著書『代数へのアプローチ』(1996)においては、他のいくつかの代数の導入方法が述べられているが、その中でも主要な議論となっているのは「一般化の文脈で文字を一般数として導入する方法」と、「問題解決の文脈で文字を未知数として導入する方法」である。

一般性は文字の本質であるが、現在の日本の学習指導や教科書構成は、後述するように

問題点も指摘できる。その問題点を克服し、よりよい導入を開発することが一方において必要であるが、代案的なアプローチを準備することも一つの方向性として考えてよいであろう。既に岡崎(2001)は方程式に関する問題の解決を通して、生徒達が文字式や文字計算を生じさせた様相を、インタビュー調査から明らかにした。しかし、授業や教科書へと実現するには、さらにいくつか考察を経なければならない。例えば歴史発生的、認識論的、教授学的検討である。本稿ではそうした基礎的検討とともに、文字と式の単元を方程式に関わる文脈で展開する上での基本的な考え方や実践の方法について考察していく。

２．一般化としての代数の導入とその問題点

文字を一般化として導入する方法は日本で通常行われる方法であり、例えばマッチ棒を梯子状に並べていき、その本数を最終的に文字を用いて表すことが、その一例に当たる。

『代数へのアプローチ』における Mason (1996)の論文は、一般化として文字を導入する必要性を説いている。その背景には次のような理由がある(p.65)。

- 数学指導の中心は、生徒に数学的一般化の本性への感受性、そしてその逆に、特殊化への感受性に気づかせることである。
- 生徒は、文字を一般性として学習するのに、十分なレディネスを有している。
- 学校代数は、一般性を表現し、操るための言語である。
- 代数指導が成功するには、自然な代数的思考を喚起し、表現することへ注目する必要がある。

Mason は、一般化が数学の核心(heart)であるとともに、われわれの日常生活に根ざした人間の本質でもあり、従って数学教育の主要な役割はそれを意識させ、よりよい一般化の思考を育てることにあると主張する。この意味で文字式の学習指導の意義を捉えるならば、一般性として文字を導入することは重要であり、その意義を達成するように学習指導が組織されるべきであろう。

しかし日本の学習指導の現状には、いくつか問題点を指摘することができる。

まず、一般性として文字を導入する意義を生徒が実感しにくいという問題がある。例えば、正方形の梯子状に並べられたマッチ棒の数を、多様な解決方法の後に $3n + 1$ と表す指導がなされるが、これを文字で表した瞬間、「なぜ文字を使うのですか」と、生徒が問いかけてくる場合がある。例えば 100 番目までの数は、第２項、第３項などとの類推からすぐに $3 \times 100 + 1$ とすることができ、それらの数を総称して $3n + 1$ と呼ばざるを得ないような積極的な理由はない。そうしておけば n に色々な値を代入した時マッチの数がすぐ分かるというのは、教師だけの論理になる可能性がある。一般性は既に数学が分かっている人には大きな意義であるが、初学者の生徒には、その必要感が喚起されにくい。

第二に、場面と式との対応から来る問題がある。つまりマッチ棒の数は $3n + 1$ だけでなく、正方形の数に着目して、そこから重なったマッチの数をひくと考えれば $4n - (n - 1)$ になるし、縦と横を分けて場面を解釈して一般化すれば、$2n + (n + 1)$になるだろうが、それらが同値であることは、まだ文字計算を知らない生徒には理解しがたいという問題がある(Radford,1996)。

第三に、帰納的に一般化したものは論理的に正しいとは限らないため、通常なら証明という手続きを経るのであるが、そうした手続きがその時点で生徒には無理があるという問題がある(Radford, 1996)。

導入時に文字の必要性を感じなければ、その後の学習指導に大きな影響がでるため、文字と式に関する研究では、導入場面の研究が多い。この場面に関して例えば次のような研究は有効な示唆を与えてくれると思われる。

まず、マッチ棒の場面を多少複雑にするような教材の工夫であり、そこではその複雑な一般化場面を簡潔に捉える公式を作ろうという意識が生徒に芽生え、文字化する必然性が喚起される(小林,1991)。また、数字式を媒介として場面と文字式との相互作用が喚起されることが明らかにされている(谷沢,2001)。さらに、一般を通して特殊を見ること、逆に特殊を通して一般を見るという２つの思考によって、一般性への「意識性(awareness)」が育成されるという指摘(Mason,1989,1996)も注目に値する。しかし、この導入の仕方の成否は、その後の単元の展開や生徒の学習活動との関係で語られる必要があるし、むしろ文字式導入後に大きな問題がある。

教科書では、文字を導入した後は、数量を文字で表す仕方、文字式の規約、商の表し方、代入、文字計算と続いていくが、これらの指導の中で、折角学習した一般数としての文字の意味が不問に付され、むしろ文字を物と見ること(Küchemann,1981)が助長されている恐れがある。もちろん数量を表す式における文字（a 円の品物を買い 1000 円出した時のおつり $1000 - a$）は、色々な数値を代入できる可能性のある一般数であるし、文字計算 $3x + 5x$ は一般数に関する計算法則であるが、教師がそれを踏まえて指導しなければ、あるいはそうしたとしても、一般数としての文字の意味は薄れ、何かよく分からない物を扱っているように生徒に映っているのではなかろうか。さらに、各々の知識・技能が繋がりなく配置され、それらが練習によって強化される原子論的な指導が、文字の意味の希薄化に寄与しているように思われる。実際、国宗(1997)の調査では、一般数としての文字の意味は生徒にあまり捉えられていないし、そもそも問題の解決において生徒が文字を使おうとしないという現状が述べられている。

これに関連して Wheeler(1996)は、一般化によるアプローチを「わたしには... その出発点が実際にどのように、十分機能する記号的体系を生徒が持つように導けるのか、ということが明らかでないように思える。この特別な指針は、実行可能なプログラムというより、アイデアレベルに留まっていると感じざるを得ない。」と述べ、一般化による導入の研究がその後の具体的な展開を十分に示していないと示唆しているし、また三輪(1996)も、「現在、余りに早く、一般性を目指していることはないであろうか」と、このアプローチに偏りすぎる現状を危惧している。

導入後の展開に関する一つのアプローチとして、国宗ら(1995)は、中学１年で文字式による論証指導を計画、実施し、そうした展開への可能性について述べている。しかし、授業後に文字を利用する人数が増えたという積極的な結果とは裏腹に、半数以上が帰納的な方法に留まるという結果も示されている。

国宗ら(1995)のもう一つの興味深い結果として、「文字式を使って説明しようとする構えがひとたびできると、それは容易に消えない」というものがある。それゆえ文字を一般性として導入した後に、生徒が文字式を用いる「意義」をどのように把握し、持続していけるか、に関する研究が、理論的にも実践的にも重要になると思われる。

以下ではもう一つのアプローチである、問題解決的に代数を導入する方法を見てみる。

３．問題解決的な代数の導入

問題解決的な代数の導入とは、方程式の文脈における文字導入のアプローチを指す。従って、この時の文字の意味は未知数となる。この導入が支持される大きな理由は、それが歴史的な過程であったということである。また Bednarz と Janvier(1997)は、算術によって以前解かれていた問題を解決する為の新しいより有効な道具として代数を提示してきた、数学教育の歴史があることも、理由に挙げている。もちろん、最初から未知数 x に関する

方程式とその変形規則を生徒に導入することなど不可能であり、どんな問題や状況から文字やその規則が現れてくるのかが、歴史発生的にも心理発生的にも明かにされねばならないことであろう。

3.1. 未知数の歴史発生的説明

そもそも数学史の中で人類が文字を一般数として用い始めたのはほんの数百年前のことであって、逆に方程式の歴史は約 4000 年前の古代バビロニアまでさかのぼり、その頃には既に３次方程式に当たる問題が文字を用いることなく解かれていた(高崎,1977)。

代数の発達の歴史はしばしばネッセルマンによる言語的代数、省略代数、記号代数の区別が引き合いに出され、その枠組みに基づく分析が行われる。例えば Sfard(1994)は、ディオファントスの代数を「操作的」、ビエタの関数的代数を「構造的」と特徴づけ、藤井(2000)は、「ディオファントス以前」「ディオファントス的」「ビエタ的」の段階間の移行において、文字式として表す困難性を考察した。しかし、この大域的な枠組みから代数的な思考の発生の様子を示すことは難しい。それゆえ Radford(2001)はメソポタミアの数学からディオファントスへの流れにおいて代数的思考の発生について分析した。

彼はメソポタミアの算術的思考の最も優れた達成を、「間違った立論による方法(false position method)」にもとめた。これは求める量に適当な値を仮定し、出力された結果を比例的な調整因子によって調整することで、正しい解を得る方法である。例えば次の問題と解を見てみる(注１)。

＜問＞「長方形の横の長さは、縦の長さよりその４分の１だけ短く、長方形の対角線の長さは 40'　である。長方形の縦と横の長さはいくらか。」

＜解＞・縦に誤った量を想定する。それを 1* とする。横は 1* ー (1/4)× 1*＝ 45'

・1* ^{2} ＝ 1*, (45')^2 ＝ 2025"＝ 33'45", 1* ＋ 33' 45" ＝ 1* 33' 45", 1* 33' 45"の平方根をとって、1* 15' （三平方の定理）

・それが対角線の値のはずだが、問題ではそれが 40' となっている。

・1* 15' の逆数を計算する（48' ）。48' × 40' ＝ 1920" ＝ 32' (比例的調整因子)

・最初に仮定した間違った値の縦と横に、比例的調整因子をかける。

1* × 32' ＝ 32' , 45' × 32' ＝ 24'

＜答＞ 縦 32' , 横 24'

メソポタミアでは比例的推論が発達し、この解答の中でも比例的調整因子を利用して、出力された結果をもとに真の値を捉え直している。Radford は、未知数に対して特定の一つの数を選ぶという方法が、数による問題解決を「体系化」し、古代の比例的な思考の発達における重要な段階になったと述べている。そしてこの方法における「仮定した数」をメタファ的に見るのをやめ、求められる対象それ自体の点から考えはじめた時、この対象が「操作可能な数」となったと考察している。それは約 2000 年の時を越えて、ディオファントスを待たねばならなかった。

さらに Radford は、ディオファントスの著書 Arithmetica の中に、バビロニアの「間違った立論による方法」の痕跡を見いだしている。そこでは、求める量を未知数 x と置くのでなく、例えば求める量の 1/6 を未知数 x と置いている。つまり、数値を当てはめる帰納的活動から求める量を予測した上で、未知数を選ぶという方法を、ディオファントスが採用しているというのである。

この Radford の歴史考証において注目したいのは、第一に、代数の発生が数の計算から方程式（未知数）へという道筋になっていること(cf.Sfard,1994)、第二に、数を仮定し、出力結果から最初の数を調整する活動が繰り返された後に、未知数の対象化が生じること、第三に、未知数が概念化され、方程式が考察

の対象となった後でさえも、数によるの活動の痕跡が見られることの３点である。

このように歴史的には文字が未知数として現れるが、学校カリキュラムが歴史を追随しなければならない理由はない。むしろこうした歴史プロセスが生徒の心理発生に示唆を与えるかどうかを知ることが重要である。

3.2．未知数の心理発生的説明

Bednarz と Janvier(1996)は、「方程式」に関わる問題の解決を、代数を導入する重要方法の一つと考え、それを可能にする問題の種類と、そこでの子どもの認識過程を探究した。

＜算術の問題＞　スティーブはハロルドより 27 枚多くカードを持っていて，ジャックはスティーブの３倍のカードを持っている。スティーブが 138 枚のカードを持っているとすると，３人の合計は何枚か。
＜代数の問題＞　３人の子どもがおはじきで遊んでいる。合わせて 198 個のおはじきがある。ジョージはデニスの２倍のおはじきを持っていて，ピエールはジョージの３倍持っている。それぞれの子どもはいくつおはじきを持っているか

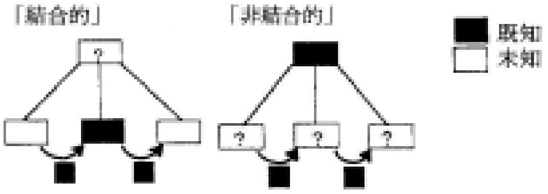

図１：算術と代数の問題、及びその意味論的構造

彼女らは問題構造に着目して代数の導入を可能にする問題（以下、代数の問題）と算術的操作で解決できる問題（以下、算術の問題）(図１を参照)とを区別し、代数の問題を解決する上で、生徒達が示した算術的な方略の種類と、各々の方略の限界について考察した。この研究に続いて岡崎(2001)は、代数の問題の解決において、生徒のインフォーマルな方略がどのように代数的なものへと変容するかを、インタビュー調査のデータをもとに検討した。その結果、次のことが示唆された。

- 生徒は、代数の問題の解決の中で、文字と式の単元の内容に関する素地を獲得していた。少なくとも式を使って解きたいという動機を得ていた。
- 仮の数をおいて考える試行錯誤的方法と式に表すこととの相互作用が、局所的関係の理解や、後での代数的発想の生起に役立っていた。
- 計算を簡略化する場面と、全体に対する部分の構造を把握する場面で、文字をまとめ上げるという発想が生じた。
- 分配法則の発想には事象と数字式の構造的理解が重要であった。それを文字式で再解釈することで、確信的に理解された。
- 文字式を用いる必然性、よさが、文字式学習以前の方程式の問題解決の文脈で生じていた。

これらの点は Radford の歴史考証と整合するものであり、また感情と認知の繋がりはホリスティックな展開を期待させるものである。しかし、上記の導入の仕方の限界、言い換えれば授業や単元を構想する上での改善点も、考えねばならない。

大きな問題は、代数の問題を生徒達に投げかければ、どの生徒も文字や文字計算などを生じさせるのかという点にある。Bednarz らの論文にあったように、文字を用いようとせず算術的方法に留まる可能性があるし、歴史的に見ても 2000 年の年月を要した過程である。これは一般化として文字を導入する時に考察した、単元全体の構想が立つかという問題にも繋がる。代数の問題のように、代数を発生させる問題構造は重要なものとして考える必要があるが、文字計算が自然に触発され、それが形式的な方程式の解法へ繋がるような場面設定は、新たに構想する必要があろう。

４．授業開発の理論と実現の方法

理論と実践の統合的研究を行う学問という数学教育学の性格上(中原,1995)、授業を開発する上で、よい教材、よい授業技術とともに、その背後にある思想や理論を明らかにすることも必要である。それゆえまず授業開発のための基本的考えに言及し、次にそれを実現する方法を示すことにする。

4.1．授業開発のための理論的枠組み

4.1.1．教授学的場の理論

本研究は全体論（ホリズム）の立場をとる。ホリスティック教育では吉田(1999,p.192)が「学習の生起する関係性・場の成立が前提」と述べたように、色々な繋がりを生徒達が作りあげることのできる「場」の構成が基本的な教授手段となる。それゆえ、数学教育におけるシツェーションの研究がホリスティックな展開への貢献を果たすと思われる。日本のシツェーション研究は、主に主体の活動を触発する問題場面、教具、ストーリー、ゲームなどの点から研究されてきたと思われるが(平林,1975)、Brousseau(1997)は人や環境も含めて、授業の中で主体が働きかける対象を広く「milieu」と呼んで、教授学的場の理論を提起している。

Brousseau の考える学習過程は、彼の構成主義の視座から(Sierpinska & Lerman, 1996)、非教授的状況、すなわち「教授の介入が一時的に消される状況」(Artigue,1991)が中心となる(注２)。彼は、「知識は、意味を保持する一つ(または複数)の非教授的状況によって特徴づけられ得る」(p.30)という知識観を持ち、学習過程を認識と場が互いを支えながら発展していく様相として捉えている(図２)。

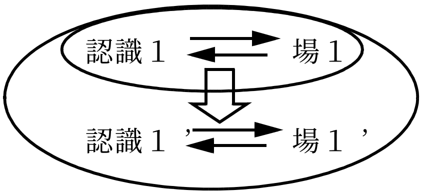

図２：認識と場の対応とその発展

認識の発展に関して、彼は数学史における３つの知識の身分を考慮して、原初数学的、擬数学的、数学的の発達過程を想定する。

まず知識にはアイデア的な段階があるとする。この例としては、アルクワリズミが実数でなく有理数に興味を持っていたことと、その段階で多くのアイデアが生じていたことが挙げられている。次には、歴史的に 19 世紀の関数、16 世紀の方程式がそうだったように、特徴や性質が研究されるくらい馴染みがあるものの、まだ理論化されていない「擬数学的」段階がくる。そして最終の身分では、数学的に制御可能な知識となり、曖昧性や誤りから保護されることとなる。後の２つの段階は、知識を「道具」として活用する段階と、知識を「対象」として考察する段階(Douady,1997)とも特徴づけられている。

これらの認識を支え、促進する場は、順に行為の場、定式化またはコミュニケーションの場、妥当化の場と呼ばれている。行為の場での働きかけの対象(milieu)は問題やゲームであり、主体はそれとの相互作用から素朴なアイデアを生じさせる。しかし、定式化またはコミュニケーションの場では、アイデアを実際に使ったり、他者に説明する必要性が生じ、ここでアイデアは道具の様相を帯びることになる。つまり milieu には「他者」という側面が入ってくる。さらにその妥当化を検討する場では「他者と交わしてきたメッセージ」が考察の対象に加わり、知識は数学的・理論的なものへ発展する。(注３)

これを文字と式で考える時、文字式が対象とする場は、主に数字式に関わる場だと考えられる(藤井,1998;谷沢,2001)。文字式の認識とそれを支える場がどう相互作用し、発展していくかを想定することが、必要となる。

4.1.2．代数的思考のサイクル

ホリスティックな展開では、生徒が代数の意味を理解し、さらに素朴でもその意義を感じながら学習することが重要になる。その点

で、三輪(1996)が示した「文字式使用の図式」(図３)を吟味することが有用である。

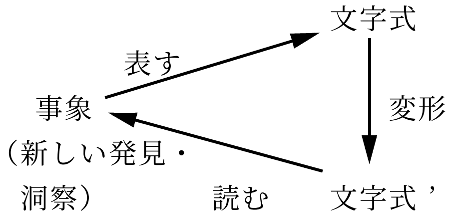

図３：文字式利用の図式.

文字式の最大の威力は、具体的な事象から一度離れて、変形というプロセスが許されることにあり、時にそれは思考の肩代わりをしてくれる。しかし三輪の次の指摘(p.12)は注目に値し、それがこの図式を提起した理由にもなっている。

> 「教室での数学の指導においては... 文字式の使用の際にどうしても必要な式の計算（変形の重要な部分）に格別の力を注いできたのではあるまいか。式の計算は、中学校に始めて導入されるものであり、しかも、伝統的に中等数学の主要部分であるとみられてきたこと、さらに、練習によって比較的容易にその成績を高めることができるものであること等から、現在でも非常に重視されているように思われる。...（中略)... 問題は、それ（式の計算：筆者注）が思考をすすめる手段としての文字式の使用において果たす役割である。あくまで、計算は使用の全体の過程の一部分であって、使用をより効果あるもにするものである。使用という目的に奉仕する一部分というべきであって、決して、全体ではないのである。」

教科書では式で表す、文字計算、式を読む活動が個別的に配列されているが、三輪はサイクルが一回りすることによって文字使用の意義を感じ取れ、また「文字式の使用をいっそう高いものにすることにつながる」と述べている(p.13)。本稿ではこのサイクルを、「代数的思考のサイクル」と言うことにする。

これを教授学的場の考え方と総合して、縦軸、横軸からなる文字と式の単元構成の枠組みとしたい。つまり、縦軸は原初数学的(アイデア)、擬数学的(道具)、数学的(対象)という知識の発展過程であり、横軸は代数的思考のサイクルからなる。つまり、最初の段階において既に代数的思考のサイクルがあり、事象と文字式、それを変形した式の３つが何らかの形で結ばれ、変形した式による事象の意味づけがなされたとき、次の認識の場へ発展すると考える。

以下では、これを実践に移す上での方法や実践例を示していく。

4.2. 授業開発の方法と実践

4.2.1. 授業実現の方法

場の設定における中心的な要素は課題であろう。開発する授業は、単元を通して活動が連続することを意図するため、課題の設定はかなりオープンになる。そして歴史的・心理的研究から示唆されたように、算術的な解法が中心をなす段階から、文字を用いた解法への移行が生じるような、方程式的な文脈を持った場の設定を構想する。最終的に「等式の性質を前提にした式の変形」がなされれば、それが代数に到達した一つの目印となる。

基本的な場は、いくつかの式の型に基づいた数当てゲームである。

式の型１．□＝□＋□＋□、
式の型２．□＝□－□－□、
式の型３．□＝□×□×□、
式の型４．□＝□×{□＋□}、
式の型５．□＝□÷□×□
・・・・・・・・・・・・・・・・・

左辺の□には、数字が入り、右辺の３つの□(２つの場合もある)の中に、未知数 x が少なくとも一つ入るようにする。左辺の数字は教師か生徒が最後に決めて、x が何かを当てる。

この設定は、Bednarz の論文で、文章題解決では生徒が文字式を用いようとせず、算術に

留まる傾向が示唆されたことを考慮にして、「表す」ことよりもむしろ、「変形」して「読む」ことに重点を置いたものである。この場では、歴史発生で示唆された、数字式と文字式との相互作用が必然的に生じる。

課題の設定として、型１でのゲームでは、□＝ x ＋(+3)＋(-2)のような算数レベルの課題から、□＝ x ＋ x ＋ x や □＝(x+1)＋(x+1)＋(x+1) のように、複数の未知数が入ったり、一つの□に式が入る課題まで、様々に考えられる。型２では、文字の意味形成として重要な $-x$ を生徒がどう処理するか(相馬,2000)、型３では累乗が問題になる。さらに型５では、演算の順序によって計算が間違う可能性が生じ、そのためわり算の分数化に言及することができる。つまり、数当て遊びをしながら、文字と式の内容がほとんど網羅される。

しかし、その指導法には十分配慮がいる。この場の背後には、生徒の活動性を連続させるという思想があるのであって、教師が教え込んでは本末転倒になる。例えば、型５のゲームで □＝ x ÷(+2)×(−3) のような場面になったとき、生徒は早く x の値を見つけようと、□＝ x ÷(−6) と変形して□の数を待つかもしれない。この姿勢に式を変形する意味が出てくるのであるが、変形の正確さも要求される。そこでは解答にばらつきが生じ、分数化を喚起する契機となる。しかしここで教師は、すぐに「わり算があると間違いが起こりやすいから、分数にしよう」と述べるのでなく、なぜ答えが２通りに分かれたのか、と問いかけるべきである。そこに生徒のアイデアレベルの知識が道具的な知識になる契機があり、生徒の活動が連続することにもなる。

また、文字式の歴史発生や心理発生から示唆されたように、生徒に数の当てはめ活動を促すことが重要である。x に色々と数を当てはめて計算する生徒の活動は、教師にとって冗長に映るかもしれないが、この活動において文字式と数字式の繋がりが付くのであり、これをやめさせるなら原子論的な指導と何ら変わらなくなる。オープンな設定であるので、一つの場面で文字の変形に気づくことを期待するより、他の問題に切り替えることを考えるべきだろうし、早く答えを見つける生徒にそのコツを問いかけてみるのも、問題場面の再構成へ繋がることになろう。

さらに、ホリスティックな学習には、困難なことに直面し、それを解消する楽しさ、皆で学習する楽しさが含まれ、それゆえグループに分けて、問題を出し合いながら得点競争をすることもよい実践方法となる。その時、真偽を判定する責任者は教師でなく、生徒へと移譲されることとなる。

4.2.2. 授業実践の一例

紙面の都合で、分配法則に関する例のみ、提示することとする。既に x をまとめ上げることがゲームで行われている。設定場面は、□の中に式を入れた□＝(x+4)＋(x+4)＋(x+4) のような場面である。

T：さあ、数字をひくよ。□は＋ 21。

Ss：（x に色々な数値を代入して、＋ 21 になる数を探す。数字式での活動）

S1：x は＋４です。

S2：x は＋３です。

T：分かれたね。では当てはめて確認してみよう（黒板で計算してみる）。どうやら＋３が正解だったようですね。これを見つけるのに工夫した人はいますか？

S3：先に数字だけを計算しました。＋４が３つあるので、最初から＋ 12 と考えました。あと x が３つあるので、最初にそう考えて、数を見つけました。

S4：僕は括弧が３つあるから３で割りました。括弧が３つあるので+21 を３で割って、それで x+4　が７になるから答えは+3

話し合いはこの程度でとどめて、同じ場での次の問題に移る。これを２，３度繰り返した後、生徒達は S3 のような考えを、文字式で $3x + 9$ と表現し、S4 の考えもそれに倣う形で、

3 ×(x+3) と表すようになった。教師はこの２つの表現が同じかどうかも尋ねてみた。生徒の反応は、「同じ式を変形したものだから同じ」、「何か数を当てはめてみると同じになる」というものだった。さらに、形の上でどう見ると同じに見えるかも尋ね、生徒は「３を２つにかけてある」という程度の認識を示した。ここでは分配法則としてまとめず、アイデアレベルのものに留めた。

数時間後、□＝ 3(x+1)－ x の場面で取り組んだとき、何人かの生徒は分配法則を積極的に活用し、答えを早く見つけた裏技として皆に紹介し、皆でその考えを共有していった。ここでは分配法則は、うまく答えを見つける「道具」であるとともに、人に伝えるための「言語」として、明確に位置づいていた。すなわち、ここでは代数的思考のサイクルが一回転し、文字計算の意味と意義を生徒が感じ取っていると考えられる。

実践の詳しい検討は、別項に譲ることにしたい。

５．おわりに

本稿では、文字を一般性としてでなく、方程式の文脈における未知数として導入するアプローチを検討してきた。

しかし、実際にはこれらのいずれか一方が採用されるというものでもないであろう。Bell (1996)は「本質的な数学的活動はオープンに問題を探究することであり、より多くの結果やより一般的な結果を求めて問題を拡張し、発展させることからなる。このようにすべてのオプションの学習がこうした問題の探究に基づくべきである」と指摘し、すべてのオプションが広義の問題解決的アプローチの中で統合されることを示唆している。

本研究でも、いずれかのアプローチを採るべきという立場にたつのでなく、むしろいくつかのアプローチが融合された、算数から数学への移行を促す「前代数(pre-algebra)」として、文字と式の単元を再構成したいと考えている。つまり、現在のように、最初から文字の意味を定義したり、計算法則を押しつけたりするのでなく、色々な活動を通してその後に数学を学んでいく素地を培うことをねらいとする単元の構成である。

ただし、その中でも中心をなすアプローチがあるとするならば、本研究では、Herscovics と Linchevski が認知的ギャップを「未知数に対して生徒が自然発生的には演算を行うことができないこと」(1994,p.75)と特徴づけたように、方程式の文脈での文字操作の中に、算術と代数のギャップ、及び代数への移行に関わる手がかりがあると考えている。

［付記］なお、本研究は平成 14 年度科学研究費補助金(課題番号 14780097)の支援を受けて行われた研究の成果の一部である。

注及び引用参考文献

注１：バビロニアでなされたように 60 進法で示している。例えば、2`` 3` 5* 6' 11"　は、$2 \times 60^2 + 3 \times 60 + 5 + 6 \times (1/60) + 11 \times (1/60^2)$を示している。

注２：a-didactical を、非教授的と直訳した。しかし教授的でないからといって、教師が全く関わらないのでなく、生徒の活動を支えるのは教師の当然の仕事である。生徒が「非」教授的と感じる場と捉えられよう。

注３：Brousseau の想定する学習過程は非教授的状況の中だけで展開されるのではなく、生徒が生じさせた知識を、歴史上の知識と整合性を図る、教授的な場である「制度化の場」が想定されている。

Artigue, M. & Perrin-Glorian, M. (1991). Didactical engineering, research and development tool: Some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics, 11* (1), 13-18.

Bednarz, N. *et al.*(eds.).(1996). *Approaches to Algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuties and discontinuities with arithmetic. in Bednarz, *et al.*（1996）.（pp.115-136）.

Bell, A.（1996）Problem-solving approaches to algebra: Two aspects. in Bednarz *et al.*（1996）.（pp.167-185）.

Brousseau, G.（1997）. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*.（edited and translated by N. Balacheff *et al.*）Kluwer Academic Publishers.

Douady, R.（1997）. Didactic engineering. T. Nunes & P.Bryant（eds.）. *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*（pp.373-401）. Psychology Press.

Gray, E. & Tall, D.（1994）. Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching*, *142*, 6-10.

Herscovics,N. & Linchevski,L.（1994）. A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 59-78.

Küchemann, D.（1981）. Algebra. K. Hart *et al*.（eds.）. *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*（pp.102-119）. John Murray.

Mason, J.（1989）. Mathematical abstraction as the delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, *9*,（2）, 2-8.

Mason, J.（1996）. Expressing generality and roots of algebra. in Bednarz, *et al.*（1996）.（pp.65-86）.

Radford, L.（1996）. Some reflections on teaching algebra through generalization. in Bednarz, *et al*.（1996）.（pp.107-111）.

Radford, L.（2001）. The historical origins of algebraic thinking. R.Sutherland *et al.*（eds.）, *Perspective on School Algebra*（pp.13-36）. Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A.（1994）. The gain and the pitfall of reification － The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sierpinska,A. & Lerman,S.（1996）. Epistemologies of mathematics and mathematics education. A.Bishop *et al.*（eds.）. *International Handbook of Mathematics Education*（pp.827-876）. Kluwer.

Wheeler, D.（1996）. Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. in Bednarz, *et al.*（1996）.（pp.317-325）.

岡崎正和.（2001）. 全体論的な視座からの授業設計に関する考察－中学校１年の文字式・方程式の授業デザインに向けて－. 上越数学教育研究, 16, 47-56.

国宗進, 鈴木裕, 小高博.（1995）. 中１での文字式による論証の指導. 静岡大学教育学部研究報告(教科教育学篇), 26, 77-100.

国宗進.（1997）. 確かな理解をめざした文字式の学習指導(pp.49-64). 明治図書.

小林志郎.（1991）. 多様なアイデアを実感する授業－中学校第１学年「文字式の利用」. 古藤怜他編. 算数数学科における Do Math の指導(pp.105-115). 東洋館出版社.

佐藤学.（1996）. 教育方法学(pp.7-32).岩波書店.

相馬一彦.（2000）.「問題解決の授業」に生きる「問題」集（p.42). 明治図書.

高崎昇.（1977）. 方程式の歴史. 総合科学出版.

谷澤浩明.（2001）. 文字式の学習過程に関する研究－事象と文字式の関連に焦点を当てて－. 上越数学教育研究, 16, 69-80.

中原忠男.（1995）. 算数・数学教育における構成的アプローチの研究. 聖文社.

平林一栄.（1975）. 算数・数学教育のシツエーション. 広島大学出版研究会.

平林一栄.（2001）.最近の数学教育研究の視点. 全国数学教育学会誌, 数学教育学研究,7, 1-6.

藤井斉亮.（2000）.「式に表す」ことの困難性について. 日本数学教育学会, 第 33 回数学教育論文発表会論文集, pp.349-354.

ミラー, ジョン・P.（1994）. ホリスティック教育. (吉田敦彦他訳). 春秋社.

三輪辰郎.（1996）. 文字式の指導序説. 筑波数学教育研究, 15, 1-14.

吉田敦彦.（1999）. ホリスティック教育論 日本の動向と思想の地平. 日本評論社.