

作図の構成的な性格とcomputerによる支援について
- 九点円の作図に関する数学的探究に焦点を当てて -

愛知教育大学
飯島康之

0. はじめに

本稿では、作図の構成的な性格について明確にすると共に、その機能をソフトウェアの中に実現することによって、様々な数学的探究がcomputerによって支援されることについて論じる。この研究は、元々筆者が上越教育大学在任中に、ある授業を契機に、その後試行錯誤を重ね続けている研究であるため、まず発端となった授業と、そこで生じた問題意識を明らかにする。続いて、作図の構成的な性格、そして現在のCAD やLOGOとの関連性を議論し、最後に、出発点の九点円に戻って、九点円の作図に関する数学的探究の場合、どのような点でcomputerが数学的探究を支援するかを明確にする。

1. 発端 - 九点円の作図から -

1.1 授業の中で扱った九点円

問題の発端は、1988年の2学期の初等幾何学演習の授業でのことであった。テキストは矢野健太郎著「幾何学の有名な定理」¹⁾で、最初の中心的な内容は九点円であった。担当の学生がその部分について説明し、定理の内容についてみんなで議論した。九つの点を通るという事実の不思議さ、証明の特徴などを扱うのと一緒に、作図のことも扱った。

1.2 いろいろな九点円を作図したい。

担当者がきちんと理解しているかどうかを確かめたり、またゼミの参加者の理解を深めるために、いろいろな質問をするのだが、そ

の中の一つとして、「九点円はどうやって書いたらいいのか」という質問をしてみた。黒板に書くときには、大体テキストの図と同じ図を書くわけだから、作図のことなどあまり考えていない。テキストの図とは異なる三角形にしたときに、九点円がどうなるかを問題にしたわけである。

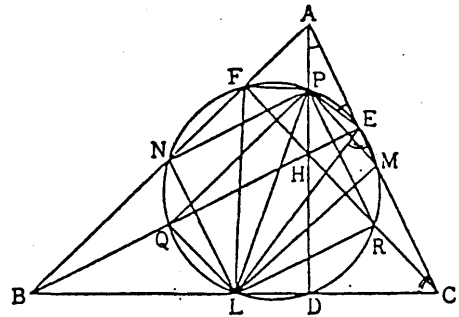


図-1 九点円²⁾

証明を見てみると、証明の中では、BCの中点LとAH(Hは垂心)の中点のPに注目し、LPが円の直径になることを、 $\angle LEP = \angle R$ などを示すことによって、証明をしている。だから、LPの中点を中心にLを通る円を描けば九点円がかける。さらに、証明の中の方法を生かして図を書くすれば、LPが動かないように変形できると、仕組みがわかりやすいと思えるのだが、どうしたらうまく処理できるだろうか。また、証明で使われたものが、作図のときにも最も効率がよいとは限らない。9つの点を通る円が九点円。円は3点が決めれば書けるわけだから、9つの中の3つを掴まえば、それを元にして書けるはずだ。このように、いろいろな作図方法を検討してみた。

1.3 三角形が変化すると九点円はどのように変化するのだろうか

作図方法はわかったが、コンパスと定規を使った作図では、かなり慣れないとうまく作図できない。「それでは、来週までに、いろいろな図を書いてくることを担当者の宿題にしよう。」ということになった。

彼はいくつかの図形を作図してきてくれたのだが、正確な作図はなかなか難しい。ただランダムにいろいろな三角形を描いて作図しても、はっきりと「わかった」という感じにならない。外接円をまず書いて、ある一点を変形していくと、九点円も変化していくことなども分かったが、作図から理解しなおすことも、証明を読むのとは違った理解を深めていくことを感じた時間であった。

彼は毎週、その作業をいろいろな観点から作図をし、参加者はその度に、作図の持つ「事実を示す重要性」と「正確な作図の煩雑さ」を味わった。そして、同時に、私自身は、**computer**などを使って、「正確な作図をしてみたい」という希望が強くなってきた。

2. 作図の構成的な性格

2.1 作図の対象としての九点円

九点円を証明の対象としてでなく、作図の対象として考えると、いろいろなことが分かってきた。例えば、九点円の作図は、証明の道筋を追えば、

- LPを直径とする円

であるが、条件から調べると、他の作図方法もある。例えば、

- 各辺の中点からなる三角形の外接円
- 各頂点から対辺に下ろした垂線の足からなる三角形の外接円
- 垂心と各頂点との中点からなる三角形の外接円

でもある。作図ということ考えると、中点からなる三角形の外心が最も簡単なようだが、

必ずしもそう考える必然性はなく、他のものでも構わない。このように考えると、「作図」をどのように行うかということは、必ずしも決まりきった手順を決められた通りに実行するというだけのことではなく、図をどのように見直すかということが強く結びついた活動であることが分かってきた。

2.2 関数としての作図

三角形を動かしたときに九点円はどう変化するかという問題を考えると、作図というのは、ある意味での関数であることがわかる。つまり、普通の関数の場合、

$$f : x \rightarrow y$$

において、 x が変化すると y も変化するという状況を、 x がどう変化するとき、 y がどう変化するかということで、関数の性質を調べるということになる。例えば、九点円を同じように考えると、3点の位置によって九点円の位置が決まるので、

$$f : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \Delta x_1 x_2 x_3 \text{の九点円}$$

という形で捉えることができる。そして、図形の性質を調べるということは、この関数的な観点から捉えると、作図のもとになっているいくつかの点（初期値あるいは独立変数）を変化させたときに、できる図形（従属変数）がどのように変化するのか、あるいは何が変わらないのかと捉えることができる。

2.3 構成的に積み上げられていくものとしての作図

以上のように考えると、ほとんどの作図は関数として捉えることができるのだが、同時に、別のことにも気が付く。例えば、九点円の作図を考えてみると、これは他の作図とは全く関係のない作図というわけではなく、各辺の中点の外心なのであるから、次のようにいくつかの作図を段階的に積み上げて構成できるものであることに気が付く。

九点円: 点A,B,C → 円O

作図 元にするもの 構成されるもの

中点: A,B 点D

中点: B,C 点E

中点: C,A 点F

外接円: D,E,F 円O

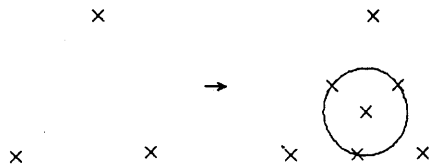


図-2 手続きとしての九点円

ただし,

外接円 :X,Y,Z→O

作図 元にするもの 構成されるもの

垂直二等分線: 点X,Y 直線L1

垂直二等分線: 点Y,Z 直線L2

交点: 直線L1,L2 点O

円: 点O,X 円O

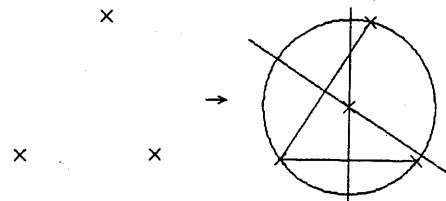


図-3 手続きとしての外接円

このように考えると、作図というものは、基本的な作図がいくつか定義されていると、それらの組み合わせを階層的に構成していくことによって、つまり、基本的な作図の組み合わせだけでなく、一度構成された作図は次の作図では一つの基本的な作図のように使っても構わないという意味で、階層的に構成していくことによって、新しいものを生み出していくことができるものであることが分かるのである³⁾。

2.4 学校数学における作図の

構成的な側面の不足

このような、幾何的な対象が作図によって構成されていく側面については、例えば、小

学校での垂直の定義に見られるように⁴⁾、学校数学の中にも入っていることは確認できる。しかし、例えば、関数については、それに対して四則演算 $f+g, f-g, f \cdot g, f/g$ や合成 $f \circ g$ や微分、積分などによって、様々なものを生み出していける側面が非常に重視されているのと比較すると、ほとんど全く無視されていると言ってもいいほどの扱いしか受けていないことが分かる。

その理由には、いくつかのものが推定できる。例えば、中学校以降の数学では主として論証の方に重点が置かれているため、あまり作図は重視されないこと。また作図自体のもつ煩雑さは、それを主要な指導内容とするにはしなり大きな困難点となること。さらに、上記の作図の構成的な側面は、関数の場合と比較して複雑であり、また数学的な内容としての発展がそれほどないことなどである。

しかし、だからと言って、今後同じような状況のままでよいとは限らない。実際、後で見ると、作図における煩雑さを除くと、作図の持つ本質的な重要性がより強調され、より探究的な学習ができる可能性が開かれてくる。そして同時に、そのような支援を computerで行うためには、この構成的な側面を explicitにすることが重要になってくるのである。

そこで、このような捉え方が、特に既存のソフトウェアなどと比較して、どのような点を支援しようとしているかを次に明らかにしていこう。

3. computerによる作図の支援

3.1 CAD による作図の欠点-静的な構成-

最近のソフトウェアの充実には目を見張るものがある。特に、学校教育の中での様々な活動を大きく変えるものも登場してきた。例えば、上越教育大学附属中学校では、様々な教科で様々なソフトウェアを利用しているが、

音楽の時間に利用している作曲のための支援ソフトは、画面上に試しに書いた楽譜をそのまま演奏してくれるため、楽譜を非常に身近なものにし、作曲という、以前では限られた生徒しか楽しむことができなかった活動を、すべての生徒が簡単に楽しめるようにしてかれている。実際、このソフトの人気は、休み時間にcomputerを使いに来る生徒の多くがこのソフトを使うためにやってくることからわかるのである。

劇的な変化が生じたのは、音楽だけではない。美術の時間にcomputer graphics によって行う描画や技術の時間にCAD を使って行う製図など、図形処理のソフトもある。しかし、数学では何がどう変化したのかを考えると、このような劇的な変化が見られない。その原因はいろいろあると思えるが、その基本的な問題点は、数学的な目から見た図の処理というものが、定式化され、プログラムが構成されるということがなされていないからではないかと考える。

例えば、「図を描く」ということを考えてみる。多くのCAD や、お絵描きソフト、またワープロに付属している描画機能などを考えてみると、基本的な作図メニュー、例えば、「直線を引く」「円を描く」「雲型定規」などが備わっている。そして、描いた図の拡大縮小をすることもできる。したがって、作図というものが構成的なものとして捉えられているから、紙の上にコンパスと定規で描くのと同じようなことができるようになってはいる。そしてまた、3D-CADの場合、そのような図を3次元で描いたものを回転させたときに見方がどう変化するかを提示してくれる。従って、ある意味では、手で行うことはほぼ機能的には実現しているし、3D-CADにおいては、空間直観を豊かにしてくれるような動的な扱いを実現してくれているのだが、しかし、それでも、数学的な見方を実現してはいないと思えるのである。

つまり、一言で表現するとすれば、それらが扱っている図は静的な図であり、定式化されているのは、静的な図形観なのである。作図を手続きとして認識しているとしても、それは決まりきったことを実行するだけの機能であって、初期値によって、異なる図形が構成されるという意味での関数としては考えられていないし、まして、階層的に構成可能な関数ではないのである。

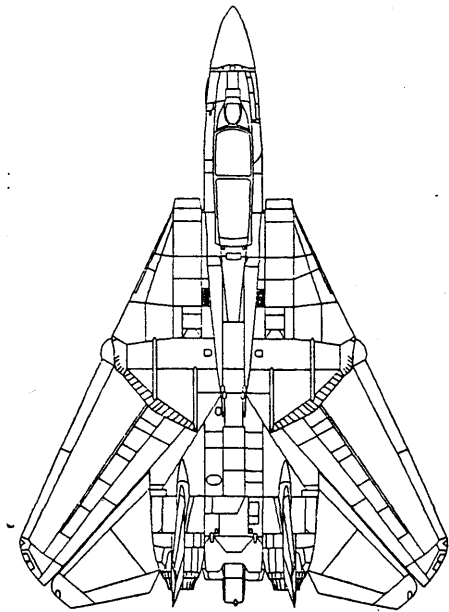


図-4 CADによる作画例⁵⁾

3.2 一般のCADにおける図形の静的な扱い

CAD が描く図がどうして数学の授業ではあまり役に立たないのかをまず、原理的な面から考えてみよう。CAD が主として支援しているのは、設計図のようなものの作図である。その例が図-4 に挙げてあるが、このような図を手できれいに描き上げることは難しいし、まして修正のための書き直しなど非常に大変であるが、computerを使えば、そのような作業は非常に簡単に行えるようになる。そして、手作業で行う設計という作業をより容易にするために必要なことは、「正確に作図をすること」「ある部品、(例えば窓)を拡大縮小したり、別の場所に移動したりすること」「3次元的存在である建築物を、建設する前に

その完成の様子を提示できるようにすること」などであろう。これらを実現するために必要とされるのは、算数・数学科で批判される「静的、個別的(要素的), 有限的な図形観」⁶⁾で十分なのである。換言すれば、そのような図形処理という観点から考えると、数学の授業では、かなり特殊な図形の見方を必要としていると言ってもよいのかもしれない。

3.3 数学の授業で必要とされる動的な図の扱い

逆に、数学の授業で必要な図を作るには、普通のCADでは不適切であることを具体的な例から考察してみる。

例えば、簡単な例として、中点連結定理を考えてみる。黒板に描かれる図、そしてまた教科書に描かれる図は、図-5のようなものであろうし、そのような図ならば、CADなどで描くことができる。しかし、数学の授業の中では、この図は、「動くもの」あるいは「連続的なもの」として捉えることが要求される。A, B, Cがどのような状態であっても、必ず $MN \parallel BC$ であり、 $MN = BC/2$ であることを理解することが、数学の授業の中での一つの目標である。従って、図-6のような図を教科書の中で与えたり、教材として、辺AB, ACを輪ゴムで作り、Aの位置がどのような変化しても中点連結定理が成立することを提示したりする。そのような見方が図に対する見方であるのに対して、一般のCADでは、そのような図の処理ができないところが、数学の授業から見て不十分な点なのである。

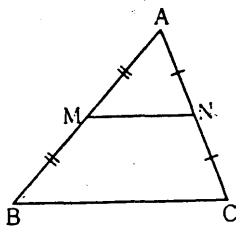


図-5 中点連結定理の図⁷⁾

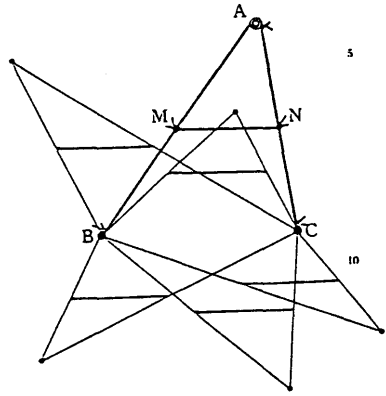


図-6 中点連結定理の三角形を動かす図⁸⁾

3.4 動的な図形観のcomputer上での実現

このような観点から考えると、数学の授業の中で、あるいは数学的探究の中で使うべきCADでは、動的な図形観が、何らかの形で実現されている必要がある。

おそらく、そのような試みとして、これまでの中で成功しているものの一つにはLOGOがあるであろう。筆者自身は、LOGOに関する研究はまだあまり行っていないので、LOGOの長所、短所に関する詳しい考察はここでは行えないが、ここでの議論に必要な点のみを考察しておく、次のようになる。長所の第一の点は、関数的プログラミングによって、ある作図手続きを、次の手続きでは、それを呼び出す形で利用したり、また再帰的に利用することによって、作図というものを構成的に捉えられること、そしてまた、プログラミングにおける数値などを変えることによって、様々な作図を行い、児童の探究的な活動が支援できる点にあると思われる。そして、第二の点は、タートルを媒介にして、次はどのような命令をすべきかということ意識しやすくしている点であると思われる。

3.5 LOGO以外のソフトウェアの必要性

しかし一方において、短所の第一点としては、いわゆる、初等幾何学の中の定理に相当するようなものを簡単に処理することが難しい点が挙げられるのではないだろうか。もち

ろん、これは筆者自身が、LOGOにあまり接していないせいかもしれない。LOGOに詳しい人ならば、それはこうプログラミングすればいいと教えてくれることかもしれない。

だが、重要なのは、「表現可能」であるという問題ではなく、「自然な形で」表現可能であるということである。表現可能であるということになれば、おそらく、どのような言語であっても、かなりの工夫を行えば、ほとんどのことは処理できる。さらに、アセンブラやCのような言語になれば、そのようなシステムを作ることさえ可能であろう。そうではなく、例えば、ある程度初等幾何の内容を知っている人がLOGOに少し接したときに、これなら「九点円の作図もこうすればすぐできそうだ」とか、「もとの三角形を変えたら、どうなるか」ということを、行えることが重要なのである⁹⁾。

そして、第二の問題点は、探究者が自分のやりたいことを表現するためには、プログラミングを媒介にしなければならない点ではないかと思う。専門的な利用という点で考えると、むしろ、プログラミングという形での表現は、より大きな問題を処理するために、必須の条件であろう。しかし、教育のような場を考えると、プログラミングの指導という、「準備」にあまり多くの時間を割くわけにはいかない。せいぜい、コンパスと定規を使うとしたら、こう作図するはずだという試行の単位とほぼ同等の処理、またそれをある程度簡単にまとめた単位の処理を行ってあげることが必要なのである。実際、「BASICとLOGOの難点は、プログラミングを必要以上に難しいものになっている。computerを使って自明な問題を解くように子どもは制限されているが、それは子どもが問題を理解できないからである、必要とされる程の複雑なプログラミングを書けないからである。」¹⁰⁾という批判があるもなされている。そしてまた、一般のソフトウェア開発においても、可能な部分では

きるだけ高水準言語を用いることが指摘されているが、これは特に教育の場合にも同じことなのである。つまり、扱うべき問題により密接に結びついたプログラミング環境を提供したり、簡単なコマンド群を提供することは、利用者が問題と感じるような問題と密接なcomputer環境を提供するという意味において、非常に重要なことなのである¹¹⁾。

さらに、第三に、より本質的な問題点は、図の処理に対するアプローチの仕方は、おそらく記号処理の場合とは比較にならないほど多様なものが存在するはずであり、そのような、様々なアプローチにおける図の扱い方を、様々な形でソフトウェアとして表現する必要があるという点である。実際、幾何学全体を考えても、様々な体系がある。そして、そのことが学校数学にも大きな影響を及ぼしている点は、代数の場合などと比較すると、非常に対照的であり、カリキュラムを作る上でも大きな支障になっている程である¹²⁾。おそらく、LOGOが表現している幾何学、すなわちタートル幾何学は、長さと角度の幾何学、あるいは、点のベクトル的な移動の幾何学とも言うべきものであろう¹³⁾。これを用いれば、多角形の外角の和の性質などは、他の幾何学の場合よりもより容易なアプローチができる。他の幾何学の内容でも表現できないというわけではない。しかし、例えば、円周角の定理が初等幾何学では基本的であり、また容易な扱いができるのに、解析幾何では難問になるように¹⁴⁾、たとえばタートル幾何学では表現しにくい幾何学の内容が存在することは確実である。そして逆に、それらを容易に表現しやすいような幾何学が存在するように、それらを容易に扱えるような、図形の処理に対するアプローチも複数のものがあるはずなのである。そしてとくに、学校教育の中での図形教育・幾何教育での支援を考えるためには、そのような様々な図形処理に対するアプローチをexplicitにし、より容易に利用

できるように整備することは、数学教育全体にとっても極めて重要な問題なのである。

以上の3点から、たとえ、LOGOが動的な図形観の一部の実現に成功しているとしても、LOGO以外の幾何図形へのアプローチの必要性が指摘されるのである。

3.6 初等幾何学により密接な図形の処理のための要件

このように考え、そしてまた目標として九点円の作図をより自由に行うことを掲げると、明確に表現すべき対象として、初等幾何学に密接に結びついた図形処理が浮かび上がってくる。そして、そのための要件として、次の項目を挙げておく。

- (1) コンパスと定規によって作図されるものを、ほぼ同じ感覚で、あるいはより容易な感覚で実現する。
- (2) タートルの代わりに、利用者が注目すべき対象として、初等幾何学で注目されるような、様々な幾何学的対象を含むようにする。
- (3) 特に、初等幾何学で使われる基本的な概念を簡単に実現できるようにする。
- (4) LOGOでは「タートルの動き」を基礎的な概念として図形の扱いを構築しているが、それに比肩できるような、図形の扱いに対する基礎的な概念を明確にする。
- (5) プログラミングによる入力をしなくても、メニューなどのより初心者に向けた入力方法で処理できるようにする。

3.7 要件を満たすソフトウェアの開発

筆者は、3.7の要件を満たすような幾何図形作図ソフトウェアGeometric Constructorを開発中である。このソフトの利用方法は、LOGOのようなプログラミングによる方法でなく、メニューによる選択によって可能であるため、むしろ、数学的探究のためのCADソフトと言った方が、他のソフトと比較するには

便利かもしれない。そこで、上述の要件に対して、このソフトウェアではどのように対処しているかを以下に述べておく。なお、以後の議論がうまく展開できるよう、3.6における順序によらず議論を進めていく。

- (2)まず、注目すべき幾何学的対象を、点、直線、線分、半直線、円の5つとした。
- (4)そして、図形に対して、作図とは、いくつかの幾何学的対象から新しい幾何学的対象を構成していく手続きとして、構成的なものとして捉えた。これが、このソフトウェアの最も中心的な特徴である。
 - (1),(3)さらに、そのような新しい幾何学的対象を構成する手続きとして、初等幾何学の中に盛り込まれている作図方法を取り入れた。そこでは、コンパスと定規の描画をそのまま実現するのではなく、コンパスと定規によって作図される幾何学的対象、たとえば、円の描画、平行線の描画などを行った。さらに、中には、角の n 等分線のように、コンパスと定規では作図不能のものも入れてある。これは、モーレーの定理などを扱えるようにするための措置だが、不要の場合には、メニューファイルから削除すればよいだけである。
 - (5)そして、利用に際しては、ほとんどメニューの操作のみ、つまりカーソルキーとリターンキー、そして、どうしても必要な時に数値による入力などを使うようにした。

4. computerによる九点円に関する数学的探究の支援

4.1 様々な変形とそれによる特殊化と推測の支援

プログラムを開発して、まず最初に行ったのは、様々な九点円を描いてみることであった。大体、どのような本を見ても、テキスト

に与えられているのと同じような図ばかりが与えられている。それを変わるとどうなるのか、またどうして、このような図ばかりが多いのかを考えながら、下図のように、九点円を描き、変形してみた。

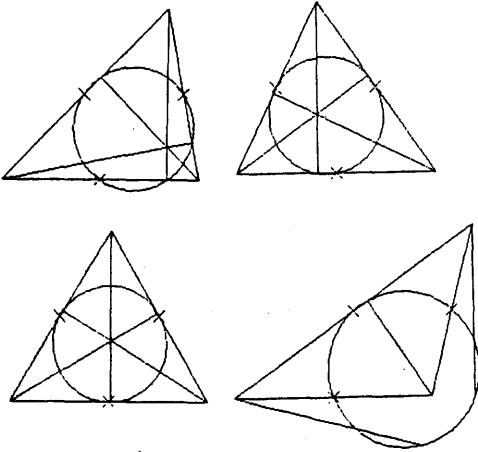


図-7 様々な九点円

最初はランダムに動かしていたのだが、そのうちに、いくつかのことに注意するようになった。まず、第一は、三角形が特殊な場合どうなるか、たとえば、直角三角形や二等辺三角形などの場合どうなるかを調べてみようということであった。そして、下図のような、いくつかの特徴的な場合があることがわかった。

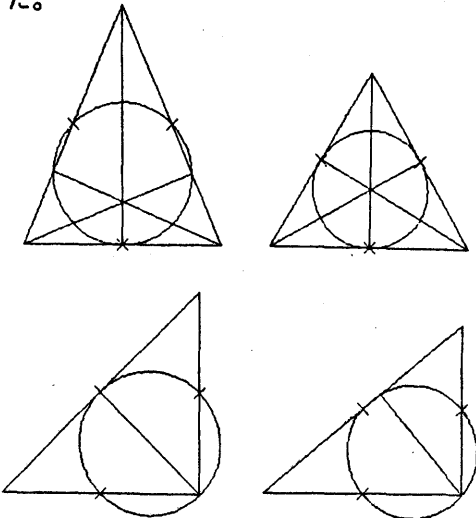


図-8 特殊な九点円

更に、三点の取り方を制限し、同じ外接円を持つような三角形の様々な九点円を作図してみた。この場合は、単に変化するだけでなく、いくつかの不変量が見つけれられる。そして同時に、いろいろな問題を見つけることができるようになった。例えば、

- ・九点円の半径と外接円の半径はどんな関係にあるのだろう。
 - ・九点円の軌跡はどうなるのだろう。
 - ・九点円の中心と外心が一致するのはどういう時だろう。
- などである。

このように、「変形できる」という要因は、最初は無目的にいろいろな図を描くということから始まるが、それは出発点であり、次に組織的に特殊化を行うことへと移行する。そして、何らかの推測と発見へと続いていくものなのである。従って、このソフトが直接支援している機能は図を動かすということであるけれども、それを探究者が使いこなすことによって、様々な特殊化や推測を容易に行えるように支援しているとも考えられるのである。

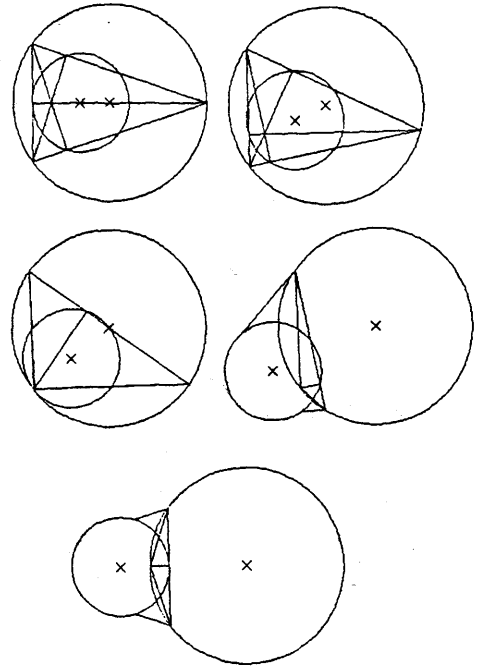


図-9 同じ外接円を持つ三角形の九点円

4.2 証明の理解における特殊化と

一般化の支援

また、このようなソフトは、単なる結果の検証のみに使うわけではない。その1つの例として、表明の内容を理解する場面が挙げられる。例えば、矢野氏のテキストでの証明を考えてみよう。ここでは、LPが直径になることを示すために、 $\angle LMP = \angle R$ などが証明されている。これに対する図として、図-1が挙げられているが、これを図-10のように、いろいろな方向に動かしながら理解することを考えてみる。

この図も元になる三角形が変化すれば当然変化する。直角三角形の場合には、2つの角は一致したり、鈍角三角形のときには2角の関係が変化したりする。このようにして、三

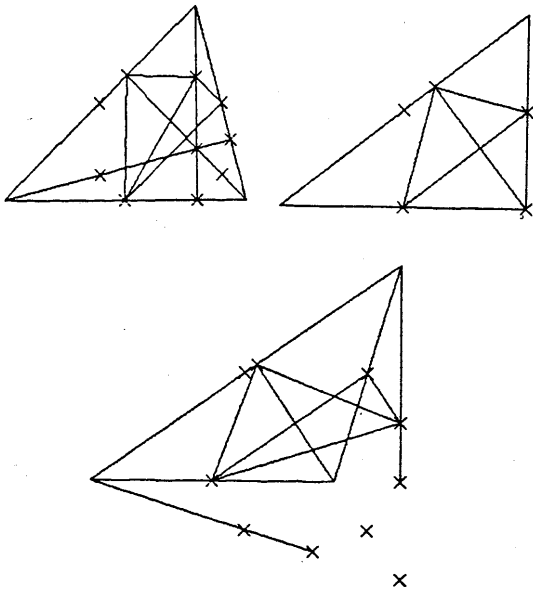


図-10 図-1を動かす

角形が特殊な場合に成り立つ特殊な関係、またどんな三角形のときにも成立する一般的な関係などが見出されるようになる。このようにして、一つの図を用いて一般的な内容が証明されていることに対して、様々な図を用いて、それに共通する内容を考えたり（一般

化）、ある図の場合だけに生じる特殊な現象を見つけたりする（特殊化）ことも支援の対象になるのである。

4.3 新しい性質の発見の支援

すでに上述の議論の中でも、「与えられたもの」をいろいろと変化させ、観察することから、様々な特殊化や一般化が導かれ、それによって、新しい性質の発見が導かれている。このような場面は決してここに限られたものではない。例えば、教室で扱いやすい問題提示を考えてみると、下図のように、九点円で登場する9つの点を表示し、三角形を動かす場合を考えてみよう。おそらく、教師の発問は、「どんなことが起こっているかよく観察して調べてみよう」という類のものであろう。

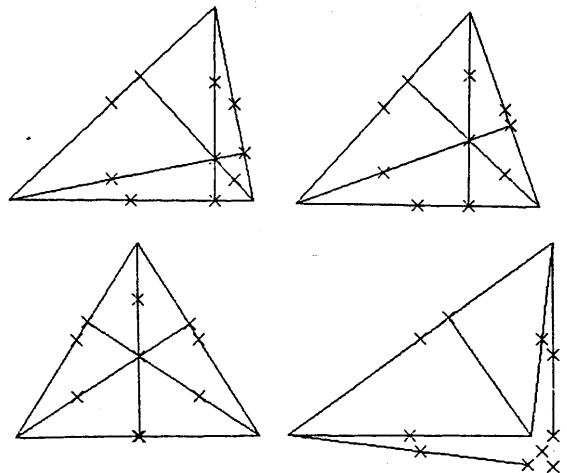


図-11 九点を取り、動かす

ここで生徒が発見すべき事柄は、かならずしも、9つの点を円が通るということだけには限らない。円と9つの点との関係はどうなっているのか、どんな特殊な場合については、まず簡単に証明できそうかなど様々である。

また、より探究的な活動をさせる場面を考えてみる。三角形について、外心、内心、重心、垂心、九点円の中心を描き、三角形を変

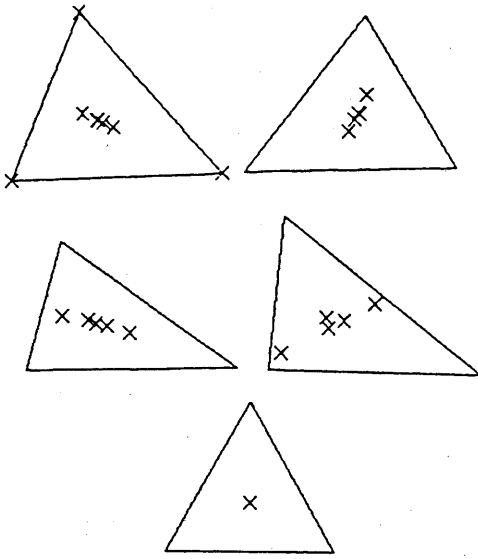


図-12 垂心，内心，外心，重心，九点円の中心を取り，動かす

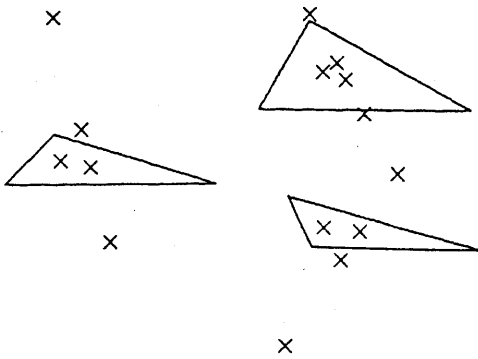


図-13 図-12の動かし方を変える

化させたときに，どうなことが生じるかを調べてみることを行っているとする。そこには，手で作図するのはかなり異なった発見，すなわち，「変化」とか「依存関係」というものを，より明確に意識した発見が生じているのではないだろうか。しかも，この5つの点の場合，最初はすべてが一直線上に並んでいるように見える。本当だろうか。多少変えてみる。やはり一直線のように見える。しかし，もっと変化させると，微妙な変化が生じて，

疑問が起こる。そして，図-13のように変形の仕方を変えると，その疑問は最早否定できない明白なものとなる。しかし，それにもかかわらず，4点は一直線上にある。これは本当だろうか。もともと3点が一直線上にあること自体珍しいことだから，疑わしい事実だし，内心の場合もうまくいかない場合が見つかったから，いろいろな変形をすると，うまくいかない場合もできてくるかもしれない。そして，どうしてもそれらが1直線上にあるままであることを認めざるを得なくなり，次には，それは証明の対象として意識されるようになる。

上記は，少し作り上げたストーリーのように見えるかもしれないが，筆者自身の利用経験では，主にこのような経過を辿るのが主であったし，おそらく，より探究的な課題を生徒に与えた場合，ほぼ同じような意味での発見の過程が支援されると思われる。

4.4 図形に対して導入される関数的な考え

このように図形を扱うことによって，本質的には，どのような思考が変化しているはずなのであろうか。おそらく，いろいろな観点から議論することができると思うが，本稿では，関数的な考えという観点から考えてみたい。つまり，このような扱いは，図形に対して関数的な考えを大幅に導入することを支援するということである。そのような関数的な考えの導入される場面として，典型的なものを以下に3つ挙げておく。

- (1) 作図そのもの
- (2) 図形の中の数量関係
- (3) 図形のある性質とある性質の関係

この中で，(1) はすでに議論してきているし，(2) は現行の授業でも意識されていることの拡大であるから，(3) を中心に述べておく。

もともと，ある性質からある性質が導かれるということは，定量的な問題ではなく，定

性的な問題である。従って、異なる性質から異なる性質が導かれるような場合は、別の問題に対する別の証明として、多くの場合認識されていると言えよう。それはあたかも、E.Cassirerが指摘した「<証明>というものが最初に興味を向けたのは、基本形式の統一ではなく、むしろその厳密な相違にであった」¹⁵⁾ という状況とほぼ等しいと言えよう。

しかし、その後の幾何学の変化について記述する中で、CassirerはJacob Steiner と、彼の位置の幾何学について「ある図形の感性的に可能なさまざまなケースは、ギリシャ幾何学の場合のように別々に捉えられ研究されるのではなく、すべての関心はいかにしてそれらが相互的に生み出されているかに集中している」¹⁶⁾ と述べているが、このような活動が、作図を豊富に行うことによって、より自然な形で可能になるのである。

そして、発見すべきものは、ある与えられた条件のときに起こる現象ではなく、どのような性質があるときに、どのような性質が導かれるのかということ、より関数的に捉えることであり、CassirerがSteiner における「直観」について、次のように表現した意味での直観をより容易に支援することなのである。「したがって、「直観」はここでは、偶然的で得意な内実を伴った<特殊の>図形に関わるものではなく、-ヤコブ・シュタイナーの意味での-幾何学的諸形態相互の<依属>の発見のためのものである。」¹⁷⁾

5. 結語

本稿においては、まず、ソフトウェア開発の発端となった、上越教育大学での授業での問題の在り方について、まず議論し、次に、作図をcomputerに処理させる上で重要な点となる、作図の構成的な側面について議論した。そして、computer上での作図処理について、まず、一般のCAD の場合はそこにおける図形

観が静的なものである点が大きな問題点となること、また動的な処理をする一つの例としてLOGOが考えられるけれども、LOGOでは初心者が簡単に初等幾何で扱うような内容を簡単に処理できないことなど、いくつかの問題点があること、そして、初等幾何学により密接な図形の処理をするための要件を明示した。そして、そのような要件を満たすものとして開発中である自作のソフトウェアでは、具体的に九点円の場合では、どのような数学的探究を支援するのかを考察した。最後に検討したソフトウェアの利用における関数的な考えに関するより分析的な考察や、実際の児童・生徒の数学的探究の中ではどのような点が見出せるのかなどに関しては、今後の課題として残っている。

なお、末筆になりましたが、本研究の核心部に関する考察と開発は、筆者が上越教育大学在任中に行ったものであり、その成果の一部として、こうして上越教育大学数学教室の雑誌に掲載できることは、筆者にとってこの上ない喜びです。上越教育大学数学教室の先生方、附属中学校の中野先生、さらにいろいろな方からのご示唆とご協力、そしてまた、教室の中にある自由な雰囲気によって、この研究が進めることができたことを心から感謝いたします。

注

1. 矢野健太郎「幾何の有名な定理」, 共立 1981
2. Ibid., p. 28
3. この節に関するより形式的な定式化などは、拙稿「Computerにおける図形の動的な扱いについて-幾何図形ソフト開発のための基礎的考察-」, 筑波数学教育研究, vol.9(1990),印刷中 に記述されている。
4. 教科書での記述としては、

「2つの直線が交わってできる角が直角のとき、この2つの直線は垂直であるといえます。」啓林館、新改訂 算数 4年上, p.87,1988

などが挙げられる。

5. 一般的なCAD ソフトCANDY 3 による作図例である。
6. 前田隆一「算数教育論」, 金子書房, 1979, p.47
7. 啓林館 「改訂 中学校 数学2」, 1990,p.160
8. 大日本図書 「改訂 中学校 数学2」 1988,p.109
9. この点に関しては、特に教育のことを考える場合、理論的に「表現可能」であることと、現実に「表現可能」であることを区別する必要があるのではないかと筆者自身は考えている。すなわち、どこでボーダーラインを引くのが妥当かはわからないが、たとえば、30行以内とか、50個のキー操作以内などである。

もちろん、このような基準も利用環境によって、また利用する言語仕様によって、大きく変わるのももちろんである。構造化言語であり、局所変数と大域変数の区別がなくなれば、プログラミングの技能が少し高まれば、表現可能なプログラミングの行数なども飛躍的に大きくなるはずであろう。

10. Grogono,P. 'Meaning and Process in Mathematics and Programming', FLM, vol.9(1989),p.19
11. この点については、いくつかの点から支持することができる。

たとえば、ソフトウェアの開発に当たって、できることは高級言語で処理せよということは、いくつかのソフトウェア開発のための本の中で見出すことができる。

また、言語によっては、高級言語で処

理できるところは高級言語でプログラミングをし、低級言語によって、より細かい作業を行ったり、高速化が必要な部分はアセンブラやC言語でプログラミングをして、最終的にそれらを組み合わせるプログラムの総体を構築するマルチランゲージプログラミングも行われている。

これらから示唆的であるのは、人間が管理できるプログラムの長さはそれほど長くないこと。そして、大きいプログラムというものは、小さいものの集積体として構築されるという点である。

従って、換言するならば、任意のものが表現できるという形で提示するのも一つの方法かもしれないが、もう一つの方法としては、ある程度、簡単に処理できるような形でライブラリなどを充実したり、入力環境などを整備して、ほとんどアプリケーションソフトの感覚で利用できるような環境を提供するという方法も重要ではないかということである。

12. Allendoerfer,C.B. 'The Dilemma in Geometry', Math.Teacher, LXII(1969), pp.165-169
13. この点は、「動的」の意味の解釈が本研究における場合とLOGOで考えられているものと異なることを示唆している。すなわち、LOGOにおける「動的」とは、いわば図形をある点が運動した軌跡としてみるという意味においてであり、本研究における「動的」とは、作図手続きを一つの関数としてみるという意味においてである。
14. 阿部浩一 「幾何教育の混迷」, 大阪教育大学紀要, vol.16(1967), 第V部門, 第1号, pp.109-122
15. Cassirer,E. 「実体概念と関数概念」, みすず書房, 1979, p.82
16. Ibid. p.91
17. Ibid. p.92