

算数の問題解決における図による問題把握の研究

子どもが図をかく過程への着目

廣井 弘敏

上越教育大学大学院修士課程1年

1. はじめに

3年生のわり算の指導をしていたときに、絵をかかせれば答えが分かる、そして、式が書ける、という実感をもっていた。絵は、問題を読んで自分が理解した部分から、理解過程に沿って自分なりに工夫してかくことができる。そして、何回か絵をかいていくうちに、かくことの煩わしさから自然と絵の抽象化が行われ、それが、問題の構成や本質を見抜く上でよい結果をもたらすと思われる。これこそ、能力差に応じた、発展的要素を含む方策として捉えられるのではないかと当時は考えていた。(廣井, 1993)

実際、新しい概念を学習する場合には、教科書には必ずと言っていいほど視覚に訴えた図が登場する。線分図や面積図を用いた説明は、子どもの理解に大きな影響を及ぼすと確信していた。また、自分の経験からも、絵や図をかくことで問題解決が可能となったことが何度もあった。

図をかくことは、問題解決ストラテジーとして数学教育者によって長く支持されている。

Polya(1954)は、問題解決の4つのステップの中の、特に「問題を理解すること」において、「図をかけ。適当な記号を導入せよ」と提案している。そして、文章題を分かりやすい幾何学の問題に直すことが、図で解決することのよさであるとして詳しく説明を加えている。

また、古藤(1985)は、ストラテジーを次の

4つに分類している。

総合的方略(global strategy)

一般的方略(general strategy)

数学的方略(mathematical strategy)

特殊的技法(local strategy ; tactics)

そして、「図をかく」行為を一般的方略の中に位置づけている。

ところが、筆者は問題解決にあたり、図は教師の説明の道具となっていて、子どもの問題解決の道具とはなっていないのではないかと、という疑問を抱くようになった。よくよく子どもの様子を観察してみると、分かる子はすぐに立式し、分からない子は、いたずらに数を並べて計算する現状があった。子供は、図を問題解決に進んで用いようとはしていなかったのである。これは式中心の授業、そして、道具としての絵や図の指導方法に問題があったのだと考えられる。

しかし、問題点はそれだけではないようにも思われる。教師が決まった形式の図を指導しようとしても、その図は子どもにとって分かりやすく使いやすい道具なのであろうか。つまり、図そのものの特性に、子どもたちが問題解決で図を使用しようとしなかった状況を説明できる要因が潜んでいるのではないかとということである。

そこで本稿では、問題解決における図の使用に関する先行研究を検討し、分かりやすく使いやすい道具として図を利用する上での課題について考えていく。

2. 表現体系における図の位置づけ

石田(1985)は、視覚を媒介とするあらゆる表現をEIS原理等に基づき5つに分類している。その中の図的表現には、絵、図、グラフという表現を含めている。さらに、現実的表現、操作的表現、図的表現を象徴的表現に、言語的表現と記号的表現を規約的表現に区別している。

象徴的表現とは、記号とその指示対象との関係が自然的で象徴的性格が強い記号の表現を指す。直観性、具体性、イメージ性等に富み、親しみやすい性格を有しているが、厳密性、客観性等に欠け、ノイズを含むものである。

規約的表現とは、記号とその指示対象との関係が人為的性格の強い記号を指す。厳密性、客観性等に富むが、直観性、具体性、イメージ性等には欠ける記号である。

図的表現については、対象に着目して以下の類型(表1)を示している(中原,1987)。テーブル図、線分図のような図的表現は、この類型では構造図に入る。

表1 図的表現の類型

図的表現	メタ的表現	代理的図的表現		情景図
				場面図
		中核的 図的表現	方法図	手続き図
			内容図	構造図
	対象的表現		概念図	
			法則・関係図	
		グラフ図		
		図形図		

図的表現が象徴的表現であることが、教育現場で多用される大きな理由の一つであろう。指示対象の理解を容易にするために図化する場合などは、まさにそうした例となる。

しかし、筆者が最初に掲げた問題点、子どもたちが図をうまくつかえないという実態を

どう解釈したらよいのか。図が指示対象を自然に表現したものであっても、使う側である子どもにとって自然とは言えない状況が潜んでいるとは考えられないか。

そこで、以下の問題について、線分図に表現して解決しようとする様子を考えてみる。

<問題1> 親のライオンと子どものライオンがいます。2頭の体重の合計は252kgで、親のライオンの体重は、子どものライオンの体重の3倍です。
親のライオンと子どものライオンの体重は、それぞれ何kgですか。

この問題の構造を表す線分図には、様々な表現が考えられるが、大きくは図1の2種類に集約されよう。

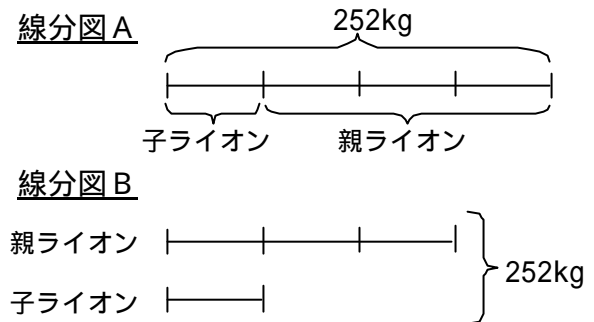


図1

実際に子どもになりきってこのような線分図をかこうとすると、判断に迫られたり配慮が必要であったり、そのようないくつかの制約(約束事)があることに気付く。それらを列挙してみる。

- ・ 合計の252kgをどう表すのか(判断)
- ・ 3倍をどう表すのか(判断)
- ・ 合計と3倍をどのように組み合わせて1つの図に表現するのか(判断)
- ・ 目盛りの幅をほぼ一定に保つこと(配慮)

上に掲げた制約に従わないと、苦勞して線分図をかいたにも関わらず、解法への移行が困難な場合がある。例えば、子どものライオンと親ライオンの体重比が1対3であることに気付いたとしても、目盛りの幅が一定でな

ければ、合計を4で割るという発想につながりにくい。

また、制約に関わる項目を子どもが順次判断して線分図をかかなくてはならないので、完成された線分図A,Bをいきなり子どもがかくとは考えにくい。こうした点に、子どもが問題解決に図をあまりうまく使えない原因が隠されている可能性がある。

3. 子どもの実態における図の制約

問題解決に子どもが図を道具としてうまく使っていないのではないかと筆者の経験に基づき問題提起をしたが、そうした子どもの実態については、いくつかの先行研究にも見ることができる。

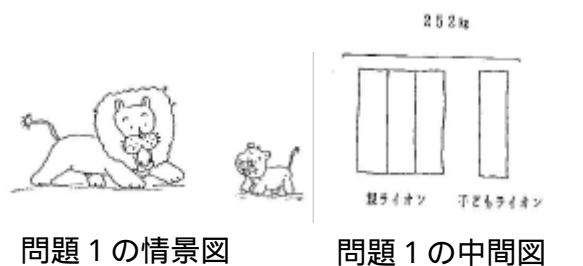
3.1. 山本の研究

山本(1995)は、数直線や線分図等の図の学習指導に関わる諸問題を考える第一歩として、主に乗除法を適用して解く問題と割合の問題について、問題場面を文章と図の両方で示した問題と文章だけで示した問題との2種類の調査問題を用意し、小学校5,6年生を対象に調査した。その結果、「目には見えなくイメージ化しにくい時間が数量として使われている・・・ような問題において、図は問題状況をイメージ化しやすくし、立式を容易にするのに手助けになった」(p.8)としながらも、「図を提示するだけでは、問題解決上の効果はそれほど期待できない」(p.8)と、図の使用における問題点を明確にした。また、普段の授業で扱わない形式の図を用いた問題の正答率が低かったことから、「初めて目にする形式の数直線が、問題解決にマイナスに寄与した原因の一つ」(p.8)と結論づけている。

3.2. 菊地の研究

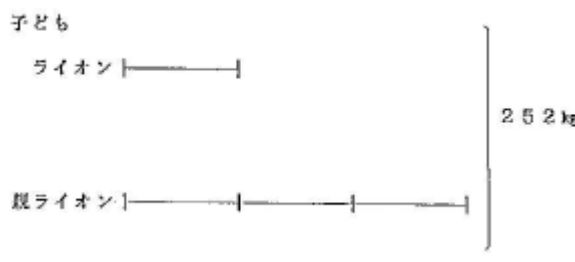
菊地(1996)は、子どもたちが文章題を苦手とし、嫌いである実態を踏まえて、どのような図が子どもによる問題解決において本当に役立つのか、との問題意識から調査を行った。扱った図は、情景図と線分図と、その両方の図の間に位置する「中間図」である。(図

2)与えた問題は、2節で取り上げた親子ライオンの体重を扱ったものである(問題1)。



問題1の情景図

問題1の中間図



問題1の線分図

図2

情景図を利用しないグループのHideは、線分図のヒントをもらった後でも線分図を見る前の考えを繰り返していた。Hideは、この線分図を見ても新しいことに気付くことはなく、線分図の横に自ら情景的な絵さえかいている。線分図を利用して正解に至らなかった子どもの反応の多くは、Hideのように前の考えを繰り返すというもので、次に多かった反応は、何もかいていないというものであった。

調査の結果、正答率や子どもによるかき込み、つぶやき等から、情景図の延長のような中間図は、線分図に比べて子どもの構造把握を援助していることが明らかになった。

なお、問題1においては、中間図を利用したグループの正答率が、線分図を利用したグループの正答率よりかなり高くなっていたが、別の調査問題では大きな違いは見られなかった。この違いについては、特定の「解決方法」を示す図が、日常そのように考えていない子にとっては有効に働かなかったと分析している。

3.3. 土居下らの研究

土居下ら(1986)は、正しい絵図・線分図がかければ立式できると仮説を立て、1年生から4年生を対象に調査を行った。その結果は以下の通りである。

- ・ 高レベルの児童は直観的に見通しを立てることができ、しかも、それに応じた絵図・線分図がかける。
- ・ 中レベルの児童は直観的に見通しを立てる児童が多いが、間違う率も高くなる。
- ・ 低レベルの児童は、式を先に考える児童は急激に減少し、絵図・線分図の内容も悪くなると同時に、絵図・線分図がかけない児童も急激に増加する。

このことから、「高レベルの児童は解けるから正しい絵図・線分図がかけるのであり、低レベルの児童は正しい絵図・線分図がかけないから解けないのである。」(p.19)と結論づけ、3年生の授業実践を通して、問題の構造を把握するためには、より完成度の高い線分図をかくことが効果的であることを明らかにした。

ただし、4, 5, 6年生段階では、線分図をかくことについて差が出てくることを指摘し、個人差に応じた指導の必要性を訴えている。

3.4. 山本、菊地、土居下らの研究について

山本の研究は、図を与えさえすれば子どもに何かしらの解決へのヒントを与えることができるという漠然とした考え方に、必ずしもそうとはならない事例を示している。また、「初めて目にする形式の数直線が、問題解決にマイナスに寄与した」事実、そうした図が子どもにとっては自然なものではなく、使用する上でいかに制約が多いかを如実に物語っていると見えよう。

菊地の研究は、問題の場面把握に、線分図よりも情景図や中間図が有効となる場合があることを示した。さらに、中間図であっても、子どもの理解の助けとならない場合があることも明らかにしている。

また、土居下らの研究から、正しい絵図や線分図をかく能力と立式する能力との間には、何らかの関係があることがわかる。ただし、今後の課題として指摘している、高学年において線分図の完成度に個人差が出てくるということは、線分図をかき上げることができずに問題も解けない子どもが学年を追って増えていくことを意味すると捉えられよう。問題の構造が複雑化すればするほど、正しい絵図や線分図をかくことが難しくなり、そうした図が子どもにとって分かりやすく使いやすい道具とはなりにくくなると考える。

山本と菊地の研究では、問題解決の助けとなると想定した図を問題文と共に提示している。子どもは図を頼りに解決を進めていくことになるが、その図が期待に添えるかどうかは、以下に示す図形的モデルの3つの有効性(市川, 1988)を図が備えているかどうかを鍵となる。

- (1) 問題とされている量が、モデルの中で大きさとして表現されていることが重要である。
- (2) モデルは、原問題と数学的に同型でなくてはならない。
- (3) モデルは、原問題と心理的に同型でなくてはならない。数学的に同型であっても、学習者にとって同型性が感じられなければ、納得感は得られない。

子どもが図の使用に困難を感じている状態には、与えられた図が子どもにとって同型性を感じられないものである可能性が考えられる。山本の事例の中で、「初めて目にする形式の数直線が、問題解決にマイナスに寄与した」事実、教師と学習者との図に対する同型性の違いとして捉えることもできる。

このような問題点を線分図や数直線等の図は抱えている。それでは、制約の少ない、子どもが同型性を感じやすい図、つまり、子ども自らが型にとらわれずにかく図を考えてみた場合はどうであろうか。

菊地(1996)は論文の意図において、「問題を読んでも情景さえ理解できない、もちろん構造も分からないという子どもにとって、線分図よりももっと自由に図を描いてみることで情景を理解させたり数学的構造を把握していくことの助けになるのではないかと考える。このような図は、誰でもが持っている日常経験を基にできるであろうし、かき方に線分図や数直線のような狭い制約がないことが大きな特徴である。」(p.9)と述べている。

子どもが自由にかく、情景図や中間図に近い素朴な図が、問題解決にどのように生かされるのかを次に考えてみる必要がある。

4. 子どもが自由にかいた図の効果に関する先行研究

様々な調査結果から、制約の多い図における困難について明らかにした。次に、子どもに視点をおき、子どもが自由に描いた図をもとに分析している先行研究について見てみる。

4.1. Moses の研究

Moses(1982)は、視覚的な考えが、「見ること」「想像すること」「デザインすること」の3つの重なり合うストラテジーからなるとした上で、第5学年を対象に、視覚化の指示を与えるグループと与えないグループに分けて調査を行った。視覚化の指示は、最初はイメージ作りに集中させ、その後、自分の抱いたイメージを描画するというもので、問題文に書かれた数を用いてすぐに立式するようなことは認めなかった。

<問題2> 消防士は、燃えている建物に水をかけるよう指示しながら、はしごの中間の段に立っていた。煙が少なくなったので、彼は3段登って仕事を続けた。火災はよりひどくなり、彼は5段下がらなければならなかった。後で、彼は最後の6段をはい登って、はしごの最上段にいた。はしごには、どれくらいの段数があったのか？

視覚化の指示を受けない子どもは、与えら

れた数値を用いて安易に立式し誤答した。問題2における典型的な解決方法は、 $3 + 5 + 6 = 14$ だった。視覚化の指示を受けていた子どもは、視覚化(図3)により、問題文に示された情報から、さらに新たな情報を生み出し解決していた。

視覚化で得られた新たな情報を筆者は以下のようなものと考えた。

- ・ はしごは最低でも7段はある。(実線で7段はかくことができた。)
- ・ 移動の軌跡には重なりがある。(はしごを上下に移動した。)
- ・ 中間の段から最上段までは4段ある。

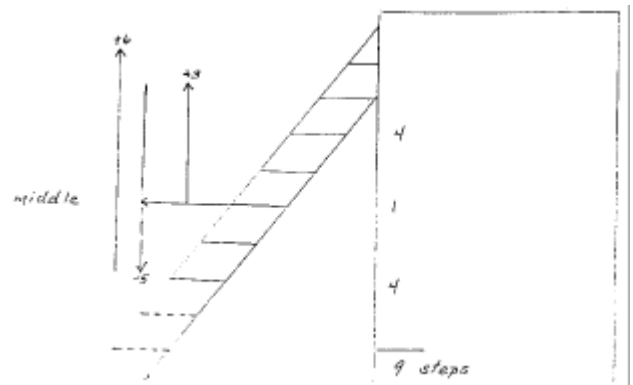


図3 子どものかいた図

こうした情報を、問題文で与えられた数値だけの情報から把握することは難しい。最初に段数不明のはしごの中間に消防士が位置していたことの視覚化が、「はしごの中間の段」の意味の把握を容易にした。かき上げた図3は、はしごの下の部分が点線で表されており正確な段数を数えることはできない。この図をさらに吟味することで、「はしごの中間の段」の意味付けを再度行い、 $\text{段数} = (\text{中間の段よりも上の段}) \times 2 + 1$ という立式への流れを生み出す可能性が高まったと考える。

報告では、視覚化は、特に学力的に低い子どもに解決への手がかりを与え、やる気を引き出すことができたとしている。

4.2. Van Essen の研究

Van Essen(1990)は、図の効果として次の4つをあげている。

作業記憶の軽減

問題の具体化

問題情報の再編成

問題の特徴の明確化

更に図の効果調べるために、統制群と実験群に分けて調査を行っている。実験群には、文章題は理解するのに難しく、問題の図をかくことがその理解を助ける技術であることを告げた上で、問題文で何が起きているのかについて図に表すように指示した。

その結果、1・2年生については、視覚化の練習期間が短いことから、問題解決能力向上を認めることができなかったが、5年生に関しては、問題解決能力が向上し、問題の場面を表す図を多くかくようになった。

しかし、その5年生についても、生徒が関連する知識が不足するときは図を作り出すことがほとんど助力とならず、誤解して得た情報だけを反映することになっている。当然、生徒が関連する知識を持っている場合は、分析と推敲の手段として図は助けとなる可能性があり、そのことはつまり、図をかくことは正しい解を見いだすことを保証するわけではなく、問題を正確に把握する可能性を単に増やすだけであると結論づけている。

4.3. Lopez-Real らの研究

Lopez-Real ら(1993)は、子どもが問題解決で図をかくストラテジーをどの程度使うのかを明らかにするために、5, 6年生を対象に文章題を与え、誤答した問題に対しては、再度図を描かせて問題に取り組ませた。

その結果、単に図をかくだけで、最初誤答していた子どもの内、3分の1が正答を導き出すことができた。このことから、図をかく行為が、子どもの注意を数が表すものに集中させ、「自分自身のことばで問題を表すこと」として作用することになっているのではないかとその可能性を指摘している。

さらに、問題解決に成功した図と失敗した図について、比較しつつ分析を加えている。

例えば、問題3に対しては、次のような成功した図と成功しなかった図が得られた。

<問題3> 白い棒は、黒い棒の3倍長い。棒の長さの差は12cmである。黒い棒の長さは何cmか？

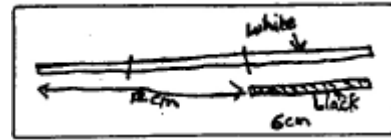


図4 Kartika(成功した図)

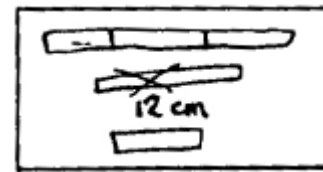


図5 Ramzish(成功しなかった図)

図4のKartikaは、差の12cmが見えやすい位置に棒を整列させ、必要な情報を書き付けている。しかし図5のRamzishは、3倍の関係を描写することはできたが、差の概念が不足し必要な情報の記入も十分ではなかった。

成功と失敗を決めた原因としては、以下の2つをあげている。

- ・ 問題から図への数の情報の編入
- ・ 明確で視覚的な関係の描写

図には、問題文中の重要な情報が取り入れられていることが重要で、さらに、関係の見えやすい描写が図で問題解決をする際の鍵となることを示している。

4.4. Moses、Van Essen、Lopez-Real らの研究について

子どもが自由にかく図に関して、Mosesは、問題場面の状況を十分にイメージさせることで安易な立式を抑制し、さらに、問題文中には示されていない新たな情報を得ることができることを示した。また、Van EssenとLopez-Realらは、そうした図の効果が5・6年生に表れることを明らかにした。

制約の少ない、子どもが自由にかく図が問題解決の助けとなる可能性がこれらの研究によって示された。さらに、一般的に投げかけられている「問題の構造が分かっているから図がかけるのではないか」との疑問、これは、土居下らも論文中に「正しい絵図や線分図がかけるから立式できるのか、立式できる（問題が解ける）から正しい絵図や線分図がかけるのか。」(p.18)と指摘しているが、この問いに対しての答えを Lopez-Real らは示している。つまり、文章題を誤答した子どもが図をかきただけで正答を導き出せた事実から、「図がかけることで解ける」可能性が明らかにされたのである。

しかし、図をかけば問題が必ず解けるわけではなく、Lopez-Real らが提示した成功しなかった図に代表されるように図をかいたにも関わらず誤答してしまった子どもも多い。この原因は、問題解決に必要な知識の有無が図を用いて解決できるかどうかを決めると論じた Van Essen の結論に求めることができよう。

また、図5をよく見てみると、黒い棒と白い棒の長さが3対1で表されており、黒い棒と白い棒が左右どちらかに整列していれば、差である12cmがどの部分を指すのかに気付く可能性が出てくる。Kartika は、最初に長さの比が正確でない図をかいたが、その図に納得せず、最終的に図4をかいた。こうした例は、かかれた図を用いた問題解決の可能性と、図をかいたことで何かしらヒントを得て問題解決が進んだ事実を示す。

図で問題解決が可能となった子どもは、図に必要な情報をかき込んだり、Kartika のように図のかき直しを行ったりしている。この図の変化の過程を分析することで理解の進展が明らかとなり、子どもにとって分かりやすく使いやすい道具として図を利用できるようにするための教師の役割が明確になるのではないだろうか。

図の変化と理解の進行に関わる研究とし

て吉村(2000)がある。吉村は、大学生・大学院生を対象に幾何の問題場面を取り上げて調査している。そして、問題解決時におけるかき込みが内的表象を外在化するだけの活動ではないことを示した。調査結果から得られる可能性を、茂呂(1988)がまとめた、「さまざまな文脈を超えて同一である…受け取る側にゆだねることのできる」ミーニング(p.90)と、「全身的な身ぶりとそれにともなう感覚印象によって作られる」センス(p.86)を用いて以下のように述べている。「数学の問題解決場面における図へのかき込みが、自分の身体を動かし図に働きかけることでセンスを生成し、同時に図の中に痕跡を残すことでミーニングを豊富にし、そのミーニングに触れた自分が、更に新しいミーニングに開かれ、そこにまた身体を媒介して働きかけ、センスを生成するという一種の対話的活動である」(p.92)。

これは、問題場面の理解が図を伴う対話的活動を通して徐々に進むことを示している。

また、布川(1995)は問題解決に、「考え方」としてのストラテジーという視点を導入している。この視点に立ったストラテジーは、「問題の答えを与えてくれるものではなく、問題場面についてのちょっとした情報を教えてくれるもの、問題場面の理解を深めるためのきっかけを与えてくれるもの」(p.110)である。

この「考え方」のストラテジーの立場では、問題解決は結果よりも問題解決過程を重視する。従って、図をかきことで問題解決がどのように進んだかを確かめようとする、問題が解けたかどうかよりも、どのような新しい情報を得ることができたのかを図の変化で追う必要が出てくる。これが明らかにされることで、問題解決場面で図をどのように生かしたらよいのか、その示唆が得られると考えられる。

5. 個人の解決の過程に目を向けた研究

最初にかいた素朴な図が、子どもの理解に伴ってどのように変化していくのかを扱った

論文は少ない。その中から2つを取り上げる。

5.1. 花形の研究

花形(1990)は、文章題が解けない2年生を対象に、絵をかいて逆思考の文章題を解かせるインタビュー調査を実施した。その結果、以下の2つを明らかにした。

- ・ 絵は問題文中の数値を可視的に具現化し、情景把握を促す役割をもつ。その絵は「直結図」「数量関係図」の2段階に分かれる。
- ・ 絵は自己の思考を客体化する役割がある。特に文章題の内容を誤ってとらえている場合に絵が有効であると考えられる。

「直結図」は、数量関係を把握していない状態で問題文中の数値を単に問題文に出ているとおりに表した絵を指し、「数量関係図」は、数量関係を把握した上でかかれた絵を指す。

与えた問題を次に示す。

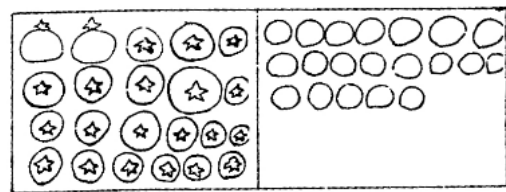
<問題4> 昨日柿を11個取りました。今日取った柿と合わせると42個になりました。今日取った柿は何個でしょうか。

この問題に対して、Y(女)は、最初は立式で解決を試みようとするがうまくいかず、インタビューの勧めで絵をかき始めた。かき上げた絵が図5の直結図である。その図を見て、Yは、「ここまでが11個で・・・」と言いながら、ペンの裏で線を引ながら部分の11を再確認し、更に実際に線を引いて全体の中の部分を明確に区別した。そのときの図は、数量関係を十分捉えていることから、Yにとって数量関係図(図6)である。

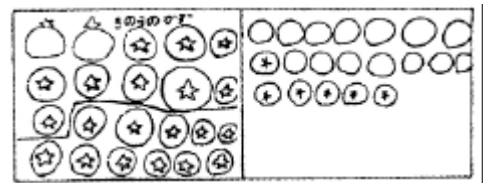
こうした「直結図」から「数量関係図」への変化の過程は、子供が具体的にどのような絵をかき、どのような過程を踏んで問題解決していくかを追求したことにより明らかにされた。

この結果は、低学年が図をかくことで問題解決能力を向上させなかったとする Van Essen(1990)の研究と反するよう見えるが、教師の適切な助言により、図をかくことが問

題解決に役立つ可能性を示した研究であると言える。



直結図



数量関係図

図 6

ただし、この研究で扱った問題は、文章題の内容をかくことで、かかれた図に答えを示す情報が比較的自然に表れるようになっている。かかれた図の特定の部分に含まれるものの個数を数えて答えを求めることができず、図から関係を見つけ立式して解決するような場合、例えば、菊地の提示したライオンの場合(問題1)において、図が有効に働くかどうかについては明らかにされていない。

5.2. Gibson の研究

Gibson は、数学専攻の大学生・大学院生を対象に、証明の進展に図がどのように関わるのかについて調査している。その結果、言語的/記号的な表現では解決に至らなかった副次的な課題を仕上げることに図が貢献していた。ここで述べる副次的な課題とは以下の4つである。

1. 情報の理解
2. 命題の真偽の判断
3. 考えの発見
4. アイディアの書き出し

そして、図が解決者の理解の仕方に密接に対応し、証明に関わる思考の負担を減らすことで、その思考を援助したと結論づけている。

調査で用いられた問題5のbにおいて、Rogerは、最初に全射と合成関数の定義の理解を助けるために図7をかいた。その後、 f がどのように全射であり得なかったかを見つけ出そうとして、型にはまらない様式で最初の図をかき直した。(図8) その結果、 $g \circ f$ が全射であっても f が全射でない反例を見出すことに成功した。

<問題5> 関数 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ について、次の2つの命題を証明するか反例をあげなさい。
 a. f と g が全射ならば $g \circ f$ は全射。
 b. $g \circ f$ が全射ならば f と g は全射。

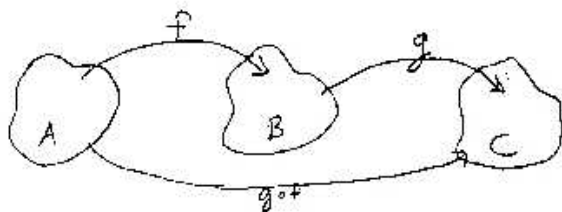


図7 Rogerの最初の図

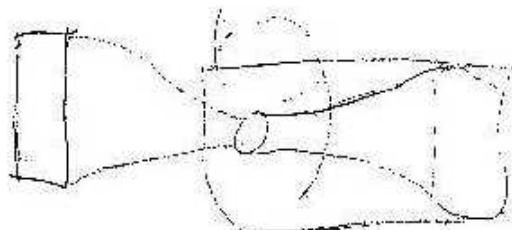


図8 Rogerの変更を加えた図

図7は、講義などで一般的に提示される図に近い。Rogerは、この図からは反例を見つけ出すことが困難であると判断し、図8の作成にかかったと思われる。したがって、理解と目的の変化に伴って図が変化していることがわかる。この図7から図8への変化について、Gibsonは、図に変更を加えることによって考えを獲得した例として紹介している。

しかし、両者の図はかく目的が大きく異なっており、実質的な図の変化と理解の深まりは図8において起こっていたと推測される。

そもそも集合Bから集合Cへ平行に引かれた上下の2本の線は、いつかかれたのであろうか。仮に、図7では矢印で表した関係を今度は面で表し、集合Bよりも少し小さな集合が全て集合Cに写る図を平行線で表現したことがきっかけにして、より極端な場合を作り出したのだとしたら、Rogerが何につまずき、何を心得て解決に近づいたのかが具体的に把握できよう。この変化は数量を用いていないので、花形の示した直結図から数量関係図への流れとは異なるが、数量関係を集合の関係と読み替えると、類似する理解の深まりを認めることができよう。教師がこうした状況を把握した場合は、図を変化できずに停滞している子どもに対して、どうしたら変化をもたらすことができるのか、その方策を立てることが可能となると考える。

6. まとめと今後の課題

本稿では、まず問題解決における図の使用についての問題点を整理し、子どもが自由にかく図の一般的な効果について示した。しかし、そうした結果は、学習者の問題解決後に残された図を基に導き出されていた。学習者の解決の過程で図がどのように関わったのかについては、明らかにされていない。

そうした疑問に関しては、花形、Gibsonの論文から、図の変化に着目することで学習者の理解の深まりを捉えることが可能となることを見出した。しかし、図の変化そのものがなぜ可能になったのか、また、どうしたら可能とすることができるのかといった問題は明らかにされていない。

子どもが図をかくときに、図だけが独立して表現されているわけではないことを茂呂(1988)が紹介している。幼児が絵を描きながら語りを開始する事例がある。子どもは書くことと描くこと、身振りすること(空中に書く)を区別しない。文字や絵をかくことと語ることも区別しないというのである(p.13)。これは、図の効果の分析を、図をかいている

時の発話等の異なる表現と共に捉える必要性を示していると考えられる。

そうした視点で分析することで、子どもがかいた図を基に、さらに理解を深めていくための手がかりが明らかにされ、図が分かりやすく使いやすい道具になり得るための教師の役割が明確になると考える。

したがって、今後は図が学習者にとってどのように役立ったのかを、その図の変化と発話に着目し、活動分析を通して明らかにしていく必要があると考える。

引用・参考文献

- Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Ed.), *Research in collegiate mathematics education*, vol. 3 (pp. 284-307). American Mathematical Society.
- Lopez-Real, F. & Veloo, P. K. (1993). Children's use of diagrams as a problem-solving strategy. *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 169-176). Tsukuba, Japan.
- Moses, B. (1982). Visualization: A different approach to problem solving. *School Science and Mathematics*, 82, 141-147.
- ポリア, G. (1954). *いかにして問題をとくか* (柿内賢信訳). 丸善.
- Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83(6), 301-312.
- 市川伸一. (1988). 「納得の道具」としての同型的図式表現. *数理科学*, 297, 34-39.
- 菊地光司. (1996). 算数・数学の問題解決における図的表現の働きに関する研究. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).
- 古藤怜. (1985). 問題解決におけるストラテジーの指導. 明治図書.
- 土居下晃宏, 志水廣, 植岡利之, 一崎満夫. (1986). 問題解決における方略の指導: 絵や図についての児童の実態調査と実践. *日本数学教育学会誌*, 68(4), 18-22.
- 石田忠男. (1985). 算数・数学『教授=学習』過程における表現体系の研究(). 広島大学教育学部紀要, 2(33), 77-86.
- 石田忠男. (1987). 算数・数学『教授=学習』過程における表現体系の研究(). 広島大学教育学部紀要, 2(36), 53-63.
- 布川和彦. (1993). 数学的問題解決における図の役割と解決者による意味づけ. 三輪辰郎先生退官記念論文編集委員会(編), *数学教育学の進歩* (pp.303-320). 東洋館.
- 布川和彦. (1995). 「考え方」としてのストラテジーの指導. 古藤怜先生古希記念論文集編集委員会(編), *学校数学の改善: Do Mathの指導と学習* (pp.99-113). 東洋館.
- 花形恵美子. (1990). 文章題の解決過程における絵の役割. *日本数学教育学会誌*, 72(12), 28-36.
- 廣井弘敏. (1993). 文章題の場面把握をどのようにイメージ化させるか: 絵をかかせることを中核に据えたわり算の意味指導. *教育実践研究*, 3, 45-50.
- 茂呂雄二. (1988). *なぜ人は書くのか*. 東京大学出版会.
- 山本正明. (1995). 問題解決における数直線や線分図等の図の効果. *日本数学教育学会誌*, 77(8), 2-9.
- 吉村匠平. (2000). 「かくこと」によって何がもたらされるのか?: 幾何の問題解決場面を通じた分析. *教育心理学研究*, 48, 85-93.