数学教育研究，第3号，上越教育大学，1988年，pp.25-36

コンピューターを利用した数学的探究について
－数学的知識の手続き的側面との関係に焦点を当てて－

上越教育大学数学教室
飯　島　康　之

0．序

今日，コンピューターは身の周りにあふれている。そして，別にプログラムを組まなくても，無意識的にコンピューターを使っていることも珍しくない。例えば，銀行のキャッシュカードを使うときがそうである。そのような身近な存在としてのコンピューターを問題解決の手段として使うことも，次第に日常的なことになりつつあると言える。そのような問題解決の手段としてコンピューターを使う場合，それは，我々の数学的知識のどのような側面に影響を及ぼすのだろうか。

例を一つ挙げよう。ＲＩＥやＣＩＪＥのようなデータベース[1]で文献検索をするとき，具合のよい文献リストを作るため，いくつかのキーワードを組み合わせながら，適切な文献が，適切な数だけ集まるように工夫する。このとき，実は暗黙のうちに，適切な文献リストを作るための手続きを規定するものとして，集合の和・積などを使っている。そのような，「集合の和・積」の思考の道具としての側面は，それらの定義を見ているだけでは理解できない側面である。実際，数学としての集合算は嫌いでも，データベースを駆使することには抵抗を感じない人は多いだろう。そういう意味において，そのような環境を提供するものとしてのコンピューターは，集合の和・積の思考の道具としての側面を理解する契機を提供しているものと見なすこともできよう。この事例は非常に単純な事例であるが，そのような側面を明確にしていくことや，また数学的探究の中のどのような点で，コンピューターが思考の道具として役立ちうるのかを明確にしていくことは，数学教育とコンピューターの関わりについて示唆を与えるものと思える。

本稿では，そのような側面の一つとして，数学的知識の手続き的側面に注目してみる。そこでまず，Pragmatismの観点から見たときの数学的知識の手続き的側面について簡単に考察する。そして次に，筆者自身がコンピューターを利用しながら数学的探究を進めていった3つの事例を記述・分析しながら，考察を進めていく。

1．数学的知識の特徴としての手続き的側面
－Pragmatismの観点から－

数学的知識（命題）の特徴をどのように捉えるかは，基礎とする認識論によって，取り上げる側面が異なる。ここでは，Pragmatismの観点から考察してみる[2]。

この立場から見たときの数学的命題の特徴の一つは，(演算等を含めた）手続きの実行可能性（計算可能性）が（最終的には公理によって）保証されている命題だということである。「物体を2つに分ける」という物理的手続きには，実行できる範囲に限界があるが，「有理数を2で割る」という数学的手続きは，実行の可能性が保証されている。いや，むしろそうなることを意識して，「除法の可能な数学的対象」として有理数等の商体を構成するのである。自然数でさえ，その定式化においては，「数学的帰納法が可能な数学的対象」として構成する。そのような，手続きの実行可能性に注目して，定義，定理等を作り上げていく側面が，数学的知識を構成してい

くときの一つの原動力であるということが，この立場の見方である。又このような特徴は，(特に現代数学と呼ばれるような) 数学を理解する上で不可欠な側面であろう。

しかしまた，定式化においては，手続きの実行の可能性しか保証されておらず，数学的探究は，実際に手続きを実行し，様々な数学的事実を見出しながら進めていくものだということ，そして実際には手続きの実行には限界がある（もちろん，その限界は個人の能力等にも依存する）ということも重要である。たとえば，1988^{1988}の数学的な意味は明らかであるが，その計算の実行は，暗算や筆算では限界の外にある。

もちろん，1988^{1988}のような（無意味な）計算をすることを勧めているわけではない。ここで主張したいのは，それを含むような問題が生じた時に，(1988^{1988}の性質をうまくつかまえるような) より高次な手続きを見出すことも数学的探究の１つのモードであると共に[3)]，手持ちの手続きで実行して様々な数学的事実を収集することもまた，数学的探究の１つのモードであるということである。そして，コンピューターはそのような状況に対して影響力を持っているということである。

そのような影響の及ぼし方は，基本的には次の２点であろう。すなわち，(1) 数学的知識の手続き的側面を強調する点と(2) データ収集をより容易にするという点である。しかし，そのようにして扱うデータがより広範なものになることによって，数学的知識に対する要請が生じることもありうる。すなわち，(3) 扱うデータの変化に伴い新たの問題が提示され，問題に対する新しい洞察が必要とされる点や，(4) 数学的知識そのものを対象化し，別の体系化が示唆される点などもありうると言えよう。(1) の例としては，冒頭に挙げたデータベースの例などが相当する。そこで，本稿では，(2)-(4) に相当する事例を以下に挙げながら，考察を進めていく。

2．手続きの意識的な利用によるデータの収集

数学的な問題において，データを収集するためにコンピューターを有効に使うケースは，ある関係を見出し，それをよりよい関係を見出していくためのデータ収集の手続きとして使う過程の中にしばしば見出せる。つまり，暫定的に見出した手続きに様々な数値を代入して，多くのデータを収集し，それを元に推論を進めていく過程である。そのような事例として，筆者の探究事例の中には，次のようなものがある。

2.1 問題の提示

Ｆ氏がこんな問題を考えたという。

問題2.1

天秤秤で１ｇから６０ｇまで１ｇきざみに計れるようにするためには，分銅は最低何個必要か。（あるクイズでの問題）

Ｆ氏は，{1,3,5,10,30,50} という６個でうまくいくという事実を発見したけれども，最小かどうかということもわからないし，これだけではただのtrial and error の域を越えないので，発展させたいと言う。

それに刺激され，次のように考えてみた。

1. 1-ngに用いた分銅は，1-N g ($n<N$) のときにも使うのかということ。もしそうならば，数学的帰納法を使うことができそうである。
2. 場当たり的にしかできないならば，とにかくなんらかのチェックする手段を用意することが必要となる。また，なんらかの方法をつくれれば，それを使って，シラミ潰し的に一応の正答を見つけることはできるし，それをもとに考察を進めることもできる。

そこでコンピューターでなんらかのプログラムを作ってみることにした。

2.2 問題の同値変形とプログラムのアイデア

プログラムを考えながら，この問題は，次の問題と同値であることを見出した。

問題2.2
次の条件を満たす集合のうち，一番元の個数の少ないものを求めよ。
$X = \{a_i : i = 1,..,n\}$
但し，任意の$m \in \{1,..,60\}$に対し，i_j，i_k（$i_j \neq i_k$）が存在し，
$m = \Sigma a_{ij} - \Sigma a_{ik}$

そして，まず次のようなプログラムをつくることにした。（資料1）

問題2.3
いくつかの数 $\{a_i\}$ を与える。そのときに，これらの数の組合せでつくりうるすべての数を列挙するプログラムを作れ

その組合せは，次のように作れるだろう。
$\{\Sigma a_i \times b_j ; b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = -1\}$

このことからも，次のことがわかった。
n個の数で作りうる数の個数は 3^n である。符号について対称なので，正のものは最大 $(3^n -1)/2$ 個である。一般には表現の仕方が一意的とは限らないので，この値は $\{a_i\}$ が生成しうる数の個数の上限となる。それぞれの上限は，1→1個，2→4個，3→13個，4→40個，5→121個だから，F氏の問題の答えは5以上であることがわかる。

2.3 プログラムの作成と実行

始めは3つの数を入力し，それから生成されるものを出力した。最初の結果は
{1,3,5} →1,1,2,2,3,3,4,4,5,6,7,8,9 。
重複があるため，数値を少しづつ変化させた。
{1,3,6} →1,2,2,3,3,4,4,5,6,7,8,9,10
{1,3,7} →1,2,3,3,4,4,5,6,7,8,9,10,11
{1,3,8} →1,2,3,4,4,5,6,7,8,9,10,11,12
{1,3,9} →1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13
となることがわかり，3つの場合，最良の解が存在することがわかった。

2.4 プログラムの拡張と最良の解の一般化

次に，4つの数から生成されるものをつくるプログラムを作った。9=2*(1+3)+1 から類推した数を使うことにした。最初は計算間違いから {1,3,9,14} を入力し，27個の数を作ったが，重複に気付き，{1,3,9,27} に修正して，最良解を得た。

更に，5つの数から生成されるものをつくるプログラムをつくり，また最初は計算間違いから {1,3,9,27,59}（99個）を使ったのであるが，重複に気付き，{1,3,9,27,81}（121個）に修正した。（従って，問題の答えは5個である。）このことを一般化すると，

$$a_1 = 1 = 1 = 3^0$$
$$a_2 = 2 \times 1 + 1 = 3 = 3^1$$
$$a_3 = 2 \times \{(2 \times 1 + 1) + 1\} + 1 = 9 = 3^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = 2 \times (a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1) + 1 = 3^{n-1} \ ?(*)$$

が予想された。(*) は次のように証明できた。

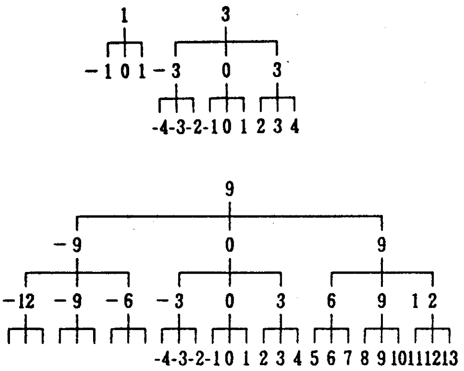
$$\begin{aligned} a_n &= 2 \times (a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1) + 1 \\ &= 2 \times a_{n-1} + 2 \times (+a_{n-2} + \cdots + a_1) + 1 \\ &= 2 \times a_{n-1} + a_{n-1} \\ &= 3 \times a_{n-1} \\ &= 3 \times 3 \times a_{n-2} = \cdots\cdots = 3^{n-1} \end{aligned}$$

2.5 以上の解の意味付け

とりあえず，$\{3^n\}$ が最良の一般解であることが予想され，また暫定的な証明も得られたが，一体この集合はどのような意味があるのか。また，それぞれの数についての意味をどう考えると理解しやすくなるのだろうか。次のように考えてみた。

1の存在＝他の任意の数について，x-1, x, x+1 という幅を与える。
3の存在＝他の任意の数について，x-3, x, x+3 という幅を与える。
1,3の存在＝他の任意の数について，x-4, x-3, ..., x+3, x+4 という幅を与える。

これを図示すると，次のようになり，いわば，3進法の変形に相当することがわかった。



2.6 この事例から示唆されること

この事例においては，問題2.1 に対する予想をチェックし，さらによりよい答えを求めるためのデータをつくる手続きを意識的に使うために，問題2.3 を作っている。分銅を使って得られるデータと同様のデータをより速く，より正確に，そしてより組織的に求められる点が特徴であろう。

しかし，単にコンピューターを使えばそれで探究は終了しているわけではないことに注目したい。コンピューターの利用によって可能になっているのは，最良解の予想の修正が容易になった点であるが，それのみで探究が終了しているのではなく，むしろそれを基にして，他の数学的探究にも見出されるような，様々な過程が導き出されている。例えば，コンピューターの利用に伴い，それに適するような問題の（問題2.2 への）変形がなされること，一般解(*) の予想，一般解(*) の証明，そして一般解のよりよい解釈などがそうである。

もちろん，問題によっては，(この問題でも最良解の発見だけならばそうであるが）データを収集するだけで探究を終了するものもあるかもしれないが，むしろ，それを基に，より包括的な数学的探究を進めるための道具としてコンピューターが機能しうるという点に注目すべきであろう。

3．コンピューターなしでは複雑すぎて扱えなかった問題の解決

前章で扱った事例においても，収集したデータ等は，新たな数学的問題を示唆していたが，この事例の場合，必ずしもコンピューターがなくても，同じような問題に到達することも十分にありうるものと言えよう。それとは対照的に，コンピューターの数学への応用の顕著な例の１つに，四色問題があるように，コンピューターなしには複雑すぎて扱えなかった問題に，コンピューターを使って挑戦することが可能なことがある。

その中には，例えば「1000以上2000未満の素数の数を求めよ」という問題のように，既知の方法（エラトステネスのふるい）をそのままコンピューターで実行することで解決してしまう場合もあるが，計算量が膨大で，コンピューターを使っても，時間的，空間（メモリ）的に問題があり，問題に対する新たな洞察が要求されるような場合もある。そのような問題の場合，さらに問題を新たな観点から捉え直し，新しい洞察を加えることが必要になってくる。（４色問題とは比べようもないが，ささやかながらも）後者に相当する，筆者の探究事例を１つ挙げよう。

3.1 コンピューターを使うまでの解決過程

古い話になってしまって恐縮なのだが，私が高校生・大学生・そして大学院生の頃まで続いたテレビ番組の一つのコーナーに，フィーリングカップル５－５というのがあった。簡単にそのルールを説明しておく。A大学から男子が５名，B大学から女子５名が出場する。自己紹介に続き，司会が質問をしたり，学生同士が質問を交わしたりして，相手の様子を見て，自分のフィーリングに合いそうな人を決める。そして，時間がきたら，それぞれがボタンを押し，フィーリングが合った者同士が，めでたくカップルになるのである。

大体の場合，カップルができるのは，１組

か2組くらいなのだが，ある日5組のカップルができたという。そのときS氏がテレビをみていたらしく，あれは予め打ち合わせをしていたのに違いないという話をしていた。そこで，次の問題を一緒に考えてみた。

> 問題3.1
> フィーリングカップル5－5で5組のカップルができる確率を求めよ。

この問題は思ったよりも簡単だった。というのは，次のように組み合わせ論的に考えることができたからである。

全事象は，それぞれの人が5人の中から1人を選ぶのだから，5^{10}である。そして，5組のカップルのできる場合の数は，5！である。したがって，求める確率は

$5!/5^{10}=1.23\times10^{-5}=0.0000123$

要するに100000回に1回程度だから，番組が年間50回あるとすれば2000年に1回の出来事なのだから，S氏が「おかしい」と言うのは当然のことだった。（実際，おかしいという抗議の電話が局に殺到したらしい。）

ところで，この解決方法はすこし一般化できる。つまり，フィーリングカップルn－nでカップルがn組できる確率は，

$n^{2n}/n!$　　　　となる。

思ったより簡単にできたのに気をよくして，0～4カップルについても考えてみた。つまり，次の問題を考えてみた。

> 問題3.2
> フィーリングカップル5－5でn組（$0\leqq n\leqq5$）のカップルができる確率を求めよ。

まず最初に考えたのは数学的帰納法である。つまり，フィーリングカップル1－1から始めて，n－nでの確率までを求める一般的な方法を求めようという考えである。しかし，これが全く失敗した。たとえば，4－4の場合がわかったとする。5－5の場合にこの結果が生かせるのは，その部分集合として4－4の構造が見出せるとき，つまり，男子がM1～M5，女子がF1～F5とするときに，M1～M4はF1～F4を，またF1～F4もM1～M4を指名するような場合しか扱えないのだが，実際にはそうでないような場合の方が大半なのだ。nが小さいときは場合分けでなんとかしのげても，nが大きくなると，もう紙と鉛筆では処理できないものになってしまう。

3.2 シラミ潰し法によるコンピューターの利用とその失敗

そこでコンピューターを使うことにした。コンピューターを使えば，全ての場合をシラミ潰しに調べるという方法も現実味を持っているからだ。

シラミ潰しの方法で2－2から順番にやっていったところ，5－5のプログラムを作るのは簡単だが，その実行に非常に時間がかかりそうなことがわかった（資料2）。実際，2－2ではほとんど時間がかからず，3－3で10秒，4－4で20分なのだ。そこで大雑把な計算をしてみると，全部の組み合わせはn－nでn^{2n}だけあるのだから，5－5は4－4の約150 倍だから，約2日走りっぱなしにしなければならない。もちろん，不可能なことではないにせよ，コンピューターは共用だからそういう使い方はできないし，もう少しマシな使い方がありそうに思えてくる。

3.3 モンテカルロ法の利用

そこで，大雑把な値を計算するために，モンテカルロ法を使ってみることにした（資料3）。10000 回の試行による結果は次の通りである。

ｶｯﾌﾟﾙ数	回数	確率
0	2805	0.2805
1	4694	0.4694
2	2164	0.2164
3	317	0.0317
4	20	0.002
5	0	0

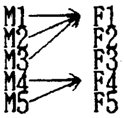
（所要時間 409秒）

3.4 5^{10}通りを場合分けする

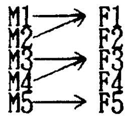
だが，近似値は得られたといっても，これでは満足し難い。なんとか正確な値を求めるプログラムを作ることを考えてみた。

全部で5^{10}通りあることは確かだが，その中には同じようなものがかなり重複しているはずである。たとえば，M1がF1を選ぶときの場合の数である5^9通りとM1がFiを選ぶときの5^9通りの構造は同じはずであり，M1がF1を選ぶときについて調べた結果を5倍すればすべての場合について調べたのと同じ結果が得られるはずだ。それだけでも，計算時間は50時間を10時間に減らすことができる。かなり現実味を帯びてきたが，もう少し工夫する余地がありそうだ。この5^9通りの中に同じ構造を見出して，もっと少ない場合だけをチェックすればよいようなうまいアイデアが要求されることとなった。

そこで考えたのは，男子の指名の仕方と女子の指名の仕方の両方を考えるのではなく，男子の指名の仕方だけについて考え，それを分類できないかということだった。男子を固定すれば女子の指名の仕方を全て調べてもそれは5^5通りだからせいぜい10分のオーダーしかかからない。すると，たとえば男子全員がF1を選ぶ場合とF2を選ぶ場合は同じだということに気がついた。そのような男子の選び方を次の7通りに分類した。α(5)(全員が同じ女子を指名)，β(4,1)，γ(3,2)，δ(3,1,1)，ε(2,2,1)，θ(2,1,1,1)，λ(1,1,1,1,1)



γ(3,2)



ε(2,2,1)

すると，このそれぞれの場合の代表的な例を作って，その場合のデータを調べ，またそれぞれのケースが何通りあるのかを調べて，それらを元に全事象について考察すればよいはずだ。その結果，次のようなことがわかった（資料4）。

男子の選び方の場合の数		女子の選び方によるカップル数の分布					
		0	1	2	3	4	5
α	5	0	3125	0	0	0	0
β	100	500	2125	500	0	0	0
γ	200	750	1625	750	0	0	0
δ	600	800	1600	650	75	0	0
ε	900	900	1425	700	100	0	0
θ	1200	960	1360	660	135	10	0
λ	120	1024	1280	640	160	20	1

カップル数	場合の数	確　率
0	2764880	0.2831242
1	4581225	0.4691183
2	2088800	0.2138935
3	316200	0.0323789
4	14400	0.0014745
5	120	0.0000123

3.5 この事例から示唆されること

まず第一に，コンピューターを使えば，シラミ潰し法的なやり方もかなり可能にはなるが，(この問題のように）それで済ますにはかなり時間的，空間的な計算量がかかるものも少なくない点が示唆される。そういう意味では，コンピューターは，単純な方法ですべてを解決してくれるような存在ではなく，むしろ，単純な方法の限界を示唆し，よりよい関係を見出すことの大切さを示唆する存在と言える。（この事例の場合でさえ，α～λにたどり着く前には，いくつもの「使い物にならない場合分け」の失敗があった。）

また，第二に，プログラムには必ずバグがつきものであるが，プログラムが正常に動いているかどうかのチェックをするためには，自分で典型的な事例をいくつか見出したり，また，比較的簡単な関係を見出したりすることも必要になってくることが示唆される。例えばこの事例の場合，α～λの場合の数を組合せ的に考え直すこと等が相当するであろう。

そして第三に，いろいろなデータを提供してくれ数学的探究の範囲を拡大してくれると同時に，バグによる誤謬も含んでいる可能性があるため，いろいろな方法によって検証することが必要となる点は，かなり実験的な要素を含んでいるということが示唆される。

4．手続き的側面からの数学的対象の見直し

数学的探究においては，前述したように，手続き的側面から数学的対象を捉え直すことがよくある。そのような過程は，むしろ純粋数学に結びついた概念等を扱う場合などにおいて多く現れるが，筆者の探究事例の中では，コンピューターの利用が関連して，そのような過程が刺激されたものもあった。本章では，そのような事例を１つ挙げておく。

4.1 問題の出発点

これは，ある高校での授業に際し，三角関数の加法定理のあたりの指導案を考えていたときに思ったことである。従って，元々三角関数の定義は，三角比の拡張として与えられていて，そこから導き出される性質として，三角関数の加法定理等が位置づいていた。

そのとき思ったのは，sin x やcos x を高校で学ぶが，実際に値を求めるのは，せいぜい90°,45°,30°などのかなり限定された角に関してのみに過ぎないということであった。もちろん，定義と，いくつかの角についての計算の方法を知っていて，必要なときに電卓等が使えるなら，それで十分なのであろうが，可能性としてはどうなのかと，次の問題を考えてみた。

問題4.1
高校数学の範囲では，どの程度の角に対して三角関数の値を正確に求めることが可能なのか。

4.2 加法定理等の再解釈

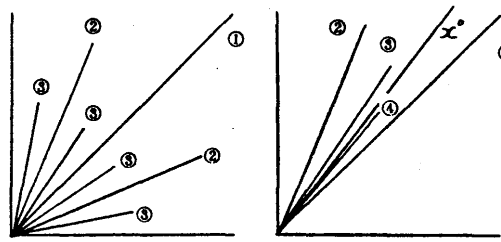
そこで，加法定理，半角の公式等の意味を考え直し，「＝」を「等しい」ではなく，「～によって計算可能である」または，「～によって定義される」と読み直してみた。すると，半角の公式が意味するのは，90°の三角関数の値がわかっていれば，45°の値も，22.5°の値も，つまり（$90/2^n$）°に対する三角関数の値は必然的に決まってしまうということであるのに気がついた。そして加法定理は，それらの角の和，つまり$(90*k/2^n)$°に対する値を必然的に決めてしまうことを意味するのである。しかし，正確な値をいくつか求めてみると，

$$\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$$
$$\cos 22.5^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2$$
$$\cos 11.25^\circ = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}/2$$
$$\cdots$$

となり，実際には式も繁雑であり，どのような値になるのかはわからない。近似値の計算でよいのならば，コンピューターによって行うことは可能であろう。

4.3 プログラムの考察

考え方を図示してみると，次のようになる。



つまり，まず90°の半角で45°がわかる。a°とb°での値がわかっていれば加法定理で，a+b°での値が求まり，半角の公式で(a+b)/2°での値が求まるから，それぞれの中点に相当する角度での値が求まるのである。従って，任意のx°に対して，区間縮小法的に近似していけばよいであろう（資料５）。

4.4 実行と見直し

そこでまず，この方針に沿ってプログラムを作ってみた。結果としては，ある程度の近似値が得られることがわかった。もちろん，その誤差の範囲などについて考えてみることも示唆されたが，それ以上に意味があったのは，自分のアイデアで，sin x を構成することができることが，実際にプログラムの実行によって裏付けられたという事実であった。そして同時に，かなり少ない条件だけで三角関数が構成されうることへの驚きであった。

換言すれば，加法定理などは三角関数の性質というだけでなく，三角関数を定義しうるくらい強力な特徴なのである。

4.5 三角関数の特徴づけ

そこで，一体三角関数を構成するには，加法定理の他，どのような条件が必要なのか，つまり「どんな条件を満たす関数は，三角関数になるのか」という三角関数の特徴づけの問題を考えてみた。プログラムを実行することで，実際に三角関数が構成されるのだから，すなわちこのことはプログラムの中で暗黙の内に使っている条件をexplicitにすることを意味する。そのことから得られたのは，次のものであった。

命題4.2

次の条件(1) ～(6) を満たす
関数$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$は，一意的であり，
$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$　となる。

(1) $f(0)=0, f(90)=1$
　$g(0)=1, g(90)=0$
(2) $f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$
　$g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y)$
(3) $f^2(x/2)=(1-g(x))/2$
　$g^2(x/2)=(1+g(x))/2$
(4) $0\leqq x\leqq 90$において，
　$0\leqq f(x), g(x)$
(5) f,g は連続関数である
(6) $f(x+360)=f(x), g(x+360)=g(x)$

次に，この6つの条件をなるべく少なくしたり，あるいは，これと同値なものを探してみた。すると例えば，

①(1) の条件は本質的には，ある2点でのf,g の値を与えればよい。しかし，最も単純なのは(1) であろう。

②(2), (3) のどちらかを，
　$f^2+g^2=1$　に代えてもよい。

③(4) は，おそらく最小周期を与えることとほぼ同値ではないか。（予想）

④(6) の周期性は，f が奇関数，gが偶関数であることと同値。さらに省略可能であることがわかった。

⑤現在の方法では，$\mathbb{R}$内でのdense な点の値しか決定可能でないから，(5) は不可欠。

等が得られた。

例えば，次のように命題を修正することができる。

命題4.3

次の条件(1) ～(5) を満たす
関数$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$は，一意的であり，
$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$　となる。

(1) $f(0)=0, f(90)=1$
　$g(0)=1, g(90)=0$
(2) $f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$
　$g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y)$
(3) $f^2+g^2=1$
(4) $0\leqq x\leqq 90$において，
　$0\leqq f(x), g(x)$
(5) f,g は連続関数である

4.6 この事例から示唆されること

この事例は，ある意味では，コンピューターに関係せずに提示しても何の違和感も感じない例であろう。だが，第一に示唆されるのは，加法定理等を，「～によって計算可能」あるいは「～によって定義可能」と解釈し直してみようという意識は，(コンピューターがなくても思うことではあるが) コンピューターを利用しようという気持ちによってより強調されていたのではないかという点である。実際，高校での授業の終りに，「（コンピューターに興味がある人は）加法定理や半角の公式等を使って，三角関数の値を近似的に求めるプログラムを作ってみなさい」という課題を提示したところ，ある生徒はプログラムを製作してきたが，そのような課題意識なしには，加法定理の別の解釈の可能性などはなかなか考えないのではないだろうか。

第二に示唆されることは，この事例では，

コンピューターを，いわばアイデアの実現装置として使っていることである。近似値の計算であるということは，実質的にはあまり問題にはなっていない。そういう意味では，前に挙げた例とはかなり違った使い方をしていると言えよう。

5．結語

本稿においては，数学的知識の手続き的側面に注目し，数学的知識の一つの特徴は手続きの実行可能性（計算可能性）が保証されている点にあること，しかし同時に，それは可能性であって，実際にそれを実行し，データを集めながら数学的探究は進められていくため，コンピューターの利用により，計算可能性が高まることは，数学的探究に影響を及ぼすことを指摘した。そして，その影響の及ぼし方として4つのタイプを取り上げるとともに，特に3つのものについては筆者自身による探究事例の記述と分析を行った。

事例から示唆されることをまとめよう。まず第一に指摘できるのは，コンピューターの使用は，データをより正確に，より早く，より組織的に収集することを可能にするが，しかし，コンピューターを使用したからといって，それだけで探究が終了するわけではないという点である。換言すれば，コンピューターは数学的探究の1つのモードを拡大してくれるが，それに伴って，数学的探究全体の過程を見直すことが必要になるのである。ここでの事例では，コンピューターの利用に適するような問題の変形，収集したデータから予想される仮説の証明のような，コンピューターを使わない数学的探究でも生じるような過程も関与しているし，また場合によっては，それまでは複雑すぎて扱えなかった問題をコンピューターで扱う場合にも，新しい洞察が必要とされたりしている。

そして第二に指摘できるのは，プログラムにはバグがつきもののため，データが正しいかどうかをチェックする必要が生じ，そのためにも典型的な事例や関係を見出すことが重要になってくるという点である。コンピューターを使わないときでも，アイデアや推論の妥当性のチェックをする場合はあるが，コンピューターを使う場合は，その必要性がより高くなっている。そういう点は，かなり実験としての側面が出ているところであろう。

第三に，教育におけるコンピューターの使い方は，一般教育の枠内で扱うべき部分，教科教育独自の枠内で扱うべき部分を分けて考えるべきであると同時に，数学教育の枠内においては，それが数学的探究の中でどのような役割を果たすのかという観点から考える必要があるという点を指摘できよう。

本稿で扱った事例は，筆者自身のものなので，そこから導けるものは少ないが，事例をより広範に集めながら，数学的探究の中での役割を分析していく手掛りにしていきたいと考える。

注

1.両方とも教育学の文献データベースで，
Resources in Education
Current Index of Journals in Education
の略である。

2.主としてJ.Dewey "Logic - The Theory of Inquiry",Ch.20 'Mathematical Discourse', 1938, Irvington を基にしている。なお，この章に関連することとして，筆者は次のものをまとめている。
「数学的探究における『転化』について」
筑波数学教育研究,vol.4(1985),pp.11-34
「数学的探究における『可能性』について」
筑波数学教育研究,vol.5(1986),pp.1-11

3.たとえば，1988^{1988}を5で割ったときの余りを求めよという問題の場合は，直接計算しなくてもよい手続きを考えるであろう。
（ある高校の入試問題）

資料１：
分銅の問題で，
３つの数を与え，
それらで計れる
重さを求める
プログラム

```
10 '   weight-1
20 '分銅の問題のために
30 '          飯島康之
40 DIM X(30) : K=0
50 INPUT A1,A2.A3
60 FOR I1=-1 TO 1 : FOR I2=-1 TO 1 : FOR I3=-1 TO 1
70 K=K+1 : X(K)=A1*I1+A2*I2+A3*I3
80 NEXT I3 : NEXT I2 : NEXT I1
90 FOR I=1 TO K : FOR J=I TO K
100 IF X(I)<X(J) THEN GOTO 120
110 X0=X(I) : X(I)=X(J) : X(J)=X0
120 NEXT J : NEXT I
130 FOR I=1 TO K
140 PRINT X(I) ;
150 NEXT I : PRINT
```

資料２：
ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ5-5
のための シラミつぶし 法
による プログラム
(2-2の 場合)

```
10 ' ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ 5-5 について
20 '    ｻﾞ しらみつぶし
30 '          飯島康之   1988.1.26
35 DIM M(6).W(6).C(6)
36 FOR I=1 TO 6 : M(I)=0 : W(I)=0 : C(I)=0 : NEXT I
40 FOR I1=1 TO 2 : M(1)=I1
50  FOR I2=1 TO 2 : M(2)=I2
60   FOR J1=1 TO 2 : W(1)=J1
70    FOR J2=1 TO 2 : W(2)=J2
80       L=0
90        FOR I=1 TO 2
100       IF W(M(I))<>I THEN 120
110`       L=L+1
120       NEXT I
130      C(L+1)=C(L+1)+1
140    NEXT J2
150   NEXT J1
160  NEXT I2
170 NEXT I1
174 N0=2^(2*2)
175 PRINT "ありうる全ての場合の数は ";N0 ;"通りであり"
180  FOR I=1 TO 3
190  PRINT I-1;"ｶｯﾌﾟﾙできる場合の数は";C(I);"   その確率は";C(I)/N0
200  NEXT I
```

資料３：
ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ5-5
のための モンテカルロ 法
による プログラム と
計算結果

```
10 '    FCM-1
20 ' ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ 5-5 について
30 '    ﾓﾝﾃｶﾙﾛ
40 '           飯島康之   1988.1.26
50 INPUT "試行回数"; N0
60 T$=TIME$
70 DIM   M(6).W(6).C(6)
80 FOR I=1 TO 6 : C(I)=0 : NEXT I
90 FOR I1=1 TO N0
100 FOR I=1 TO 5 : M(I)=INT(5*RND)+1 : W(I)=INT(5*RND)+1 : NEXT I
110           L=0
120           FOR I=1 TO 5
130           IF W(M(I))<>I THEN 150
140           L=L+1
150           NEXT I
160            C(L+1)=C(L+1)+1
170 NEXT I1
180 PRINT "    ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ  5-5 について"    :PRINT
190 LPRINT "    ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ  5-5 について"    :LPRINT
200 PRINT "ﾓﾝﾃｶﾙﾛ法では";N0 ;"回の試行で"  : PRINT
210 LPRINT "ﾓﾝﾃｶﾙﾛ法では";N0 ;"回の試行で"  : LPRINT
220  FOR I=1 TO 6
230  PRINT I-1;"ｶｯﾌﾟﾙできた場合の数は";C(I);"  その確率は";C(I)/N0
240  LPRINT I-1;"ｶｯﾌﾟﾙできた場合の数は";C(I);"  その確率は";C(I)/N0
250  NEXT I
260 PRINT : PRINT T$;"~~";TIME$
270 LPRINT : LPRINT T$;"~~";TIME$
280 T1$=TIME$
290 H=VAL(LEFT$(T1$.2))-VAL(LEFT$(T$.2))
300 M=VAL(MID$(T1$.4.2))-VAL(MID$(T$.4.2))
310 S=VAL(RIGHT$(T1$.2))-VAL(RIGHT$(T$.2))
320 SS=H*3600+M*60+S
330 PRINT "所要時間は";SS;"秒"
340 LPRINT "所要時間は";SS;"秒"
```

```
     ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ  5-5 について

ﾓﾝﾃｶﾙﾛ法では 1000 回の試行で

 0 ｶｯﾌﾟﾙできた場合の数は 268    その確率は .268
 1 ｶｯﾌﾟﾙできた場合の数は 475    その確率は .475
 2 ｶｯﾌﾟﾙできた場合の数は 228    その確率は .228
 3 ｶｯﾌﾟﾙできた場合の数は 27    その確率は .027
 4 ｶｯﾌﾟﾙできた場合の数は 2    その確率は .002
 5 ｶｯﾌﾟﾙできた場合の数は 0    その確率は 0

14:37:32~~14:38:13
所要時間は 41 秒
```

資料4：フィーリングカップル5-5のためのシラミ潰し法の改善版とその結果
(part I-III)

```
10 '  fc-1
20 ' ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ 5-5 について
30 ' ｻﾞ しらみつぶし  改良版  Part I
40 '                  飯島康之   1988.1.26
50 T$=TIME$
60 DIM MAN(6).WOMAN(6).CASE(7.6)
70 II=1
80 FOR I=1 TO 6 : MAN(I)=0 : WOMAN(I)=0 : NEXT I
90 FOR I=1 TO 7 : FOR J=1 TO 6 : CASE(I.J)=0 : NEXT J : NEXT I
100 FOR I=1 TO 5 : READ  MAN(I) : NEXT I
110 IF MAN(1)=0 GOTO 340
120      FOR J1=1 TO 5 : WOMAN(1)=J1
130       FOR J2=1 TO 5 : WOMAN(2)=J2
140        FOR J3=1 TO 5 : WOMAN(3)=J3
150         FOR J4=1 TO 5 : WOMAN(4)=J4
160          FOR J5=1 TO 5 : WOMAN(5)=J5
170              L=0
180             FOR I=1 TO 5
190             IF WOMAN(MAN(I))<>I THEN 210
200             L=L+1
210             NEXT I
220              CASE(II.L+1)=CASE(II.L+1)+1
230           NEXT J5
240          NEXT J4
250         NEXT J3
260        NEXT J2
270       NEXT J1
280  FOR J=1 TO 5 : PRINT MAN(J): : NEXT J
290  FOR J=1 TO 6 : PRINT CASE(II.J): : NEXT J  : PRINT
300  FOR J=1 TO 5 : LPRINT MAN(J): : NEXT J
310  FOR J=1 TO 6 : LPRINT CASE(II.J): : NEXT J  : LPRINT
320 PRINT : LPRINT : II=II+1 : GOTO 80
330 ' ---所要時間の計算------------------
340 PRINT : PRINT T$;"~~";TIME$
350 LPRINT : LPRINT T$;"~~";TIME$
360 TI$=TIME$
370 H=VAL(LEFT$(TI$.2))-VAL(LEFT$(T$.2))
380 M=VAL(MID$(TI$.4.2))-VAL(MID$(T$.4.2))
390 S=VAL(RIGHT$(TI$.2))-VAL(RIGHT$(T$.2))
400 SS=H*3600+M*60+S
410 PRINT "所要時間は";SS;"秒"
420 LPRINT "所要時間は";SS;"秒"
1010 DATA 1.1.1.1.1
1020 DATA 1.1.1.1.2
1030 DATA 1.1.1.2.2
1040 DATA 1.1.1.2.3
1050 DATA 1.1.2.2.3
1060 DATA 1.1.2.3.4
1070 DATA 1.2.3.4.5
1080 DATA 0.0.0.0.0
```

1	1	1	1	1	0	3125	0	0	0	0
1	1	1	1	2	500	2125	500	0	0	0
1	1	1	2	2	750	1625	750	0	0	0
1	1	1	2	3	800	1600	650	75	0	0
1	1	2	2	3	900	1425	700	100	0	0
1	1	2	3	4	960	1360	660	135	10	0
1	2	3	4	5	1024	1280	640	160	20	1

13:02:53~~13:09:50
所要時間は 417 秒

```
10  '  fc-2
20 ' ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ 5-5 について
30 ' ｻﾞ しらみつぶし  改良版  Part II
40 '
                  飯島康之   1988.1.26
50 T$=TIME$
60 DIM MAN(6).RIVALS(6).C(30)
70 FOR I=1 TO 6 : MAN(I)=0 : RIVALS(I)=0 : NEXT I
80 FOR I=1 TO 30 : C(I)=0  : NEXT I
90 FOR I1=1 TO 5  : MAN(1)=I1
100  FOR I2=1 TO 5  : MAN(2)=I2
110   FOR I3=1 TO 5  : MAN(3)=I3
120    FOR I4=1 TO 5  : MAN(4)=I4
130     FOR I5=1 TO 5  : MAN(5)=I5
140       FOR I=1 TO 6 : RIVALS(I)=0 : NEXT I
150      FOR I=1 TO 5 : FOR J=1 TO 5
160      IF MAN(I)<>MAN(J)  THEN 180
170      RIVALS(I)=RIVALS(I)+1
180      NEXT J : NEXT I
190      MT=0 : FOR I=1 TO 5 : MT=MT+RIVALS(I) : NEXT I
200      C(MT)=C(MT)+1
210     NEXT I5
220    NEXT I4
230   NEXT I3
240  NEXT I2
250 NEXT I1
260 FOR I=1 TO 30
270 IF C(I)=0 THEN 300
280 PRINT "C(";I;")=";C(I)
290 LPRINT "C(";I;")=";C(I)
300 NEXT I
310 PRINT : PRINT T$;"~~";TIME$
320 LPRINT : LPRINT T$;"~~";TIME$
330 TI$=TIME$
340 H=VAL(LEFT$(TI$.2))-VAL(LEFT$(T$.2))
350 M=VAL(MID$(TI$.4.2))-VAL(MID$(T$.4.2))
360 S=VAL(RIGHT$(TI$.2))-VAL(RIGHT$(T$.2))
370 SS=H*3600+M*60+S
380 PRINT "所要時間は";SS;"秒"
390 LPRINT "所要時間は";SS;"秒"
```

```
C( 5 )= 120
C( 7 )= 1200
C( 9 )= 900
C( 11 )= 600
C( 13 )= 200
C( 17 )= 100
C( 25 )= 5
```

12:53:39~~12:59:08
所要時間は 329 秒

```
10 '  fc-3
20 ' ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ 5-5  について
30 ' ｻﾞ しらみつぶし 改良版  Part III
40 '                    飯島康之 1988.1.26
50 DEFDBL T : DIM C(7), CASE(7,6), TOTAL(8,6)
60 FOR I=1 TO 8 : FOR J=1 TO 6 : TOTAL(I,J)=0 : NEXT J : NEXT I
70 FOR I=1 TO 7 : READ C(I) : NEXT I
80 FOR I=1 TO 7 : FOR J=1 TO 6 : READ CASE(I,J) : NEXT J : NEXT I
90 FOR I=1 TO 7 : FOR J=1 TO 6
100  TOTAL(I,J)=TOTAL(I,J)+C(I)*CASE(I,J)
110 NEXT J : NEXT I
120 FOR I=1 TO 7 : FOR J=1 TO 6
130  TOTAL(8,J)=TOTAL(8,J)+TOTAL(I,J)
140 NEXT J : NEXT I
150 PRINT "ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ 5-5 の確率についての計算結果"
160 LPRINT "ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ 5-5 の確率についての計算結果"
170 FOR J=1 TO 6
180  PRINT J-1;"ｶｯﾌﾟﾙ 成立は"; TOTAL(8,J)  ;TAB(30);"通り";
190  LPRINT J-1;"ｶｯﾌﾟﾙ 成立は"; TOTAL(8,J)  ;TAB(35);"通り";
200  PRINT TAB(35)  ; "その確率は";TOTAL(8,J)/5^10
210  LPRINT TAB(45) ; "その確率は";TOTAL(8,J)/5^10
220 NEXT J
1010 DATA 5,100,200,600,900,1200,120
1020 DATA    0,3125,   0,   0,   0,   0
1030 DATA  500,2125, 500,   0,   0,   0
1040 DATA  750,1625, 750,   0,   0,   0
1050 DATA  800,1600, 650,  75,   0,   0
1060 DATA  900,1425, 700, 100,   0,   0
1070 DATA  960,1360, 660, 135,  10,   0
1080 DATA 1024,1280, 640, 160,  20,   1
```

```
ﾌｨｰﾘﾝｸﾞｶｯﾌﾟﾙ 5-5 の確率についての計算結果
 0 ｶｯﾌﾟﾙ 成立は 2764880        通り  その確率は .2831242338545878
 1 ｶｯﾌﾟﾙ 成立は 4581225        通り  その確率は .4691183046788592
 2 ｶｯﾌﾟﾙ 成立は 2088800        通り  その確率は .2138935142485255
 3 ｶｯﾌﾟﾙ 成立は 316200         通り  その確率は .03237893968086162
 4 ｶｯﾌﾟﾙ 成立は 14400          通り  その確率は 1.474562717914002D-03
 5 ｶｯﾌﾟﾙ 成立は 120            通り  その確率は 1.228802264928335D-05
```

資料5：加法定理と半角の公式により，sin x , cos x を求めるプログラム

```
10 '  SIN-1
20 ' 三角関数の近似値を計算する
30 '       飯島 康之  1988.2.5
40 DEFDBL A-X
50 INPUT "X(0<X<90)" : X
60 MAX=90 : SMAX=1 : CMAX= 0
70 MIN= 0 : SMIN=0 : CMIN= 1
80 SUM=MAX+MIN : MID=SUM/2
90 SSUM=SMAX*CMIN+CMAX*SMIN
100 CSUM=CMAX*CMIN-SMAX*SMIN
110 SMID=SQR((1-CSUM)/2)
120 CMID=SQR((1+CSUM)/2)
130               PRINT MAX,MID,MIN,SMAX,SMID,SMIN
140 IF X>MID THEN MIN=MID : SMIN=SMID : CMIN=CMID : GOTO 160
150               MAX=MID : SMAX=SMID : CMAX=CMID
160 IF X<>MID GOTO 80
170               PRINT MAX,MID,MIN,SMAX,SMID,SMIN
180 PRINT "SIN(";X;"°)=";SMID
190 PRINT "COS(";X;"°)=";CMID
200 END
```