

数としての分数導入への試論

布 川 和 彦*

(令和5年1月27日受付；令和5年4月13日受理)

要 旨

本稿は、学習者による分数の数としての理解が十分でないとの現状認識に立ち、そうした理解を促すという点から分数の指導を吟味する一つの試みとして、分数がどのような数であるかを学習者に明示的に説明する指導の可能性について検討したものである。

最初に、分数を数として構成する方法としてこれまで提唱されてきた主なものを概観するとともに、それらを算数の学習で用いることの問題点、またそこから派生する現在の算数における分数の導入の仕方の問題点について検討した。次にこれらの方法とは異なる分数の構成の仕方について提案し、それに基づいて算数の学習内容を指導できるかの可能性について検討した。

その結果、数1を等分するという操作を避けつつ、ある性質をもった新たな数として分数を構成し、その性質をもとに算数の学習内容を指導することが概ね可能であることが示された。他方で分数を数として量に依拠せずに導入することで、逆に数としての分数に対する量の役割が明確になる点も指摘した。

KEY WORDS

mathematics education 数学教育

fractions 分数

numbers and quantities 数と量

equipartitions 等分

1. はじめに

分数の指導や学習については今日まで様々な観点から研究が行われてきている(例えばCooper & Lavie, 2021; Pedersen et al., 2022; Wortha et al., 2020)。我が国においても、計算については達成度が高いものの、学習者が分数を整数や小数と同様の数としては捉えられていないとの問題点は残されている(今井他, 2022; 布川; 2022a)。教科書¹⁾において分数は、小学校第2学年や第3学年において、折り紙の大きさや1mのテープなど量を等分する操作を用いて導入される。その操作により作られた量を表すために導入され、そうした量を表すために用いられる。しかし他方で第3学年から第5学年まで分数の加法と減法を学習し、第6学年で分数の乗法と除法を学習して四則演算を完成するというように、分数は数としても当然扱われる。第3学年の同分母分数の大小比較や、第5学年の異分母分数の大小比較も、分数の数としての性質を扱ったものと考えられる。そうした場面ではmやLといった量の単位がつかない分数が扱われることになる。ただし、演算の仕方や大小の判断の仕方を考える際には量についての操作やその結果の観察も行われるので、量の表現の中に現れる分数と、単位を伴わず数として単独で現れる分数とは、混然一体となって教科書では現れることになる。

それだけに分数が数として確実に理解されるためには、こうした2つの分数の現れ方の関係が明確化され、そもそも分数はどのような数であるのか、学習者に明示的に示される必要がある。しかし実際には、分数の理解が難しいという認識もあってか、整数の場合にくらべて分数の学習では量との結びつきが長く残る傾向が見られたり(布川, 2021c)、分数と量の結びつきを強める「量分数」という概念が指導において重視されたりしてきた(布川, 2022b)。

こうした状況を考慮した場合、量に依存しすぎない形で分数を指導する可能性を検討しておくことも、分数の指導を改善するためには必要なことと考えられる。そこで本稿では、現行の教科書よりも量への依存を弱めることを可能にするような分数の導入の仕方を提案し、それをもとに算数における分数の学習内容を網羅することが可能なのか、またその方針により分数を導入し、学習するとした場合に、どのような要件が求められるのかを検討することとする。

*学校教育学系

2. 分数の導入についての従来の方針

前節で述べたように、算数の教科書では量を用いて分数を導入するのが普通である。数学の立場から分数を整備しようとする場合にも、量を用いて分数を導入しようとする方針も見られる。他方で、量を用いずに分数を導入しようとする方針も見られる。前者は算数での方針に近いと考えられ、後者はそれとは異なる方針と考えられる(布川, 2019)。新たな可能性を考える前に、まずは従来見られたこの2つの方針について簡単に見ておくことにする。

2. 1 量を用いた分数の導入

田村(1978)は5つの公理を満たす集合をユークリッド式量空間 \mathbf{E} として定義し、「およそ‘数’とよばれるものは‘量空間の倍変換’である」(p. 21)との立場から分数の構成も試みている。任意の量 $A \in \mathbf{E}$ と任意の自然数 m に対し条件 $U \times m = A$ を満たす $U \in \mathbf{E}$ が存在するという公理を導入した後、量に対する等分変換と倍変換の合成として分数を導入する(p. 32)。すなわち、量 $U \in \mathbf{E}$ を量 $A \in \mathbf{E}$ の m 等分と呼んで $U = A \div m$ と表し、 A の n 倍の量を $A \times n$ と表した時に、 A に対してその m 等分を n 倍した量 $(A \div m) \times n$ を対応させる変換を分数と呼んだのである。なおここでの「 \div 」「 \times 」は量を何等分あるいは何倍かする操作であり、数と数の演算ではないことに注意する必要がある。

田村(1978)はこのように分数を量に量を対応させる変換として定義した。ここでの量は5つの公理を満たす集合の要素にすぎないが、この量として日常で見られる具体的な量を用いれば、この変換による分数の定義は、算数における分数の導入の仕方に近いと考えられる。前節で述べたように算数では量に対する操作に基づいて分数が導入されるが、この操作は量から新たな量を作る操作であり、量に対して新たな量を対応させる変換と見ることができるからである。例えば第2学年で折り紙を半分に切り、その一つ分の大きさを考える操作は、元の折り紙の面積 A に対して $(A \div 2) \times 1$ となる面積を作り出すものであり、 A に対して $(A \div 2) \times 1$ を対応させる変換と見ることができる。第3学年で1mを4等分した1個分の長さ $\frac{1}{4}$ mを作り、その3個分の長さを作る操作も、1mという長さ A に対して $(A \div 4) \times 3$ となる長さを作り出すものであり、 A に対して $(A \div 4) \times 3$ を対応させる変換と見ることができる。

田村(1978)は同値な分数になる条件、分数の大小の判断、分数どうしの演算について構成していくが、その際にも変換である分数を量に施し、その結果得られる量に基づいてその構成を行っていく。同値な分数になる条件は、2つの分数 $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{p}$ をそれぞれ $U \in \mathbf{E}$ に施した時に得られる2つの量が等しくなる、つまり $U \times \frac{n}{m} = U \times \frac{q}{p}$ となる条件から $n \times p = m \times q$ としている(pp. 33-34)。ここで最初の式の「 \times 」は量に分数倍変換を施すことを意味するが、後の式の「 \times 」は自然数の乗法を表している。さらにそこから $\frac{n}{m} = \frac{n \times p}{m \times p}$ を導いている。大小についても $U \times \frac{n}{m} < U \times \frac{q}{p}$ となる場合に $\frac{n}{m} < \frac{q}{p}$ として、そうなる条件を導いている(p. 35)。加法 $\frac{n}{m} + \frac{q}{p}$ は量 $U \in \mathbf{E}$ に対して $U \times \frac{n}{m} + U \times \frac{q}{p}$ を対応させる変換として計算の仕方が構成され、減法はその逆演算として計算の仕方が構成される(p. 36)。ここでも最初の式の「 $+$ 」は分数どうしの和であるが、2番目の式の「 $+$ 」は量の和を表している。乗法 $\frac{n}{m} \times \frac{q}{p}$ も量 $U \in \mathbf{E}$ に対して $(U \times \frac{n}{m}) \times \frac{q}{p}$ を対応させる変換、つまり2つの変換の合成として構成され、除法は乗法の逆演算として、逆数を乗ずることで求まるとされる(pp. 36-39)。

算数の学習においても、1mや1Lといった量に分数を施して得られる量を考え、それらの量の合併や差、何倍かした大きさを参照しながら計算の仕方が構成されていることを想起すると、以上のような田村(1978)の分数の構成は、公理的に想定された空間とそこでの変換の議論として抽象的に見えながらも、基本的な考え方は算数における分数やその計算などの構成と同じものと見ることができる。

この方針による分数の導入では、量を参照しながら分数の意味や大小比較、演算を構成することができるという利点がある。しかし量が関与するために、量はある集合の要素、数はその集合上の「倍変換」(田村, 1978, p. 21)などと区別することが必要となる。したがって、数としての分数を取り出そうとすれば、その活動の中から変換だけを分離し、それを算数的な対象として取り出すことになる(布川, 2019, 2021a)。

2. 2 量を用いない分数の導入

量を用いずに分数を構成することは高木(1949)にも見られるが、ここでは瀬山(1996)に沿ってその方針を確認しておく。瀬山(1996)は自然数の集合 S の直積集合 $S \times S$ を考え、その2つの要素 (a, b) , $(c, d) \in S \times S$ に対して $ad = bc$ の時に $(a, b) \sim (c, d)$ として同値関係 \sim を定義する(p. 61)。この同値関係を用いて $S \times S$ を分類し、その同値類を $\overline{(a, b)}$ と書いて、これが分数だとしている(p. 62)。ここでは量は全く用いられておらず、自然数の直積集合の同値類として分数が導入されている。

乗法については $\overline{(a, b)} \times \overline{(c, d)} = \overline{(ac, bd)}$ としてすぐに定義し(p. 63)、加法についても同様に $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(ad+bc, bd)}$ としてすぐに定義している(p. 65)。その後、 $\overline{(a, b)}$ を $\frac{a}{b}$ と書くとして分数の表記を導入した上で、分数の除法を次により決めるとする(p. 69): $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ 。大小関係についても、 $ad < bc$ の時には $\overline{(a, b)} < \overline{(c, d)}$ であると定義する(p. 70)。なお減法は明示的には定義されていないが、2つの正の分数 α , β について $\alpha < \beta$ となる必要十分条件は $\beta =$

$\alpha + \gamma$ となる正の分数 γ が存在することが定理として示され、この γ を $\beta - \alpha$ と書く (p. 72) としており、これが減法の定義に当たると考えられる。つまり、減法は加法の逆演算として定義されていることになる。

この方針によっても分数を構成し、大小比較や演算を行えるようにできる。ただし、大小比較や計算の仕方は定義として与えられるだけであり、自然数の学習で用いられた数える操作や数を並べる操作、合併の操作、取り去る操作といった活動との接点は見えづらいものとなっている。また分数は自然数の直積集合を分類した際の同値類なので、自然数の要素との直接的な関わりも見えづらい構成の仕方となっている。

2. 3 第三の方針

第2学年では前節で見たように、量に対する等分などの操作で得られた量を表す方法が紹介され、そこに現れた数のことを「分数」と言うのだとして分数が説明される。これは第3学年の学習でも同様である。つまり、分数を用いた量の表現の仕方は説明するものの、分数自体がどのような数であるかについては特に説明をせずに導入していることになる。

啓林館の教科書では第3学年で1mのテープを等分する場面を示し、上のように分数を説明した後ではあるが、数に対する等分に基づいて分数を捉え直す学習が設定されている。まずmを伴わない長さ1の線分を提示し、その図が「1を5等分したもの」とであると伝えた上で、線分を5等分したものの1つ分と2つ分の「大きさを表す数をかきましよう」と問うている。前者は「1を5等分した1こ分で、 $\frac{1}{5}$ です」と、後者は「1を5等分した2こ分で、 $\frac{2}{5}$ です」と答えることが期待されており、また「 $\frac{2}{5}$ は、 $\frac{1}{5}$ を2こ集めた数です」との説明もなされる。ここでは、量は明示的には現れず、数1を5等分した1個分や2個分として分数が説明されている。ただし数1を「5等分する」という操作がどのようなことかは、ここでは説明がされていない。おそらく1mのテープを5等分した時の操作を数1を表す線分に投影することで、数1を等分する操作を理解することが期待されているものと考えられる。しかし、算数のそれまでの学習においては、数1をブロック等で表すことが多く(布川, 2021c)、そうしたブロックを細分することがそれまで行われてこなかったであろうことを考慮するならば、数1を等分することは学習者にとって自明とは言いがたいと考えられる。

こうした説明の仕方は、中学校第1学年における負の数の説明に近いとも言える。負の数の学習では、 0°C より低い気温などを表すのに「-」という記号を用いることを確認した後に、「0より4小さい数」を-4と表すこと、「0より小さい数を負の数という」ことを説明している。「反対の性質をもつ数量」に関して、基準を0とし、一方を「+」を使って表し、他方を「-」を使って表すことは確認されているが、「0より小さい」とはどのようなことかは、負の数の説明の前までには説明されていない。算数では数の大小を、その数が表す個数の多寡や長さの長短、数を構成する1や単位分数の個数により判断しており、それからすると0個より少ないことはあり得ず、したがって0より「小さい」が何を表すかは自明ではない。上の負の数の説明は、0という既習の数に関してそれより「小さい数を作る／みつける」という既習ではない操作を施す形で説明されていると考えられる。その意味では、1という既習の数に関してそれを「5等分する」という既習ではない操作を施している上述の分数の説明は、負の数の説明に類似したものとなっている。

これと異なる形で新たな数を規定するのが中学校第3学年で学習する無理数である。2乗すると2になる数を考えた後に、「『2乗すると2になる正の数』を記号 $\sqrt{\quad}$ を使って $\sqrt{2}$ と表す」として無理数が導入されている。ここでは新たに導入する数に対して「2乗する」という操作を施すことを考え、その結果が2になる数として $\sqrt{2}$ が説明されている。この時点では $\sqrt{2}$ どうしをかけ算するとはどのようなことかの説明もされていないが、既習の数と同様の操作が可能であると想定し、それにより新たな数と既習の数とを関連付けることで新たな数が説明されていることになる。

こうした無理数の説明の仕方を参考にすると、分数についてもそれに対して既習の数と同様の演算を施すことができるかと想定し、その結果が既習の数になるような数として説明することが考えられる。例えば $\frac{1}{3}$ であれば、「『3つ併せると1になる数』を $\frac{1}{3}$ と表す」などとする説明である。新たに考える数 $\frac{1}{3}$ に対しても2や5などの数と同様にたし合わせるという操作ができることはあくまで想定である。ただし、第3学年では $\frac{1}{3}$ の3つ分である $\frac{3}{3}$ が1に等しくなることは、分数の性質として量の操作を通してではあるが学習することになっている。また田村(1978)が量Aのm等分をA自身に対する分割操作によってではなく、 $U \times m = A$ となるUとして、つまりm倍してAになるような量Uとして規定していたことを想起すれば、等分の代わりに「3つたし合わせる」という規定を用いることは不自然ではない。しかもこれにより、上で見たような数1を「5等分する」という操作を想定することは必要なくなる。

このように新たな数を説明することは、2.1や2.2で見た分数の説明とも異なっている。今の説明では量を媒介せずに、新たな数と既習の数1とを直接関係付けることで分数を説明している。したがって、2.1で見た場合のよう

に、後で変換自体を取り出して対象とする必要は生じないと考えられる。2.2の場合には自然数と分数とは直接同じ数として扱われるというよりも、ある種の同値類 $(a, 1)$ を自然数 a と同一視して、自然数全体を分数全体の中に埋め込むと考えることになる(瀬山, 1996, p. 68)。したがって2.3で述べてきた、新たに構成する分数の方を既存の自然数と直接関係付けようとする分数の説明は、2.2の方針とも異なっていると言える。

そこで以下では、算数においてこのような形で分数を導入した場合に、算数の学習内容を一通り扱うことが可能であるのかを検討してみることにする。それらの内容が小学生でも理解できそうな仕方で扱うことができれば、この導入を算数における分数の説明の新たな選択肢として考えることができる。

3. 数としての分数の導入に基づく展開

本節では、2.3で提示した方針に基づいて分数のある性質を満たす新たな数として導入した場合に、算数の学習内容がどのように扱えるのかを検討していく。まず3.1では本稿の方針と教科書における扱い方の違いを確認する。3.2ではその中でも両方で類似の扱いがなされる学習場面も見られることを確認する。その場合は、教科書で現在も学習が展開されていることから、本稿の方針でも展開が可能であると考えられるからである。続く3.3以降では本稿の方針に従った場合に、教科書と異なる展開になる学習場面を検討する。そうした場面でも本稿の方針に従って算数の範囲で学習が展開できそうであるか、またその展開が可能となるために前提となる要件があるのかに焦点を当てる。

3. 1 教科書との違い：等分と倍の操作

現行の教科書では、上でも触れてきたように、大きさや長さなどの量を等分する操作と、等分で作られた量のいくつか分を作る操作、あるいはその量の何倍かを作る操作を行うことを通して分数が導入されている。ただし啓林館の第3学年の教科書では導入部ではないが、数1に対する等分の操作や、その結果得られる数の2つ分などを作る操作が扱われる箇所が見られた。確かに数1を表す線分に関わる操作も想定されていると考えられるものの、説明の文言としては、数1を等分する操作と、それにより得られる数のいくつか分を作る操作が扱われていた。

一方2.3で提案した方針の場合は、いくつか併せると1になる数を新たに想定し、それを単位分数として考えるものであった。そのために、量についても数についても等分の操作は前提とされない。ただし、その想定される数をいくつか併せるという操作は前提せざるを得なくなる。第2学年で、ある量の2つ分や3つ分を2倍、3倍と呼ぶことを学習するが、いくつかの教科書ではその際に、数についての倍にも言及している。新たに想定される数についてもいくつか併せる操作を倍として表すならば、本稿の方針は数に対する自然数倍の操作だけを前提に分数を扱おうとするものと特徴づけることができよう。また量ではなく数の操作により既習の数1と関連付けることで、分数がどのような数であるかを明示的に説明しようとする扱い方とも言える。

分子が1でない分数(以下、「非単位分数」と呼ぶ)についても、 $\frac{1}{3}$ mの2つ分の長さである量の表し方 $\frac{2}{3}$ mに現れるものとして説明するのではなく、数である $\frac{1}{3}$ を2つ併せて得られる数として $\frac{2}{3}$ を導入するものとする。ここでも新たな数に対する自然数倍の操作により非単位分数を規定することにより、非単位分数がどのような数であるかを、直接的に説明しようとする扱い方として特徴づけられる。

3. 2 教科書と同様の扱い方が可能となる学習場面

教科書では、量の操作により得られる量の表し方を通して分数を説明するが、学習が進むと、分数がmやLといった単位を伴わずに扱われる場合が出てくる。そして分数が独立した数として扱われる場合には、単位分数の個数に着目した考え方が中心となる。

本稿の方針では単位分数を数1との関係で導入し、単位分数の何倍かとして非単位分数を規定するので、やはり単位分数の個数に依拠した扱い方になっている。したがって、教科書で単位分数の個数に着目した考え方を中心とする学習場面については、本稿の方針に従った場合でも同様の展開が可能であると考えられる。

分母が等しい分数、いわゆる同分母分数の加法と減法は、教科書では第3学年で扱われる。その際、液量を合併する場面や液量の残りを考える場面など、量についての場면을提示し、そこから加法や減法の計算につなげている。しかし、加法や減法の計算の仕方を考える部分で、いくつかの教科書では、量には言及せず、数である単位分数の個数に基づいた考え方を扱っている。例えば、 $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ を考える際、 $\frac{2}{5}$ は $\frac{1}{5}$ が2個であること、 $\frac{1}{5}$ は $\frac{1}{5}$ が1個であること、したがって併せると $\frac{1}{5}$ が(2+1)個なので、和は $\frac{3}{5}$ となるといった考え方である。この教科書の考え方は本稿の方針に従った展開でも可能なものである。つまり、本稿の方針に従い、分数を数として直接導入した場合でも、同分母分数の加法や減法を算数の学習として扱うことが可能と言える。

なお分母が異なる分数、いわゆる異分母分数の加法と減法については、大きさの等しい分数(以下、「同値分数」と呼ぶ)の考えにより通分をして同分母分数の加法と減法に帰着させるので、本稿の方針で同値分数の学習が可能であ

るかの問題となるが、これは3.5で検討する。

分数に自然数をかける乗法と分数を自然数でわる除法は、第6学年で学習される。乗法や除法の立式を促すために量の場面が提示されるものの、計算の仕方に関して、いくつかの教科書ではやはり単位分数の個数に基づく考え方が中心に扱われている。例えば $\frac{3}{5} \times 4$ であれば $\frac{1}{5}$ が (3×4) 個分なので、積は $\frac{3 \times 4}{5}$ となるとされている。また $\frac{4}{5} \div 2$ に関しては、量を表す図の操作に基づく考えも示されるが、その他に $\frac{1}{5}$ が $(4 \div 2)$ 個分なので商は $\frac{4 \div 2}{5}$ だとする考え方も扱われている。したがって、これらの乗法と除法についても、本稿の方針に従って学習が可能と考えられる。

なお除法で被除数の分子が除数の倍数でない場合は上の計算方法がそのまま使えないが、被除数の同値分数のうち分子が除数の倍数であるものを選べば、同様に扱うことができる。

教科書では第3学年で $\frac{1}{5}$ m の2個分、3個分、…を考え、 $\frac{5}{5}$ m が1 m に等しいことに基づき $\frac{5}{5} = 1$ といった関係を学習する。また第4学年では帯分数と仮分数の間の変換に関わり、 $2\frac{1}{3}$ の2は $\frac{1}{3}$ のいくつ分かを考えたりもしている。本稿の方針は分数と自然数に関するこの性質を、むしろ分数の基本的な規定として用いるものである。つまり、分数には $\frac{5}{5} = 1$ といった性質があるというのではなく、こうした性質を持つ新たな数を分数として設定するものであった。したがってこの性質の位置づけには違いがあるものの、この性質を用いる学習場面についても、教科書と同様に学習が可能である。

3. 3 商を表す分数と分数倍

自然数どうしの除法の商を分数で表すことは、教科書では小学校第5学年で扱われている。2 L のジュースを3人で分ける様子を表す図をもとに一人分の量を求め、それが $\frac{2}{3}$ L になることから $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ となると学習する。

本稿の方針に従い、単位分数を基本として考えるとすれば、こうした量に対する等分の操作に依拠せず学習が可能かを検討する必要がある。ここで3.2の最後で述べた性質を想起すると、次のような扱い方が考えられる。 $\frac{1}{3}$ を3つ併せると1になる数として導入するので、 $\frac{1}{3}$ を6つ併せると2になる。これも3.2で述べた分数を自然数でわる除法と同様に考えれば、6個の $\frac{1}{3}$ を3等分するので1つ分は $\frac{1}{3}$ の2つ分、つまり $\frac{2}{3}$ となるので、 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ と考えるものである。ここでは、 $\frac{1}{3}$ の6個の集まりをおはじき6個の集まりと同じように3等分するという操作が想定される必要がある。つまり単位分数がおはじきのように集めたり、その集まりを分けたりできる対象として捉えられている必要があるが、これは3.2で述べた分数の加法や減法でも想定されていることであり、算数の学習として不自然な条件ではないと考えられる。

教科書では、商を分数で表すことを第5学年で学習した後で分数倍が初めて扱われる。例えば3 m が5 m の何倍かを $3 \div 5$ で求めると商が $\frac{3}{5}$ となることから、何倍かを表す数が分数になる場合のあることや $\frac{3}{5}$ 倍という分数倍の言い方を学ぶ。実際には、第2学年で現れる折り紙の大きさの $\frac{1}{4}$ の大きさや第3学年で言及される「1 m の $\frac{1}{3}$ の長さ」は元の量の $\frac{1}{4}$ 倍や $\frac{1}{3}$ 倍を考えているが、これらの学習場面では分数倍としては扱われない。これは、分数倍が倍を求める除法を通して導入されるために、商を分数で表すことを学習するまでは分数倍には言及しないからだと考えられる。商が分数の場合が分数倍とされるので、ある量や数の分数倍を求めることがどのようなことかも、直接は説明されていない。

2倍、3倍については2つ分、3つ分のこととして導入されたことを参照して本稿の方針に沿って分数倍を構成すると、自然数 k の $\frac{1}{m}$ 倍は m 個併せると k になる数とすることが考えられる。 $2 \div 3$ の商を分数で表す場合と同様に、 $\frac{1}{m}$ を $(m \times k)$ 個併せると k になるので、 m 個併せると k になる数は $\frac{1}{m}$ を k 個併せた数、つまり $\frac{k}{m}$ となる。また自然数 k の $\frac{n}{m}$ 倍は、 k の $\frac{1}{m}$ 倍の数を n 個併せた数、つまり $\frac{k}{m}$ を n 個併せた数で $\frac{k \times n}{m}$ となる。

このように、自然数の分数倍についても、商を経由せず、分数の導入の仕方に沿って明示的に説明することができ、また具体的にいくつになるのかは単位分数の個数に基づいて考えていくことができる。なお、 k L のように量の測定値が k である場合、 m 個併せると k L になる量は、 k L を m 等分した1つ分の量になるので、本稿の方針に沿った倍は、量の場面において等分を用いた考え方と基本的に同じものとなる。

3. 4 数直線との対応と大小比較

現行の教科書の多くは、第3学年の学習の中で例えば $\frac{1}{5}$ m, $\frac{2}{5}$ m, $\frac{3}{5}$ m, …の長さのテープの右端を数直線上の点と対応させることにより、 $\frac{3}{5}$ m といった長さの表現に現れる分数を、単位mを伴う数直線上に位置づけている。同じ単元の途中から数直線に付けられていた単位mがなくなり、結果として単位mを伴わない数直線上に分数が位置づけられることになる(布川, 2019)。啓林館の教科書では単位mは伴わないものの、各分数を表すとされる線分の右端と数直線とを対応させている。教科書のように量を用いて分数を導入した場合、長さという量を経由して分数を数直線と対応させることができる。ただし、数直線から単位を除いた時に、それぞれの分数が何を表すのかは明示的には説明されない。

本稿の方針では分数のある性質を持った数として導入し、単位分数の個数にできるだけ基づいて学習を展開するこ

とになる。単位分数を一つずつ加えていくと考えると、自然数に関して数直線を導入する学習が参照できる。自然数に関しては、小学校第1学年の数の学習において、数を1ずつ大きくしながら並べる活動が何度か行われ、20までの数を学習した時点で数を線上に並べた「かずのせん」が導入される。同様に考えると $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}=1$, $\frac{6}{5}$ …などと分数を並べる活動を通して分数を数直線と対応付けることが考えられる。

このような対応付けの場合、数直線は数の並びを表すので、分数も数として扱うことができる。他方で分子が1だけ異なる分数どうしの間隔は全て同じにすることや、 $\frac{1}{5}$ のいくつか分かを並べた数直線と $\frac{1}{6}$ のいくつか分かを並べた数直線とでは0と1の間の長さは等しくしなければならないことについては、長さの点から正当化することができないので、別の仕方でも正当化することを考える必要が出てくる。

分数の大小比較に関して、異分母分数の場合は同値な分数を用いて通分することで同分母分数の大小比較に帰着されるので、同分母分数の大小比較を考える。同分母分数の大小比較は、教科書では第3学年で扱われる。いくつかの教科書では、分数をmなどの単位を伴わない数直線上に位置づけ、それに基づいて大小を判断させている。さらに、その後で各分数の単位分数の個数に着目させている教科書もある。他方でテープの長さに関して図示させるとともに、 $\frac{3}{5}m$ が $\frac{1}{5}m$ の何個分かを考えさせた後に、 $\frac{3}{5}m$ と $\frac{4}{5}m$ の「どちらが長いでしょう」として比較をさせる教科書もある。

本稿の方針の場合、非単位分数は単位分数をいくつか併せた数として3.1で規定したので、その個数が多い方が大きい数であると考えすることで、分母が等しい2つの分数の大小は比較が可能になる。教科書では数直線での位置や $\frac{1}{5}m$ といった長さを参照して大小比較を考えるように見えるが、本稿の方針の場合それを単位分数の個数という数の文脈で考えることになる。自然数において数1を追加することで数が大きくなると考えたように、分数でも単位分数を追加すると数が大きくなると想定できる場合には、単位分数の個数により分数の大小を判断する学習は可能であると考えられる。

3. 5 同値な分数

ある関係にある2つの分数を等しいと見なすことは、瀬山(1996)の分数の構成でも最初に想定されていたように、分数に特徴的な性質であり、分数の理解にとっても重要な考え方である(吉田, 2010)。教科書では第4学年および第5学年において、数直線の0と1の間を2等分した図、3等分した図、4等分した図、…を縦に並べ、それを観察して、同じ縦の位置に来る分数は等しい大きさであるとして、同値分数を見つけさせている。数直線は単位mを伴わないので数自体を表し、数直線上の位置が等しくなる分数が数としても等しいと捉えることが期待されている。しかし位置が等しくなることは線分に対する操作で得られる長さに基づいて保証されており、2つの分数が同値であることは長さという量により保証されていると考えられる。

本稿の方針に従う場合、単位分数 $\frac{1}{m}$ は「m個併せると1になる数」なので、他に「m個併せると1になる数」があれば、その数は $\frac{1}{m}$ に等しいと考えることができる。例えば分数 $\frac{1}{m \times k}$ は「(m×k)個併せると1になる数」であるが、(m×k)個をk個ずつのまとまりにすると、そのまとまりをm個集めると(m×k)個併せたことになるので1になる。ここから $\frac{k}{m \times k}$ は $\frac{1}{m}$ に等しいことになる。また $\frac{n}{m}$ は $\frac{k}{m \times k}$ をn個併せた数、つまり $\frac{n \times k}{m \times k}$ と等しくなる。このように本稿の方針に従い、単位分数の個数に基づいて考えても、同値分数を学習することは可能と考えられる。ただしその際に、同じ個数を併せて1になる2つの分数は等しいと認めることが前提となる。

3. 6 分数の乗法と除法

分数の加法と減法、および分数に自然数をかける乗法と分数を自然数でわる除法が本稿の方針に従った展開でも学習が可能であることは、3.2で確認した。また、自然数の分数倍が学習可能であることは3.3で確認した。最後に分数に分数をかける乗法と分数を分数でわる除法について検討する。

分数をかけることは、被乗数の分数倍を求めることと考えると、3.3の議論を援用できる。まず分数 $\frac{n}{m}$ に $\frac{1}{a}$ をかけることを、a倍すると $\frac{n}{m}$ になるような数を求めることだと考える。ここで同値分数の考えを使うと $\frac{n}{m} = \frac{n \times a}{m \times a}$ であり、 $\frac{1}{m \times a}$ を(n×a)個併せると $\frac{n}{m}$ になる。その(n×a)個をn個ずつのかたまりにした $\frac{n}{m \times a}$ はa個併せると $\frac{n \times a}{m \times a}$ 、つまり $\frac{n}{m}$ になると考えられる。このように考えると $\frac{n}{m} \times \frac{1}{a} = \frac{n}{m \times a}$ と求めることができる。また $\frac{n}{m} \times \frac{b}{a}$ については $\frac{n}{m \times a}$ をb個併せた数、つまり $\frac{n \times b}{m \times a}$ と考えられる。分数 $\frac{1}{a}$ をかけることはa倍すると $\frac{n}{m}$ になるような数を求めることだとして乗法を扱うことができるとすれば、本稿の方針により分数をかける乗法も学習することが可能と考えられる。

数 $\frac{n}{m}$ を分数 $\frac{b}{a}$ でわった時の商は、 $\frac{b}{a}$ 倍すると $\frac{n}{m}$ になる数のことだと考えることができる。同値分数を考えると $\frac{n}{m} = \frac{n \times a \times b}{m \times a \times b}$ となり、これが $\frac{n \times a}{m \times b} \times \frac{b}{a}$ に等しいことから、そのような数は $\frac{n \times a}{m \times b}$ だと考えられる。 $\frac{b}{a}$ でわることを $\frac{b}{a}$ 倍すると $\frac{n}{m}$ になる数を求めることだとして除法を扱うことができ、また分数をかける乗法の結果を利用することができれば、分数でわる除法も本稿の方針にしたがって学習することができる。

教科書では第6学年で分数に自然数をかける乗法と分数を自然数でわる除法を学習した後で、分数をかける乗法と分数でわる除法を学習する。量の場面が提示され、求める量がそうした乗法や除法で求まることを確認した後、計算の仕方を考える。考え方は大きくは二つの方針に従っている。第一は量を表す数直線や面積図の上で求める量に至る操作を考え、それを式で表すことで計算方法を見いだすものである。第二は乗数を k 倍すると積も k 倍になるという乗法の性質や被除数と除数をともに k 倍しても商は変わらないという除法の性質を用いて、自然数をかける乗法や自然数でわる除法に帰着させるものである。前者の量の操作は、上で述べた本稿の方針に沿った考え方に相当するものであるが、量を用いることで推論を促しているものと考えられる。後者の考え方は上で提案したものとは異なるが、量に頼らず、演算の性質に基づいて推論を行う点では上述の考え方と類似している。ここから、教科書と同様の操作を数としての分数に関して考える本稿の方針に沿った扱い方でも、分数の乗法と除法を学習できる可能性があると考えられる。

3. 7 中学校への接続

分数の学習は小学校第6学年で分数の乗法、除法を学習して一応の完結を見る。しかし中学校では算数で学習した分数を文字式の係数として用いたり文字に代入したりするだけでなく、分子や分母に負の数や無理数が入った分数も扱われる。また分子や分母に文字を含む場合は、そこに負の数、小数、無理数を代入することにもなる。したがって、算数における分数の理解は、中学校におけるそうした新たな分数の用法にも耐えられるものである必要がある。そこで、本稿の方針に沿った分数の扱い方が、中学校でのそうした用法に耐えられるものであるかを確認しておくことにする。

3.1で示した単位分数 $\frac{1}{m}$ を m 個併せると1になる数とする分数の捉え方は、 m 倍すると1になる数と考えることで、 m や n が負の数や小数などになった場合にも適用できる。つまり、 $\frac{1}{-3}$ は -3 をかけると1になる数として、 $\frac{1}{0.3}$ は0.3をかけると1になる数として、 $\frac{1}{a}$ は a をかけると1になる数としてそれぞれ導入することができる。その上で、 $\frac{b}{a}$ は $\frac{1}{a}$ を b 倍した数として理解が可能となる。「 -3 等分」や「0.3等分」といった等分の考えに依拠しないことで拡張がしやすいと言える。

4. 分数と量との関係の再構築

本稿の方針では数1との関係により分数を導入し、その関係やそれにより得られる単位分数の個数に基づいて大小比較、計算の仕方を考えた。こうした新たな数の必要性、あるいはそれに関して大小比較や演算を考える必要性、さらに大小比較や計算の仕方の妥当性を学習者に伝えるためには、二つの仕方が考えられる。第一は自然数の学習を参照し、 $1 \div 3$ などの除法の商を表すことから新たな数の必要性を考え、また新たな数についても自然数と同様に大小比較や演算を考えるとそれらの必要性を示すものである(布川, 2021b)。大小比較や計算の仕方の妥当性は、それらと既習の自然数に関する大小比較や計算の仕方との整合性、分数の計算どうしの整合性などにより示すことになろう。第二は量を参照し、ある種の量を表すことから分数の必要性を示し、また量の事象に整合するように分数の大小比較や計算の仕方を決めるものである。

さらに第一の仕方で分数やその計算の必要性、妥当性を確認した場合には、分数やその計算を量の場面に対して適用してよいかが問題として残される。この正当性を確認するためには、分数の計算結果から予想される量の現象が、量についての実際の操作や観察した結果と整合することを確認することが必要となろう。例えば、1mのテープを5等分したうちの1つ分の長さは、5つ分で1mに戻るのを、これを5倍すると1になる数 $\frac{1}{5}$ を用いて $\frac{1}{5}$ mと表すとした時に、数 $\frac{1}{5}$ などに関わる大小比較や計算をした結果が、テープの操作やその結果に対応することを確認するのである。

このように、分数を数1との関係に基づき導入するとしても、数や演算の必要性、計算の仕方の妥当性、量への適用可能性を学習者に認めてもらおうとすると、量の操作や観察を必要とする学習場面が訪れると考えられる。その点では教科書の展開と類似となる。ただし、量の表現に現れることを越えて、分数がどのような数かを明示的に説明することにより、分数を量と切り離して考えることができる。それにより、新たな数を構成するという意図も明確となり、分数と量の関係も意識しながら分数の学習を展開できる可能性があるとも言えよう。

5. 本稿の考察の意義

3.1で述べた方針で分数を導入することは、一方において分数がどのような数かを明示的に説明するような導入の仕方を試みることであり、また他方では数1を等分するという操作に依拠しない形での説明の仕方を試みることであった。第3節で見てきたように、こうした導入の仕方をし、その際に示される分数の性質をもとにすることで、分

数についての算数の学習内容を扱うことは可能であると考えられる。またその展開では、同値分数や商を表す分数に関しては、現行の教科書のように量に依拠せずに考えていく可能性も示された。したがって、本稿のような分数の導入の方針は、算数における分数の学習として新たな選択肢を提供するものと言える。

しかし第4節で検討したように、分数の性質に依拠した扱い方をするとともに、新たな数や演算の必要性、計算の仕方の妥当性、量への適用可能性を学習者に認めてもらうためには、量についての場面を参照する必要があることも示された。ただしこうした検討を行っておくことは、数としての分数の学習における量の役割や、量と数の関係を明確にすることにつながることも考えられる。

また第3節の議論が3.1で検討した等分と倍の操作の捉え方から出発していたことを想起するならば、本稿の考察は、分数の学習の基本的な方針は等分と倍の操作の捉え方に大きく依存することを示すものでもある。等分や倍の操作を量に対して考えた場合、その操作は日常の経験から理解することが可能であるが、他方で分数は量の変換や割合を表す(布川, 2022)こととなる。そのため、数を独立した算数的対象として抽出することは、変換や割合を独立した算数的対象として扱うことになり、学習者への説明がしにくくなる可能性がある。現行の教科書の第3学年で、分数を量の表現のために用いながら、ある時点で単位を伴わない数直線と分数を対応させるような提示が説明なしに行われ、それにより数への移行を図ろうとするのは、そうした難しさがあるからだと考えられる。

これに対して等分や倍を数の操作としても認めた場合、それらを数1に対して施すことにより、分数をある種の数として最初から導入することができる。ただしこの場合、数1に対する等分の操作とは何かという問題が残る。また本稿の方針のように自然数倍だけを考える場合は、新たな数である単位分数に対して自然数倍の操作や併せるという加法的な操作が必要となり、そうした操作を施すことが可能な対象として新たな数を学習者が理解できるかという問題が残る。

このように本稿の方針についても現行の教科書の方針についても課題が残る、本稿の考察にのみよっては分数の適切な導入の仕方を決めることはできない。しかし、指導や学習における分数の扱い方に関して、等分と倍の操作の捉え方により大きな方針が決まること、またその捉え方に応じて指導上の問題点が存在することは明らかにされた。したがって、分数の指導や学習を検討する際に、等分と倍に対する立場を明確にし、それに基づいて議論をすることの必要性が、本稿の検討を通して明らかにされたと言える。

6. おわりに

中学校数学で分数を扱う場面を考慮した場合、分数の理解における「等分」の側面をどのように外していくかは、一つの大きな課題と考えられる。小学校第5学年で学習するわり算の商を表す分数を分数の定義とすること、いわゆる分数の第二義(例えば岡野(2015)参照)に重点を置くことは、この課題の解消につながりうる分数の理解の仕方である。ただし現行の教科書では、第6学年の分数の乗法や除法の学習でも量を媒介した学習が重視されることから、結果として「等分」の側面を強く保持したまま算数の学習を終える形になっている。

本稿で提案した分数の導入の仕方では、「3つ併せると1になる数」あるいは「3倍すると1になる数」などとして分数を導入した。1÷3の商が3倍して1になる数と考えるならば、これは第二義による導入に近いとも言える。他方で、非単位分数については単位分数のいくつ分かとして導入し、2÷3のこととして分数 $\frac{2}{3}$ を導入することはしておらず、この点では第二義とは異なっている。本稿の分数の導入の仕方は、いわゆる第一義と第二義の枠組みにも属さないものと考えられる。そうした導入の仕方でも算数の学習を展開しうる可能性については第3節で確認してきたが、第4節で見たような量との関わりも考慮して具体的な学習場面として構成し、その効果を確認することが今後の課題となる。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：20K03271)の助成を受けて行われたものである。

註

- 1) 本稿では2020年度に使用されていた教科書を参照している。

参考文献

- Cooper, J. & Lavie, I. (2021). Bridging incommensurable discourses: A commognitive look at instructional design in the zone of proximal development. *Journal of Mathematical Behavior*, 61, 100822. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100822>

- 今井むつみ・楠見孝・杉村伸一郎・中石ゆうこ・永田良太・西川一二・渡部倫子 (2022). 算数文章題が解けない子どもたち：ことば・思考の力と学力不振. 岩波書店.
- Pedersen, P. L., Aunio, P., Sunde, P. B., Bjerre, M., & Waagepetersen, R. (2022). Differences in high- and low-performing students' fraction learning in the fourth grade. *The Journal of Experimental Education*.
<https://doi.org/10.1080/00220973.2022.2107603>
- 布川和彦 (2019). パターンの記述とパターンの対象化の観点に基づく教科書における分数量学習の展開についての検討. 日本数学教育学会誌, 101 (12), 2-15. https://doi.org/10.32296/jjsme.101.12_2
- 布川和彦 (2021a). 分数量学習のための基本枠組みの試論：変換としての分数とそのカプセル化. 上越数学教育研究, 36, 1-16.
- 布川和彦 (2021b). 分数の授業に見られるディスコースの特徴. 日本数学教育学会第54回秋期研究大会発表集録, 25-32.
- 布川和彦 (2021c). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, 40 (2), 361-372.
- 布川和彦 (2022a). 分数を含む文章題における小学校6年生の解決の様相. 日本数学教育学会第55回秋期研究大会発表集録, 153-156.
- 布川和彦 (2022b). 「量分数」の再検討：「測定値としての分数」を視点として. 日本数学教育学会誌, 104 (2), 2-13.
https://doi.org/10.32296/jjsme.104.2_2
- 岡野勉 (2015). 師範学校からの意見報告と国定算術教科書の改訂：初等数学としての分数論に対する志向性とその帰結. 数学教育史研究, 15, 1-12.
- 瀬山士郎 (1996). 数をつくる旅 5 日間. 遊星社.
- 高木貞治 (1949). 数の概念. 岩波書店.
- 田村二郎 (1978). 量と数の理論. 日本評論社.
- Wortha, S. M., Bloechle, J., Ninaus, M., Kiili, K., Lindstedt, A., Bahnmueller, J., Moeller, K., & Klein, E. (2020). Neurofunctional plasticity in fraction learning: An fMRI training study. *Trends in Neuroscience and Education*, 21.
<https://doi.org/10.1016/j.tine.2020.100141>
- 吉田誠 (2010). 同値分数指導について. 新しい算数研究, 479, 34-35.

Teaching Fractions by Introducing Fractions as Numbers

Kazuhiko NUNOKAWA*

ABSTRACT

While students generally can calculate fractions well, they do not fully understand fractions as numbers. To develop learning activities that increase students' understanding of fractions as numbers, this paper attempted to examine the possibility of introducing fractions as numbers from the outset when teaching and learning fractions.

First, two previous fraction construction methods were reviewed to illustrate their characteristics and examine the difficulties that could occur when these methods were used in elementary school mathematics and the issues that needed to be considered when checking the current curriculum and textbooks. Then, another fraction construction method that introduced them as new numbers was presented and it was assessed whether it was possible to introduce and explain the fraction concept to elementary students in this way.

It was found that (a) the introduction of fractions as numbers with the certain relationships to number 1, which did not require equipartitions of unit-quantities or number-1, could be the basis for learning the properties and operations of fractions students needed to learn at elementary schools; and (b) the explicit introduction of fractions as numbers could make the relationship between numbers and quantities clearer for the students and the teachers.

* School Education