# 授業における数学的知識の発展的構成に関する研究

## －連立方程式の学習場面における新たなモデルの導入を通して－

三　木　俊　幸
上越教育大学大学院修士課程２年

### １．はじめに

筆者は、現場の授業実践において「自分の持っている数学的知識を使って問題解決に取り組もうとせず、教師から正しい解答が示されるのを待っている」という生徒の姿を多く目にしてきた。しかし、一方で、このような生徒の実態は、授業を通して形成されてきたものであると考えられ、筆者の授業構成が生徒の実態を育てていた可能性もある。

まず、本稿では、連立方程式の授業場面で、「問題に対して、最も適切な解き方を提示し、その適用の仕方を学習させる授業パターン」が、なぜ繰り返されるのかを指導において用いられるモデルに焦点をあてて考察する。次に、この授業パターンを改善するために、Gravemeijer,K.(1997)のモデルの自己発展の理論を手掛かりとして、連立方程式の学習場面における新たなモデル(二次元表)に基づく教材展開の枠組みを構築する。そして、この枠組みに基づく実験授業を構想・実施し、その授業の中での抽出生徒の活動を分析・考察し、授業改善への示唆を得ることを目的とする。

### ２．筆者の考える数学授業の問題点と目指す授業の具体化

ここでは、連立方程式の授業場面を振り返り、筆者の考える数学授業の問題点を明確にする。そして、その問題点に対して、筆者の目指す授業を具体化する。

### 2.1　筆者の考える数学授業の問題点

筆者は、教科書(藤田他，1997, p.40)で示されている図 2-1 の問題と具体的なモデルを提示することで連立方程式の加減法を学習させようとしていた。


ノート４冊と鉛筆３本の合計の代金は 840 円,ノート２冊と鉛筆３本の代金の合計は 540 円です。ノート１冊の値段はいくらでしょう。

図 2-1.問題と具体的なモデル.

授業では、図 2-1 の具体的なモデルを操作することにより、生徒から「上の組み合わせから、下の組み合わせを引くと、ノート２冊の値段が 300 であり、ノート１冊の値段は、150 円である。」という、この問題を解決するためのアイディアが出された。そして、この具体的なモデルでの操作を「文字式で表すと、どのように表せるか」を生徒に考察させることにより、生徒自身が文字式の操作による連立方程式の解き方を創り出していくことができた。

改めて、こうした授業実践を振り返ってみると、図 2-1 のような具体的なモデルは、加減法による連立方程式の解き方を生徒自身が創り出していくためには、有効である。しかし、一方で、このような具体的なモデルは、文字式の形式に合うように作られたモデルであり、問題に対する解決のためのアイディアや最も適切な解き方を示してしまうことにもなってしまっている。

また、ここで使用した具体的なモデルは、「二つの数量の合計が２組示されている問題」では、生徒にとって考えるための道具として使われるが、問題の構造が変わってしまうと生徒にとって考えるための道具とはならないという現実があった。そのため、新たな問題に対しては、新たな別のモデルを示すことになってしまい、「問題に対して、最も適切な解き方を提示し、その適用の仕方を学習させる」という授業パターンの繰り返しを作りだしているとも考えることができる。

### 2.2　筆者の目指す授業の具体化

**2.1**では、筆者の考える数学授業の問題点を指摘した。そこで、ここでは、筆者の目指す授業を Gravemeijer,K.(1997)の示す、除法の学習場面における子どもの解き方の発展過程を参照しながら例示し、明確化する。

Gravemeijer,K.(1997)の示す除法の学習場面の例では、「81 組の保護者が、６組ずつテーブルにつくためには、幾つのテーブルが必要か」という問題に対して、生徒が次の解き方を創り出したことが示されている。

・反復的な加法(6 ＋ 6 ＋･･･)や加法に基づいた段階的乗法(1 × 6、2 × 6･･･)を使った解き方。
・10 × 6 を使った解き方。
・6 × 6 ＝ 36 を２倍し、36 × 2 に２組の 6 を加えた解き方。

そして、これらの解き方を比較した後の問題では、教師が 10 倍することを明確に示さなくても、多くの生徒が 10 倍して問題を解決したことが示されている。

更に、生徒が自分たちの解決方法を振り返ることで創り出した「10 倍して取り去る」というアイディアは、大きな数の問題を与えることで、生徒達にとって振り返る対象となり、「除数の分だけ取り去る」「除数を 10 倍して取り去る」「除数を 100 倍して取り去る」等の発展したアイディアを創り出したこと。そして、最終的には、生徒自身が「除数を何倍化してできるだけ密接に被除数から取り去る」というアイディアへと発展させ、形式的な筆算アルゴリズムを創り出したことが示されている。

筆者は、Gravemeijer,K.(1997)が示しているように、「新たな問題に対して、生徒が自分自身の扱える対象を振り返り、より洗練し発展した解き方を創り出す活動、更には、そのような活動を通して、最終的には形式的な数学的知識を創り出していくこと」を「数学的知識の発展的構成」と捉える。そして、本研究において目指している授業は、数学的知識の発展的構成を促す授業である。

## ３．授業を構想するための視点

ここでは、本研究において目指す授業を具体化するために、Gravemeijer,K.(1997)が示すモデルの自己発展の理論と４つの学習レベルについて考察する。

そして、連立方程式の授業を構想するための、新たなモデルとして導入する二次元表の可能性ついての分析・考察を行う。

### 3.1　モデルの自己発展の理論と４つの学習レベル

Gravemeijer,K.(1997)は、具体的なモデルの使用において、操作的な不具合が生じること、また、具体的なモデルを用いて、知識が獲得されたとしても、新たな問題に対しての応用は難しいことを指摘している。そして、問題解決の場面で生徒が用いた解決のためのアイディアや解き方が、新たな問題に対する振り返る対象であり、数学的知識を発展させるためのモデルとなり得ると捉えている。そして、生徒が数学的知識を発展させる以下の４つの学習レベルを示している。

**・状況的レベル(situational level)**

生徒が日常生活から得られた経験をもとにして活動するレベルである。除法の例では、何かを配ったり分けたりするという日常生活

の状況(situations)から得られた知識をモデルとして使用し活動するレベルである。

**・参照的レベル（referential level）**

生徒がそれぞれの問題に応じたアイディアや解き方をモデル(model of situations)として創り出すレベルである。除法の例では、81 ÷ 6 という問題に対しては「81 から 6 ずつ取り去る」、120 ÷ 8 という問題に対しては「8 を 10 倍して 120 から取り去る」、4000 ÷ 192 という問題に対しては「192 を何倍かして 4000 から取り去る」というように、それぞれの問題に応じた、それぞれのアイディアや解き方を創り出し活動するレベルである。

**・一般的レベル（general level）**

参照的レベルで、創られたモデル(model-of)が、場面の状況から離れ、そのアイディアや解き方自体が考察の対象へと発展するレベルである。除法の例では、参照的レベルで作られた「繰り返し取り去る」、「10 倍して取り去る」、「被除数を何倍かして取り去る」などのアイディアや解き方が、個々の問題に依存することなく、除法の問題では、「除数を何倍かしてできるだけ密接に被除数から取り去る」というアイディアや解き方を創り出す、数学的推論を行うためのモデル(model for mathematical reasoning)となるレベルである。

**・形式的レベル（formal level）**

標準的な数学の手続きや表記法（formal knowledge）を使って活動するレベルであり、形式的な数学的知識や表記法が使われていくレベルである。

状況的レベルは、生徒がそれまでの経験や学習から獲得している知識を使って活動する日常生活の中にある状況であることを考えると、参照的レベル・一般的レベル・形式的レベルという３つの活動の設定が、数学的知識の発展的構成を促す授業を構成するための基本的な枠組みとなりうる。具体的には、次の３つの活動である。すなわち、まず第１に、生徒がそれぞれの問題場面に対して、それぞれのアイディアや解き方(model-of)を構成していく活動（参照的レベル）。第２に、生徒が新たな問題に直面し、それまでのアイディアや解き方を考察の対象(model-for)へと発展させ、そして、それらを振り返る対象として、より洗練し発展したアイディアや解き方を構成していく活動（一般的レベル）。第３に、自分たちの創り出したアイディアや解き方を振り返り、それらのアイディアや解き方を形式的な数学的知識へと発展させていく活動（形式的レベル）である。

Gravemeijer,K.(1997)の示すモデルの自己発展の理論の特徴は、モデルを単なる問題を解決するためのアイディアや解き方を示すためのものとして捉えるのではなく、それぞれの問題に対して、生徒自身が用いるアイディアや解き方をモデル(model-of)として捉えていることである。更に、そのモデル、つまり、問題に対して生徒が実際に用いているアイディアや解き方が、新たな問題でより洗練され発展した解き方を創り出すための考察の対象(model-for)へと発展していくことである。

ここで、**2.1**で述べた筆者が考える数学授業の問題点に戻る。

筆者が連立方程式の授業場面で用いていた具体的なモデルは、問題を解決するためのモデルとして機能する。また、モデルでの操作を振り返ることにより、加減法による連立方程式の解き方を創り出すためのモデルとしても機能する。しかし、ここで使用されている具体的なモデルは、文字式の形式に合うように作られたモデルであり、問題に対する解決のためのアイディアや最も適切な解き方を含むモデルである。そのため、それらを示してしまうモデルともなってしまう。また、問題に対する発展性がなく、問題の構造が変わってしまうと、新たな問題を解決するための道具とはならず、新たな別のモデルを使用する

結果となってしまう。そして、このようにそれぞれの問題に対して、それぞれ別のモデルが提示されることにより、筆者が問題と感じる授業パターンの繰り返しを作りだしているとも考えることができる。

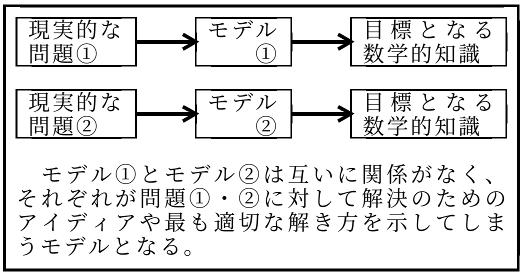


図 3-1.アイディアや解き方を示してしまうモデルを用いた授業構成.

従って、Gravemeijer,K.(1997)が示し、筆者の目指す数学的知識の発展的構成を促す授業を実現するためには、ある問題で使用されたモデルや解き方が、別の新たな問題に対して、考察の対象へと発展し、新たな問題を解決するためのアイディアや解き方を創り出す可能性を持っていること。更には、そのモデルを用いて考察を進めることにより、形式的な数学的知識を創り出せる発展的構成を促すモデルを設定する必要がある。

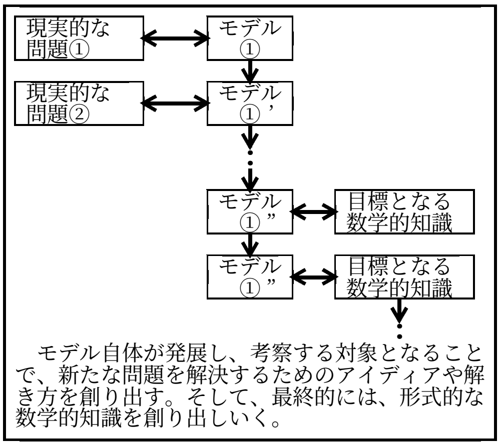


図 3-2.発展的構成を促すモデルを用いた授業構成.

## 3.2　新たなモデルの設定

**3.1**で述べたように、筆者の目指す授業を実現するためには、発展的構成を促すモデルを設定する必要がある。そこで、連立方程式の学習場面で授業を実現するための新たなモデルとして、Mathematics in Context (Romberg,T. *et al*, 1996a,b)という授業カリキュラムの中の二次元表に注目した。二次元表とは、図 3-3 の問題において導入される表である。以下では、二次元表のモデルとしての可能性を検討する。

問題

315cm の壁に沿って、60cm と 45cm の棚を隙間なく並べたい。それぞれの棚は幾つ必要か

問題に対する二次元表

| 45cmの棚の数 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 270 | 330 | 390 | 450 | 510 |
| 5 | 225 | 285 | 345 | 405 | 465 |
| 4 | 180 | 240 | 300 | 360 | 420 |
| 3 | 135 | 195 | 255 | 315 | 375 |
| 2 | 90 | 150 | 210 | 270 | 330 |
| 1 | 45 | 105 | 165 | 225 | 285 |
| 0 | 0 | 60 | 120 | 180 | 240 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

60cm の棚の数

図 3-3.問題とその問題に対する二次元表.

### 3.2.1　二次元表が発展的構成を促すモデルとして機能する可能性

まず第１に注目されるのは、二次元表は、問題に対しての役割が「問題の情報の記述法」から「未知数を求めるための手段」へと発展する可能性を持っている点である。

例えば、図 3-3 で示したような「２つの数量の組み合わせの中から、条件に合う組み合わせを見つける」という問題に対して、二次元表は、問題の情報を記述し、全ての組み合わせを表すことができる。そして、二次元表で表された数値から、問題で示された条件に合う情報を取り出すための便利な表として機能する。

そして、二次元表には、その中にある数の規則性を考察すると「二次元表の中に同じ向きと長さの矢印を入れると、その始点と終点の値の差は一定となる」という性質があることがわかる。この性質を理解すると、二次元表は、「問題の情報の記述法」から「未知数を求めるための手段」へとその役割を発展させることができる。

例えば、問題例 3-1 で示された問題場面を二次元表

ノート４冊と鉛筆３本の代金の合計は 840 円、ノート２冊と鉛筆３本の代金の合計は 540 円です。ノート１冊の値段はいくらでしょう。

問題例 3-1.

で表すと図 3-4 のように表すことができる。

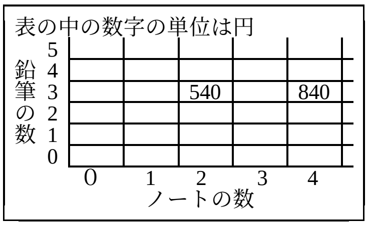



図 3-4.問題例 3-1 に対する二次元表.

そして、( 1,0) ( 0,1) の値がノート１冊、鉛筆１本の値段であることを考え、二次元表の性質を使うと二次元表を操作することで、ノートと鉛筆、それぞれ１つずつの値段を求めることができる。

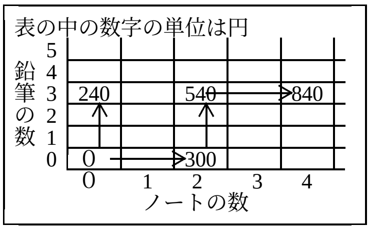


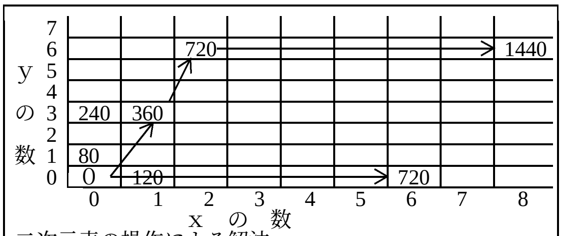

図 3-5.二次元表の操作.

まず、上で述べた二次元表の性質を適用すると、(2,3)と(4,3)の差 300 と１行目の(0,0)(2,0)の差は同じとなるから、(2,0)が 300 となり、(1,0)が 150（ノート２冊で 300 だから、ノート１冊は 300 ÷ ２ ＝ 150 円）であることが求められる。同様に、(2,0)と(2,3)の差を使えば、(0,1)の値 80 を求めることができる。

以上のように、二次元表は、問題に対しての役割が、「問題の情報の記述法」から「未知数を求めるための手段」へと発展する可能性を持っていることがわかる。

第２に、二次元表は、その操作を発展させ、その操作の過程を文字式として表現することで、文字式の操作による連立方程式の解き方を構成するためのモデルとなり得る。また、二次元表は、代数的な解法を確認するためのモデルとして機能することも考えられる。

例えば、図 3-6 の二次元表において、(1,3)の 360 と(8,6)の 1440 から、二次元表を操作し、(1,0)(0,1)の値を求める操作の過程は、図 3-6 の①～⑤になる。この操作を文字式の操作による連立方程式の解法として表現したものが図 3-7 である。このことから二次元表を操作し、(1,0)(0,1)の値を求める過程は、文字式の操作による連立方程式の解き方を創




二次元表の操作による解法
①(1,3)の 360 を２倍して(2,6)が 720。
②(2,6)の 720、(8,6)の 1440 の差が 720 だから、この差を１行目に適用すると(0,0)から(6,0)の差が 720 となり、(6,0)の値が 720 となる。
③(6,0)が 720 ならば、(1,0)の値は 720 ÷ ６で 120。
④(1,0)の 120 と(1,3)の 360 の差が 240 だから、この差を１列目に適用すると(0,0)から(0,3)の差が 240 となり、(0,3)の値が 240 となる。
⑤(0,3)が 240 ならば、(0,1)の値は 240 ÷ ３で 80。

図 3-6.二次元表の操作.

り出す時に振り返る対象としての機能を持ちうることがわかる。

$$\begin{cases} x+3y=360 \\ 8x+6y=1440 \end{cases}$$
$$2x+6y=720$$
①２倍した

$$\begin{aligned} 8x+6y&=1440 \\ 2x+6y&=720 \\ 6x&=720 \\ x&=120 \end{aligned}$$
②引いた　③

$$\begin{aligned} x+3y&=360 \\ x&=120 \\ 3y&=240 \\ y&=80 \end{aligned}$$
④引いた　⑤

図 3-7.二次元表の操作に対応する文字式.

また、形式的に与えられた連立方程式の解を代数的な解法で求めた解と、二次元表の操作で求めた(1,0)(0,1)の値を比較することにより、二次元表は連立方程式を代数的な解法によって解いた時の解を確認するためのモデルとして機能する可能性を持っている。

第３に、二次元表は、応用問題に対して発展する可能性を持ったモデルである。

例えば、問題例 3-1 に対しては、図 3-5 において、二次元表を操作し、(1,0)(0,1)の値を求めることで、ノートと鉛筆の値段が求められることを示した。ここでは、二次元表の使い方を発展させることで、二次元表が新たな問題に対しても解決のための モデルとして機能することを示す。

例えば、問題例 3-2 に対しては、図 3-8 のように二次元表を使い答

郵便小包を出そうと思い，料金を調べたら 630 円だった。80 円切手と 50 円切手を組み合わせて９枚はり，630 円になるようにするには，２種類の切手をそれぞれ何枚はればよいですか。

問題例 3-2.

を求めることができる。この問題に対しては、２種類の切手の合計の枚数が９枚となる(0,9)(1,8)･･･(9,0)の値の中から 630 円になる組み合わせを見つけることで、この問題を解決することができる。

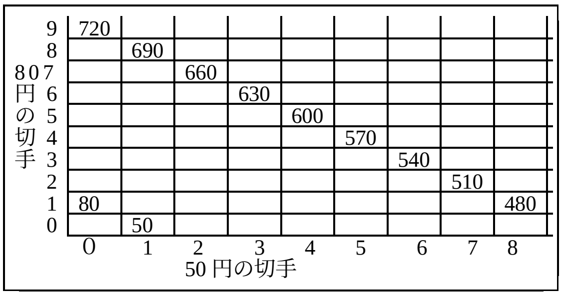


図 3-8.問題例 3-2 に対する二次元表.

以上のように二次元表は、ある問題で使用されたモデルや解き方が、別の新たな問題に対して、考察の対象へと発展し、新たな問題に対する解決のためのアイディアや解き方を創り出す可能性を持つモデルである。更には、そのモデルを用いて考察を進めることにより、形式的な数学的知識を創り出せるような発展的構成を促すモデルとして機能する可能性を持っている。このことを図式で表現したものが図 3-9 である。

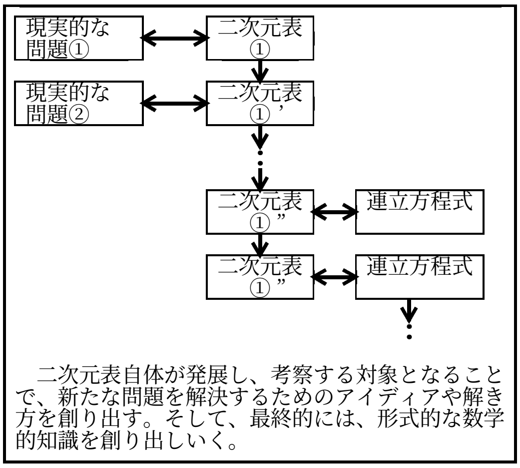


図 3-9.二次元表を用いた授業構成.

### 3.2.2 係数が負の範囲の連立方程式に対してモデルとして機能する可能性

先に示した図 2-1 のような具体的なモデルの１つの欠点として、係数が負の範囲に拡げられた連立方程式に対して、モデルとして機能しないということが挙げられる。これに対して、二次元表は係数が負の範囲にまで拡張された連立方程式に対しても機能する可能性を持っている。

例えば、$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ という定数項にマイナスの値を含む連立方程式の解き方を考える。二次元表では、この連立方程式の状況を二次元表の中の(3,1)の値が－１、(1,2)の値が８として表すことができる。更に、二次元表の操作として、図 3-10 のように、解を求めることができる。

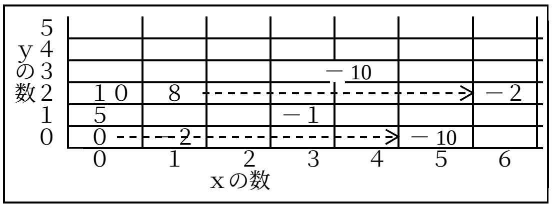


図 3-10.定数項にマイナスの項が入った時の二次元表の操作.

ここでは、まず、(3,1)の－１の値を２倍すると(6,2)に－２という値が入る。そして、(6,2)の－２と(1,2)の８の差である－ 10 を(0,0)から１行目に適用して(5,0)が－ 10 であることが求められ、この結果から(1,0)の値、つまりｘの値が－２であることを求めることができる。同様にして、(1,0)の－２と(1,2)の８の差を１列目に適用して、(0,2)が 10 であり、(0,1)の値、つまりｙの値が５であることが求められる。

また､例えば､$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$ のように係数が負の数となる項を含む連立方程式に対しても、二次元表はモデルとして機能する可能性を持っている。この場合、二次元表を図 3-11 のように拡張することが必要になる。

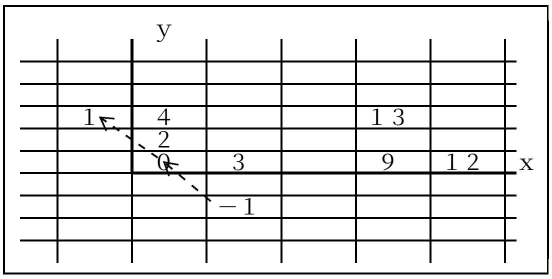


図 3-11.係数にマイナスが入った場合の二次元表の操作.

ここでの二次元表の操作は、まず、(1,-2)

の－１と(0,0)の０との差を使うと（-1,2）の値が１であることが求められる。そして、この(-1,2)の１と(3,2)の 13 の差 12 を(0,0)から適用すると(4,0)が 12 となり、(1,0)の値、つまりｘの値が３であることを求めることができる。そして、(3,0)の値が９であることが求められ、(3,2)の 13 と(3,0)の９の差を(0,0)から適用することにより、(0,2)が４、(0,1)の値、つまりｙの値が２であることが求められる。

以上のように、具体的なモデルでは、表現することが出来なかった、係数が負の範囲の連立方程式に対しても、二次元表はモデルとして機能する可能性を持っている。

### 3.2.3　連立方程式を解く文字式以外のアルゴリズムとして機能する可能性

二次元表は連立方程式を解く文字式以外のアルゴリズムとして機能する可能性を持ったモデルである。

先に示した図 2-1 のような具体的なモデルは、そのモデルが表している現実的な問題の状況、例えば、冊数や本数のような状況に依存したモデルとなってしまい、負の項を含む連立方程式の解法を例として示したように、形式的に与えられた連立方程式に対して、モデルの操作による解き方が保証されない。

これに対して、二次元表は、縦軸と横軸に与える現実的な場面の状況を、例えば「ノートと鉛筆」から「品物 A と品物 B」へ、更に「ｘの数とｙの数」へと、徐々に抽象化していくことで、問題の状況に依存しないモデルとなりうる。また、縦軸と横軸に与える状況を抽象化しても二次元表での操作は保証されているため $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ のように、形式的な連立方程式が与えられても、この式を解くための文字式以外のアルゴリズムとして機能する。

以上、**3.2**で分析・考察したように、二次元表は次の３つの可能性を持っている。

①発展的構成を促すモデルとして機能する可能性
②係数が負の範囲の連立方程式のモデルとして機能する可能性
③文字式以外のアルゴリズムとして機能する可能性

本研究では、数学的知識の発展的構成を促す授業を実現するため、特に二次元表が発展的構成を促すモデルであることに注目し、連立方程式の学習場面で二次元表を用いた実験授業を構想した。

## ４．二次元表を用いた連立方程式の授業構想

ここでは、**3.2**において連立方程式の学習場面における、数学的知識の発展的構成を促す新たなモデルとして分析・考察を行った二次元表を用いた授業構想について述べる。

授業を構想するにあたっては、**2.2**で考察した Gravemeijer,K.(1997)のモデルの自己発展の理論と４つの学習レベルの枠組みに基づき、生徒にとっての二次元表の位置付けが、次のように変化していくことをねらって、学習活動Ⅰ～Ⅳを設定した。

学習活動Ⅰでは、２つの数量の合計を素早く見つけ、求めたい数量の合計を見つけるための手段として二次元表を導入する。そして、文章題を解決するための情報の記述法として二次元表が使われていくように学習活動を設定する。

学習活動Ⅱでは、徐々に現実的な場面の状況から離れ、二次元表の中にある性質を考察する活動を設定する。そして、二次元表が２つの未知数のそれぞれ１つ分の値を求めるための model-of として使われていくように学習活動を設定する。また、生徒が二次元表の操作に慣れ、二次元表を(1,0)(0,1)の値を求めるために操作する対象へと発展させていくことをねらって学習活動を設定する。

学習活動Ⅲでは、連立方程式の解き方を文字式の操作として構成していく活動を設定す

る。ここでは、二次元表を操作し２つの未知数のそれぞれ１つ分の値を求める過程を文字式として表現していく活動を設定する。つまり、二次元表を連立方程式を文字式の操作として解く解き方を創り出すための model-for として機能させる学習活動を設定する。

学習活動Ⅳでは、係数が負の範囲にまで拡張された連立方程式の文字式による解き方を、係数が正の範囲での文字式の操作をもとにして構成していく活動を設定する。ここでは、具体的な活動の対象としては二次元表から徐々に離れるものの、二次元表が、係数が負の範囲にまで拡張された連立方程式を文字式の操作として解く解き方を意味付け・確認するためのものとして働くように学習活動を設定する。

以上のように、生徒にとっての二次元表の位置付けが、図 4-1 のように「①問題の情報の記述法→②未知数を求めるための手段（model-of）→③文字式に対しての考察の対象（model-for）→④文字式の操作を意味付け・確認するためのもの」というように発展することを意図して実験授業を構想した。

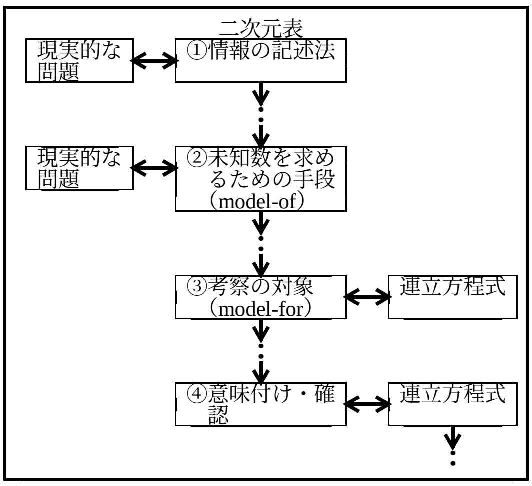


図 4-1.授業における二次元表の位置付けの変化.

## ５．実験授業における抽出生徒の活動の分析・考察

**４**で構想した実験授業を 2000 年６月、群馬県の公立中学校において、筆者が授業者として８時間実施した。実施にあたって、実験授業直前に、担当教諭が実施する授業に２時間、観察参観し学級の実態把握につとめた。また、観察参観した授業における生徒の活動の様子から２名の生徒を抽出した。

実験授業のデータは、授業全体の様子を教室後方からビデオカメラで記録した。抽出生徒の活動については、それぞれ１台ずつのビデオカメラを座席の脇に設置し、二次元表をどのように操作しているかを記録した。また、２名の抽出生徒に対して、授業実施日にインタビュー調査を実施した。インタビューは、筆者が抽出生徒２名に対して同時に行い、その様子をビデオカメラで記録した。

ここでは、二次元表のモデルとしての有効性を実証的に検討するために、抽出生徒である田中と向井（共に仮名）の活動を分析・考察する。

田中は、二次元表と上手く関わりを持ち、連立方程式の解き方を発展的に構成できた生徒である。向井は、二次元表の操作自体は発展させながらも、二次元表を文字式の操作に対する発展的構成を促すモデルとして機能させることができなかった生徒である。

### ５.１　田中の活動の分析・考察

二次元表を振り返る対象(model-for)として、文字式による連立方程式の解き方を構成する学習活動までの田中の活動を分析・考察すると、田中は、問題に対して振り返る対象を、問題で示された現実的な場面の状況から二次元表そのものや二次元表の操作へと発展させている。

ここでは、連立方程式の文字式による解き方を構成していく学習活動において、二次元表が文字式の操作に対する振り返る対象(model-for)として機能している活動、更にその後、振り返る対象が文字式の操作へと発展していく活動を中心に分析・考察を示す。

### 5.1.1　二次元表がmodel-forとして機能した活動

第６時における、$\begin{cases} 5x + 2y = 36 \\ 2x + y = 16 \end{cases}$ を解く問題での田中の活動では、二次元表が文字式の操作に対する model-for として機能している活動が見られた。

この問題に対して、「文字式の操作だけで解ける人は、実際に表を書く必要はない」という指示を教師が出した。個別解決において田中は、まず２ｘ＋ｙ＝ 16 を２倍してこの問題を解決しようとした。しかし、間違った式の操作をしてしまい、正しい値が求められないと活動する対象を二次元表に移した。そして、二次元表を埋めていくが、(2,0)に 16 という間違った値を入れてしまった。この後、二次元表での操作と文字式での操作を交互に行おうとするが、二次元表の中に間違った値を入れていることから、文字式の操作で求めた値と二次元表で求めた値が一致しないことに戸惑いを見せていた。

そして、田中は、図 5-1 の活動を行い正しい解答を出した。図 5-1 の活動では、式の操作からｘ＝４を求め、表を正しく書き直した後で、ｘ＝４を５倍し、５ｘ＋２ｙ＝ 36 から５ｘ＝ 20 を引くことで２ｙ＝ 16 を求め更に、その結果からｙ＝８を求めている。この文字式での操作は、(1,0)の値から、(5,2)の 36 と同じ列の(5,0)の値を求め、(5,2)と(5,0)の値の差を１列目の(0,2)に適用するという二次元表での操作を文字式として表現したものであると考えられ、この活動では、二次元表が文字式の操作を意味付けするために振り返る対象（model-for）として機能していると考えられる。また、田中が最後に行っている二次元表での操作は、(5,0)の 20 と(0,2)の 16 を足した値が(5,2)の 36 になることを確認する操作であり、この操作によって、(1,0)(0,1)の値が正しいことを確かめようとしている操作である。この操作から二次元表が文字式の操作を確認するために振り返る対象（model-for）として機能していると考えられる。

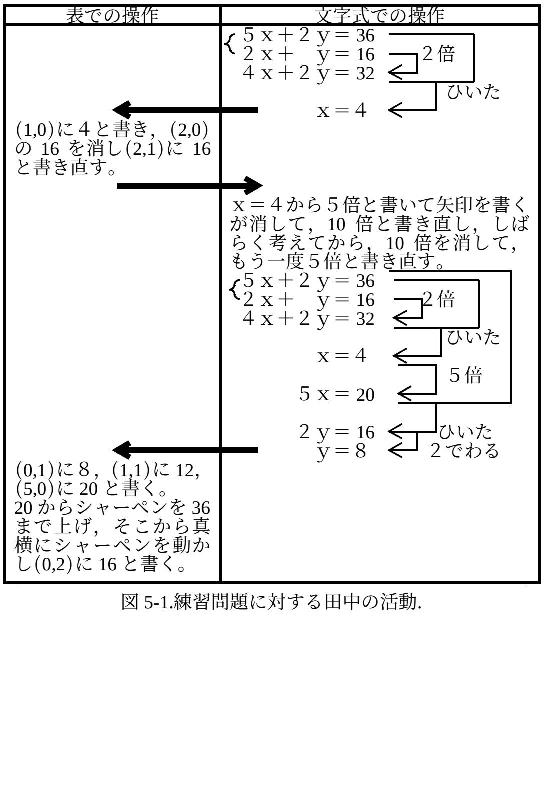


図 5-1.練習問題に対する田中の活動.

そして更に、$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ 8x + 8y = 64 \end{cases}$ を解きなさいという問題においても、二次元表が文字式の操作を意味付けするために振り返る対象として機能していた。

田中は、この問題に対する個別解決の中で、次のように活動して、この問題を解決した。まず２ｘ＋２ｙ＝ 16 を４倍し８ｘ＋８ｙ＝ 64 とし、文字式の操作として解決しようとした。そして、二つの式を引き算した結果を０と書くが、その時点で、それまでに書いた式を全て消してしまった。そして、学習プリントで示されている空欄の二次元表の中に値を入れ始め、(2,2)に入れた値を倍にしていくと(8,8)の 64 と重なってしまうことに気がつき、２つの式は「表にあらわすと一つの直線上に二つともあらわされてしまうので求められない」という結論を出した。

この問題に対して、田中が出した結論は、解が１組の値に定まらないという不定な連立方程式を正確に意味付けしたものではない。しかし、この不定な連立方程式を意味付けする場面で、正確ではないにしても、田中は未知の問題に対して、二次元表での考察を振り

返り、二次元表での考察をもとにして、自分自身で新たな文字式での操作を意味付けしている。このことからも二次元表が文字式の操作を意味付けするために振り返る対象（model-for）として機能していたと考えられる。

### 5.1.2　文字式の操作が振り返る対象となる活動

第７時では、$\begin{cases} 3x+\ \ y=-1 \\ 4x+3y=7 \end{cases}$ を提示し、負の項を含む連立方程式の解き方を考察する問題を設定した。

この問題では、まず、二次元表の操作により解決し、その二次元表の操作による解決過程を文字式として表現するようにとの指示を教師が出した。

この問題に対して、田中は、図 5-2 の二次元表を書き解決しようとした。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 3 | 3.8 | | | | 7 | | | | | -3 |
| 2 | | | | | | | -2 | | | |
| 1 | | | | -1 | | | | | | |
| 0 | 0 | 0.8 | | | 3.2 | 4 | | | | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

図 5-2.田中の書いた二次元表.

しかし、ここで田中は、(4,3)の７と(9,3)の－３の差を４として、(5,0)に４と間違った値を入れてしまう。その結果、(1,0)に 0.8、(0,4)に 3.2、(0,3)に 3.8 という値を入れてしまった。田中は、3.8 ÷３が割り切れないことで、ここでの二次元表の操作に戸惑い二次元表を全て消し、もう一度、二次元表を書き直した。しかし、ここでも田中は、(4,3)の７と(9,3)の－３の差を７－(－３)＝ 10 としてしまい、(5,0)に 10 という間違った値を入れてしまった。その結果、(1,0)の値が２であるとの結果を出した。しかし、(4,0)の８と(4,3)の７という値から求めた(0,3)の値、－１が３では割り切れないことで、この操作が間違っていることに気がついた。そして、活動する対象を二次元表から文字式に移すと、３ｘ＋ｙ＝－１の式を３倍し、文字式の操作から、ｘ＝－２であることを求め、二次元表の(1,0)の値を－２と書き直した。

更に、９×(－２)＋３ｙ＝－３と立式し、ｙ＝５を求め、二次元表の(0,1)に５、(0,3)に 15、(0,2)に 10、(6,0)に－ 12 と書き、続けてもう一度４×(－２)＋３ｙ＝７と立式してｙ＝５を求めた。そして、最後に(5,0)の値を－ 10 と書き直した。

ここで、田中は二次元表の中に負の数が入ったことにより、(4,3)と(9,3)の値の差を正確にとれず戸惑いを持ち、model-for として構成されている二次元表の新たな操作を形式的な文字式の操作から意味付けしようとしている。そして、文字式を操作することにより求められた値から、(4,3)と(9,3)の値の差が－ 10 であり、(5,0)の値が－ 10 になることを意味付けしており、形式的な文字式の操作から model-for である二次元表の新たな操作を意味付けする活動を行っていると考えられる。

このように、田中は二次元表から文字式の操作を意味付けするだけでなく、文字式の操作から負の数が含まれるという新たな二次元表の操作を意味付けするという活動､つまり、model-for である二次元表と文字式との相互の行き来を行うことにより、両者の関係を創っていったと考えられる。

## 5.2　向井の活動の分析・考察

向井の活動を分析・考察すると、向井は二次元表の操作自体は十分に発展させている。しかし、向井の活動では、二次元表が文字式の操作に対する model-for として機能していると考えられる活動は見られなかった。ここでは、向井の発展させた二次元表の操作を特定する。そして、二次元表が model-for として機能しなかった原因についての分析・考察を中心として示す。

### 5.2.1　二次元表の操作の発展とmodel-forとして機能しなかった原因の分析・考察

第５時で提示した図 5-3 の問題に対して、向井は次のように二次元表を操作し、(1,0)(0,1)の値を求めた。(0,0)に０と書き、(0,0)から(1,2)の７まで右に１上に２数え、続けて(1,2)から(2,4)を数え、(2,4)に 14 と書いた。以降同様に(2,4)から順番に数えて、(3,6)に 21、(4,8)に 28、(5,10)に 35 と書いた。更に、(3,6)の 21 から(3,11)の 31 まで数えると(0,5)に 10 と書き、(0,1)に２と書いた。そして、しばらく考えた後、(0,5) の 10 から(2,4)の 14 まで下に１右に２数え、続けて(2,4)から(4,3)まで同様に数えると(4,3)に 18、同じように(4,3)から数えて(6,2)に 22 と書いた。その後、22 －７を筆算して(1,2)の７から(6,2)の 22 まで数えると、(0,0)から(5,0)まで数えて(5,0)に 15 と書き、(1,0)に３と書いた。

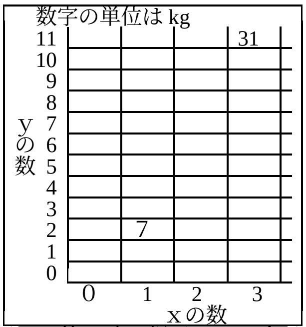


図 5-3.第５時で提示した二次元表.

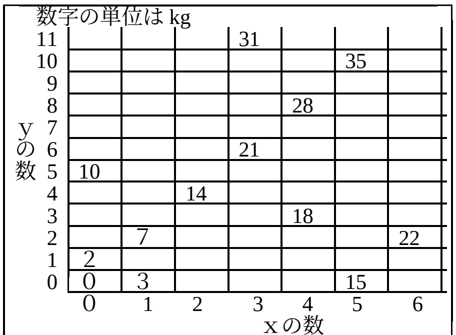


図 5-4.向井の書いた二次元表.

ここで向井が行っている、行又は列を揃えて、その差を１行目又は１列目に適用する操作を２回行い(1,0)(0,1)の値を求めるという操作は、授業の中では提示されていないという意味で、向井が独自に発展させたものである。このような操作が出来るということは、向井が二次元表の操作自体は、十分に発展させていたことを示している。

引き続き、第６時で個別解決の時間を設定すると向井は、図 5-4 で示した二次元表を書いたプリントに文字式を書いた。しかし、向井が文字式を書いている時に、この問題に対する解答として、図 5-5 の二次元表と図 5-6 の文字式の表現が黒板に提示されると、向井は自分で書いた文字式を全て消してしまった。そして、この問題以降、向井は二次元表を操作することはなく、向井の活動では、二次元表が文字式の操作に対する model-for として機能していると考えられる活動は見られなかった。

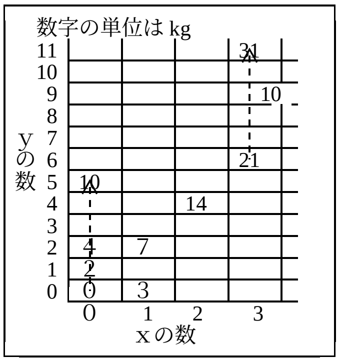


図 5-5.授業で提示した二次元表.

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x+11y=31 \\ 3x+6y=21 \end{cases}$$
３倍

$$3x+11y=31$$
$$3x+6y=21$$
ひいた
$$5y=10$$
$$y=2$$
$$2y=4$$
２倍

$$x+2y=7$$
$$2y=4$$
ひいた
$$x=3$$

図 5-6.授業で提示した文字式

図 5-3 の問題に対する向井の二次元表の操作を見ると、向井は(0,0)に０と値を埋めた後、(0,0)から(1,2)の７まで右に１上に２数え、続けて(1,2)から(2,4)まで数えて(2,4)に 14 という値を入れている。更に同様に数えて(3,6)に 21 という値を入れていくという活動を行っている。この向井の(3,11)と同じ列の(3,6)の 21 という値を求めるという操作は、(0,0)から右へ１上に２行った(1,2)の値が０から７へと増えていることを適用して、(2,4)の 14、(3,6)の 21 を求めていこうとする加法の考えに基づいていると考えられる。

一方、教師は、実験授業構想の段階から、二次元表の操作を model-for とし、文字式の操作を表現していくこの場面において、二次元表の(1,2)の７を３倍して(3,11)の 31 と列

を揃えるという操作を、ｘ＋２ｙ＝７を３倍し３ｘ＋６ｙ＝21として、３ｘ＋11ｙ＝31とｘの係数を揃えるという文字式の操作と結びつけたいと考えていた。そして、授業で提示した二次元表と文字式の表現も、この教師の考えに合う乗法の考えに基づくものであった。

このように、向井が加法の考えに基づいて二次元表の操作を行っているのに対して、授業で示された教師の二次元表の操作の解釈は、乗法の考えに基づいたものであり、教師が二次元表の操作を文字式として表現したものは、向井が発展させた二次元表の操作とは合わないものであった。このことが、向井の活動において、二次元表が文字式の操作に対する model-for として機能しなかった原因と考えられる。

### 5.2.2 model-ofとして二次元表を使う活動

授業内容が全て終了した第８時で、問題5-1 を提示した。この問題に対して向井は、図 5-7 の二次元表を書き、この問題を解決しようとした。

問題１
　１本 75 円の赤鉛筆と１本 55 円の鉛筆を２種類入れて、10 本１セット 630 円で販売したい。１セットの中に赤鉛筆と鉛筆をそれぞれ何本ずつ入れれば良いか求めなさい。

問題 5-1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| 赤 | | | | | | |
| | 300 | | | | | |
| | 225 | | | | | |
| | 150 | | | | | |
| | 75 | 130 | | | | |
| | 0 | 55 | 110 | 165 | | |
| | | 鉛 | | | | |

図 5-7.向井の書いた二次元表.

そして、インタビューで教師から「なんでこの表を書こうと思った？」と聞かれると「630 円のセットを探そうと思って」と発話した。更に「これで、探せるかね？」と問われると「うん」と発話し、問題 5-1 が二次元表で解決できるであろうことを理解していた。

この場面で向井が、提示した問題に対して、二次元表を書いたことから、向井にとって二次元表は、現実的な問題の状況を解決するための model-of としては位置付いていたと考えられる。

## ６．結論と今後の課題

抽出生徒である田中の活動を分析・考察した結果、二次元表が文字式の操作に対する model-for として機能していた活動、また、向井の活動では、二次元表を問題に対する model-of として使用している活動が見られた。結果、二次元表が連立方程式の学習場面で、数学的知識の発展的構成を促すモデルとして有効であることが検証された。

しかし、向井の活動を分析・考察すると、授業過程の中で、教師のねらいとしている、モデルの操作や解釈のみから、目標とする数学的知識を創り出そうとする教師の教授行為が、生徒のモデルに対する見方の変容を阻害する可能性があることが明らかになった。

そこで、発展的構成を促すモデルを用いて授業を実施する過程で、生徒が発展させたモデルの操作や解釈を生徒それぞれに表現させ、表現されたものを生徒が互いに認めあい、生徒自身が自分の表現したものを発展させていくような活動の設定が必要であるという授業改善への示唆が得られた。

今後は、他の学習場面においても発展的構成を促すモデルを設定し、本研究から得られた授業改善への示唆をもとに、「数学的知識の発展的構成を促す授業」を実現することを課題としたい。

### 【引用・参考文献】


Gravemeijer, K.（1997）. Mediating Between Concrete and Abstract. T. Nunes & P. Bryant（Eds.）. *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*（pp.315-345）. East Sussex: Psychology Press.

藤田宏他.（1997）. *新編新しい数学２*. 東京書籍.

Romberg,T. *et al*.（1996a）.*Mathematics in Context: A Connected Curriculum for Grades 5-8 Sampler*.Encyclopaedia Britannica Educational Corpration.

Romberg,T. *et al*.（1996b）.*Mathematics in Context: Comparing Quantities*.Encyclopaedia Britannica Educational Corpration.