数学教育研究，第4号，上越教育大学，1989年，pp. 41-44

〔m，n〕型の星型多角形の内角の和について

飯島康之

0．序

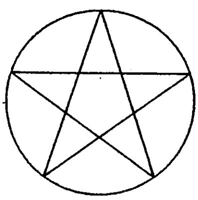
中学校において，凸多角形の内角の和の公式の一般化として，星型多角形の内角の和を扱うことがある。〔5，2〕型の星型多角形の内角の和などは証明問題としてよく扱われ，また一般の〔m，n〕型の星型多角形の内角の和の公式も帰納的に推測するところまでは，しばしばなされている(1)。しかし，〔m，n〕型の場合の証明は，簡単な記述しか見当たらない(2)。

そこで本稿では，星型多角形の内角の和に関する証明を，2通りの仕方で与えるとともに，若干の一般化ができることを示す。

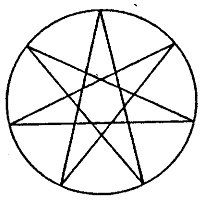
1．星型多角形の定義と，内角の和に関する公式

一般に，凸m角形の内角の和は（m－2）∠Rであるが，星型多角形の場合には，次の命題1に示す公式が成立する。

定義1　mとnは互いに素であるとする。円周上に，円周をm等分する点P_0, P_1, ..., P_{m-1}をとる。$P_0 P_n$, $P_n P_{2n}$, ...というように，順次，$P_{kn \pmod m} P_{(k+1)n \pmod m}$を結んでできる図形を<u>〔m，n〕型の星型多角形</u>と呼ぶ。(3)



〔5，2〕



〔7，3〕

命題1〔m，n〕型の星型多角形の内角の和は（m－2n）×2∠Rである。

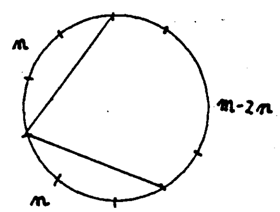
なお，n＝1のときは，正m角形の定義，および内角の和の公式となっている。

2．円周角に着目した証明とそれに基づく一般化

命題1の証明

1つの角に対して，対応する弧の長さを考えると，次の図より

$$\frac{m-2n}{m} \times 2\pi r$$



したがって，1つの角の大きさは，

$$\frac{m-2n}{m} \times 2\angle R$$

よって，内角の和は，

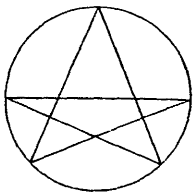
$$m \times \frac{m-2n}{m} \times 2\angle R$$

$$= (m-2n) \times 2\angle R \quad ■$$

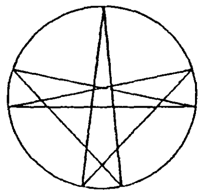
この証明では，円周を等分しているため，1つの角の大きさが得られているが，内角の和が一定であるためには，等分である必要はない。つまり，星型多角形の概念を次のように一般化したときに，命題2が成立する。

定義2　mとnは互いに素であるとする。円周上に一列に並ぶm個の点P_0, P_1, ..., P_{m-1}をとる。$P_0 P_n$, $P_n P_{2n}$ ....というように，順次，

$P_{kn \pmod m}$　$P_{(k+1)n \pmod m}$ を結んでできる図形を一般化された〔m, n〕型の星型多角形と呼ぶ。



〔5, 2〕



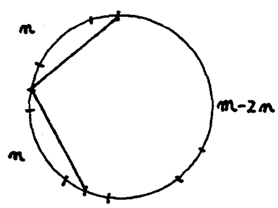
〔7, 3〕

命題2　一般化された〔m, n〕型の星型多角形の内角の和は
(m－2n)×2∠Rである。

なお，n＝1のときは，円に内接する凸多角形の場合の内角の和の公式となる。

命題2の証明

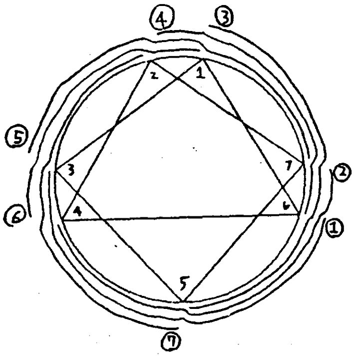
m個の点によって，円周はm個の小弧に分割されている。そして，それぞれの角に対応する弧は，右図のように，m-2n個分の小弧から成っている。



よって，角に対応する弧の和は，
m×(m－2n)個の小弧から成るため，
(m－2n)個分の円周と等しい。

内角の和はこれらの弧の和に対応する円周角の和であるから，(m－2n)×2∠Rとなる。■

注意1：このことを〔7, 2〕の場合で図示すると，次のようになる。



3. 内角＋外角＝2∠Rに注目した証明

次の補題を使えば，命題2は証明できる。

補題3　一般化された〔m, n〕型の星型多角形の外角の和は4n∠Rである。

命題2の証明

任意の角において，外角＋内角＝2∠Rであるから，

$\sum_{i=1}^{m}$(点P_iでの内角)＋$\sum_{i=1}^{m}$(点P_iでの外角)
＝Σ2∠R＝2m∠R

補題3より

$\sum_{i=1}^{m}$(頂点P_iでの外角)＝4n∠R

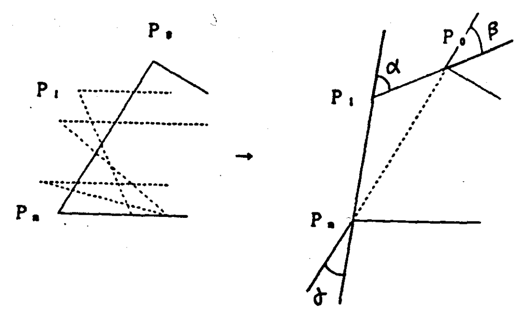
なので，

$\sum_{i=1}^{m}$(頂点P_iでの内角)
＝2m∠R－4n∠R
＝(m－2n)×2∠R　■

補題3の証明

一般化された〔m, n〕型の星型多角形の外角の和はn個の凸m角形の外角の和に等しいことを示すことによって証明する。

まず，与えられた多角形の最初の辺P_0P_nを2つの辺P_0P_1とP_1P_nに分けても，外角の和は変わらない。なぜなら，下図において増減を考えると，増えるのは∠αの部分，減るのは∠β，γの部分であるが，$\Delta P_0P_1P_n$に注目するば，α＋β＝γなので相殺してしまうからである。



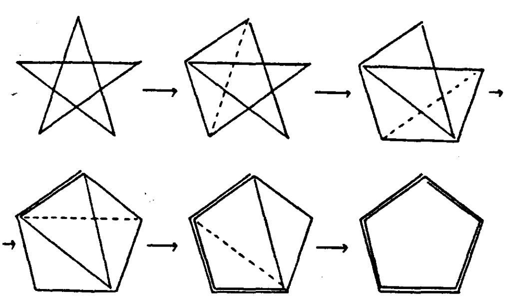
この操作をn回繰り返すことによって，最初の辺$P_0 P_n$をn個の辺$P_0 P_1$，$P_1 P_2$，....，$P_{n-1} P_n$に分けても，外角の和は変わらない。

さらに，この操作をすべての辺について行うならば，与えられた多角形の外角の和は，mn個の辺からなる多角形$P_0 P_1$，$P_1 P_2$，....，$P_{n-1} P_n$,...，$P_{m-1} P_0$の外角の和に等しくなる。このとき，任意の点をn回ずつ通ることになるため，これは，多角形$P_0 P_1 ... P_{m-1}$の回りをn回回ることに等しい。すなわち，与えられた星型多角形の外角の和は，多角形$P_0 P_1 ... P_{m-1}$の外角のn倍に等しくなるため，

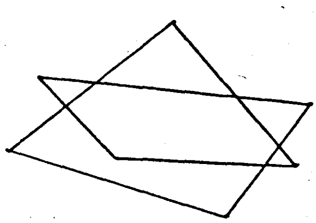
$$n \times 2\angle R = 2n\angle R$$

となる。■

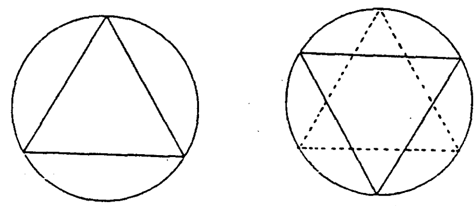
注意2：補題3の考え方を〔5，2〕の場合で図示すると，次のようになる。



注意3：証明の仕方からわかるように，この方法による証明の場合，必ずしも各点が円周上にある必要はない。たとえば，折線$P_0 P_n$, $P_n P_{2n}$,....，$P_{m-n} P_0$がある点の回りをn周していればよい。従って，更なる一般化が可能だが，本稿では述べないこととする。



注意4：星型多角形の定義では，mとnが互いに素であることとしているが，たとえば，〔6，2〕を下図のように〔3，1〕を二つ組み合わせたものとして解釈すればmとnは互いに素でなくても，公式は成立する。



注

1. この問題は，上越地区の中学校での数学教育に関する研究団体，Σ会の研究会で，谷口勝則先生（磯部中）の発表の中で指摘された。
2. Coxeter,H.S.M "Regular Polytopes", Dover,1973,p.94
3. Coxeter は，正n角形は点P_0を360/n°の回転を繰り返してほどこすことによって得られることに注目し，逆に，回転に着目するならばnは整数でなくてもかまわないことを式して，正n角形の概念を，nを整数から2より大きい任意の有理数n=p/d に拡張し，d>1 なる場合を星型多角形と呼び記号$\{\frac{p}{d}\}$で表している。

   また，正多角形$\{n\}$に対して成り立つ公式は星型多角形$\{\frac{p}{d}\}$に対しても$n=\frac{p}{d}$を代入するままで成立するものが多いことを指摘している。内角の和は，$n=\frac{p}{d}$をそのまま代入しても成立しないが，1つの内角の大きさを考えると，

   $(p-2d) \times 2\angle R \div p$
   $= (1-2d/p) \times 2\angle R$

$= (1-2/n) \times 2\angle R$
となり，正多角形での公式が一般化される。

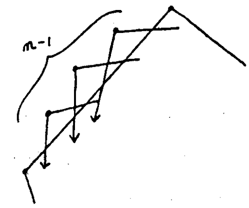
それ以外の長さ，面積に関する公式は，cot など三角関数が必要になるため，高校ならば {p/d } の記号の良さを示せるが，中学校では上述の例程度にとどまる。

そのため，星型多角形の定義をCoxeterに従って回転によって行うならば {p/d } の記号を用い，正n角形との関係を示すことが，また「円周上にm個の点をとって，n区間ごとに点を結ぶ」とするならば，〔m,n 〕の記号を用い，注意4を取り上げる方が妥当と思われる。

付記1：上記の証明は，もちろん，そのまま中学生に与えることを意図して書いたものではない。実際の指導場面の中で，上記の内容を扱うとすれば，〔5,2 〕などについて詳しく調べたり，一般の〔m,n 〕の場合を具体的にいくつか調べた後に，注意1や注意2に示したような変形を，action proofとして示すことが考えられる。そして，それによって，一般的な手続きを推測したり，又，元々定義されている〔m,n 〕型の星型多角形以外のどのような図形にまで一般化できるのか，それに基づくと，〔m,n 〕型の星型多角形の定義はどの程度一般化できるのか，などに焦点を当てた活動をすることが考えられる。

付記2：もちろん，ここに示した順序で，証明が形成されたわけではない。証明の形成過程を考察するための事例として，その過程を以下に簡単に記述しておく。
1.谷口先生より問題が提示され，内角の和は求めにくそうだけれど，外角の和が分かれば，問題は解決する」（命題2の2番目の証明部分）と考えた。」そのときの外角の和に関する証明は，補題3の証明とは違い，次のような（証明なしの）推測であった。

「元に戻るまでに，n-1 回やり過ごすのだから，n回転すると考えればよい。」



そして，研究会の場では，この推測は受け入れられ，納得していただいた。
2.後日，上述の証明が分かりにくいので，もう一度説明してくれないかと，ある人から尋ねられたので，上述の推測の図的な意味などを説明したのだが，納得してもらえなかった。そこで，この推測の直接的な証明を考えたのだが，すぐに思いつかなかったため，注意2に示した変形を考えてみた。それによって，補題3の証明が作られた。同時に，その証明ならば納得していただけた。
3.明確な文章にするため，〔m,n 〕などの定義を調べてみた。Coxeter「幾何学入門」などにその定義を見出せたのだが，考えていたのと違い，回転に基づくものであった。そして，正n角形の一般化として，すべての角や辺の長さが同じものだけが扱われていた。この場合，角の大きさなどは一意的に決まってしまうので，内角の和はあまり面白いテーマにはならない。そこで，それらの一般化として，命題2及び補題3の証明のアイデアを記述できないかと考えた。
4.{m/n } の場合の簡単な証明方法を考えると，円に内接する性質を使えば，円周角の大きさに帰着できること，つまり円周の大きさに注目すれば簡単に計算できることに気付いた（命題1の証明）。同時に，内角の和を求めるためならば，弧の和が求められればよいため，弧の大きさが等しくなくても構わないことに気付いた（命題1の第一の証明）。
5.以上をまとめ，星型多角形の内角の和に関する2通りの証明方法と，それに基づく若干の一般化として，ここにまとめた。