上越教育大学研究紀要 第17巻 第1号 平成9年9月
Bull. Joetsu Univ. Educ., Vol. 17, No. 1, Sept. 1997

科学教育における量の計算法について

森 川 鉄 朗*・西 山 保 子*

(平成9年4月30日受理)

要 旨

日本の科学教科書における物理量の計算法は，中等教育と高等教育において，全く違う考え方に立っている。以下，前者を日本の高等学校の教科書に典型的に見られる方法なので日本式とよび，後者を国際単位系や英語圏の教科書に採用されている方法なので国際式とよぶ。日本式の計算法では，単位は数値のわきに置く記号と考えて，数値間で式をたて演算し，単位はあとで調整付加する。国際式の計算法では，物理量は数値と単位の積に等しいと考えて，物理量を単位とは無関係に記号であらわし，単位つきのまま物理量間で直接演算する。本稿では両者の相違を，物理量の分類，物理量の関数，量の計算法の古典などにさかのぼって議論し，さらに日本の中等教科書にみられる問題点を，いくつかの例を参照しながら検討する。未知の量として数値ではなくて物理量を選び，式をたてる，計算法を採用するとよい。日本の中等教育と高等教育との間にある上記の不連続性は，早急に解消されるべきである。

KEY WORDS

quantity calculus	量の計算法	physical quantity	物理量
unit	単位	numerical value	数値
operation	演算	dimension	次元
extensive	示量性	intensive	示強性
standard quantity	標準量	textbook	教科書
science education	科学教育	SI	国際単位系

1．序 論

量の計算法における量とは，物理量，単位，物理定数，数値（または数）やそれらを組み合わせたものをさす。以下では，これらの量の演算方法を量の計算法[1]とよぶことにする。量の計算法は計算問題を解くための手段であると，科学教育では考えられがちであるが，そうではない。量に関してどのような計算法を採用するかは，科学の教科書に重大な影響を与える。以下で詳しく議論するように，科学の学習者にとって計算法の習得は極めて重要である。この重要な方法が，中等科学教育段階において，日本の科学教科書[2-4]と国際単位系(SI)[5]に代表される国際文書や英語圏の教科書[6]とで比較すると，全く違っていることがわかる。以下では，前者を日本式とよび，後者を国際式とよぶことにする。日本の高等教育（物理学や化学）で使用される多くの教科書は，国際式に移行している。

---

* 自然系教育講座

単位とは，基準として選ばれた物理量のこと[5,7]であり，ある単位を基準にして物理量を測定すれば，その結果は，物理量＝数値×単位（物理量は数値と単位の積に等しい），と表現[8]できることになる。ここでいう物理量とは，長さ，面積，体積，質量，時間，電流，温度，力，圧力などをさす。物理定数とは，広く利用できる特定の物理量の測定値または定義値のことで，やはり，物理量＝数値×単位，と表現できる。SI は，この表現を単位系の組み立て方の基本[5]にすえている。国際式の計算法では，物理量と物理量との間で式をたて，演算するので，得られる結果もまた，同様な表現となる。

既に指摘[7]したように，日本式の計算法では，SI を導入するとしながらも，物理量＝数値×単位の考え方を採用しない。日本式では，単位を数値のわきに置く記号と考え，物理量の演算の際に数値のみの演算をして，最後に単位を調整付加するのである。また，物理定数の表現では，数値のわきに単位を置くが，両者の関係を積とは考えていない。日本の学生は，高等科学教育において，日本式を改めて国際式の計算法を学習をすることになる。このような，中等教育から高等教育に至る段階の不統一性によって，学習者が混乱しているのは明らかである。

本稿では SI をもとに，量の計算法を議論する。SI は科学教育で学ぶべき物理量の規範だからである。まず，物理量を分類し，物理量の特性をはっきりさせ，物理量の関数のあつかい方の注意を指摘する。物理量の演算についての歴史的な例も検討する。計算法の基本である単位系の背景となる考え方を知り，さらに，物理量の計算法の一般的な規則を考察するためである。以上の結果と照らし合わせて，日本における現行の中等教科書の問題点を指摘する。本稿で詳しく検討するように，国際式と日本式との最大の相違点は，物理量＝数値×単位を採用するかしないか，にある。SI ではさらに進んで，単位も物理量であると，明確に主張している。この点は，熱力学的温度とセルシウス温度の換算式[5,6,9]をみれば，よくわかる。日本式の計算法を学習しても，SI の換算式は全く理解できない。最後に，科学教育における量の計算法について，その習得の重要性を節を改めて議論する。

2．物理量の分類について

物理量の任意の組み合せに対して，四則演算（加法，減法，乗法，除法）は不可能である。数（実数）との違いである。物理量間の演算が可能か不可能か，あるいは，物理的に意味があるのかないのかは，自然科学の法則によって一つ一つ確かめていくしか方法はない。質量と体積の加法は物理的に全く無意味である。後で詳しく議論するが，このことを次元が違うという。また，水とアルコールの体積のように，同次元で物理的に混合（合併）できても，混合前後の値は等しくならない場合もある。このことを物理化学的（物質の固有な）性質によるものという。これらの例が示すように，加法一つをとっても単純ではない。以下にまず準備をする。

物理量は物理量＝数値×単位と一般的に表現されるとするのが，SI の立場である。そこで，二種の物理量があると，その四則演算（もし可能ならば）の結果もやはり，この一般形となる。このことを以下で詳しくみてみる。ある次元をもつ物理量 q の単位 u とは，q と同種の物理量で基準として選ばれたものをいう。物理量 q の測定とは，q と u とを比較して，q は u の何倍かを知る作業[7]である。ここで，u はヤードステックのような役割をはたしている。そこで，$q/\mathrm{u}=a$ あるいは $q=a\times\mathrm{u}$ とあらわせる。ここで，a は数値[8]（実数）を示す。SI では，物理量として斜体を，単位の記号としてローマン体（立体）を使うように，要請されている[5]ので，以後，本

稿でもそれにしたがう。

SI では，独立な次元を七種として，それぞれに基本単位一種を用意する。これらの単位の記号は，m（メートル），kg（キログラム），s（秒），A（アンペア），K（ケルビン），mol（モル），cd（カンデラ）である。SI では，これら七種の基本単位の乗除算だけで，全ての単位をつくりだす。さらに，SI では，ある単位に，10の整数乗を意味する接頭語をつけて，新しい単位の記号とみなす。そこで，10，m，kg，s，A，K，mol，cd の指数（正，負または 0 の整数）をそれぞれi_0，i_1，$i_2, \ldots$，i_7とすれば，ある単位u_iは次のように略記できる。

$$u_i = (i_0,\ i_1,\ i_2, \ldots,\ i_7)$$

そこで，i を j で置き変えれば，別な単位u_jを得る。以下では，$q_i = a_i u_i$ のように記号を使う。二種の物理量q_iとq_j（$i \neq j$）は，$i_k = j_k$，$k = 1, 2, \ldots, 7$ のときのみ，同次元であるという。二種の物理量が異なる次元をもつならば，加減法$q_i \pm q_j$はできない。このことを，加減法は物理的に無意味であるともいう。だが，同次元の物理量でも常に加減法ができるわけではない。そこで，同次元の物理量（複数）は，加法的かそうでないかで，類別できる。このことを以下で説明する。

物理的な諸科学であつかわれる多くの物理量は，示量性（extensive）か示強性（intensive）かで，二種類に大別するのが便利[10]である。この分類は，Tolman[11]が1917年に提案した。前者は容量性などともいい，後者は強度性などともいう。対象としている物理系の物理量が加法的であるとき，その物理量は示量性といわれる。ある物理量[12]が加法的とは，系の部分における物理量をq_iであらわすと，系全体の物理量 qがq_iの和に等しいときをいう。質量とか体積とかエネルギーとかが示量性物理量の代表例であり，その他に，物質量，エントロピーなどがある。ここで注意すべきことは，物理量の加法性は，一つの物理系の二つの部分系あるいは同種の二つの物理系を合併するときに成立する点である。ある物理系の物理量がその系において示量性であっても，別のもう一つの物理系を合併すると，その物理量は加法的でないことがある。水とエチルアルコールの混合後の体積は，混合前の体積の和よりも小さい。つまり，合併はできるけれども，合併前後の値は等しくない。物質に固有な性質に依存しているのである。示量性物理量の変化[13]は，移動と生成または消滅とが原因である。

対象としている物理系の物理量は，系全体の物理量 q がどの部分系の物理量q_iにも等しいとき，示強性といわれる。示強性物理量の例は，温度，圧力，屈折率，モル体積，モル分率，化学ポテンシャルなどである。ある均一な溶液の体積を v，質量を w とすれば，その密度[14]（つまり質量濃度，単位体積あたりの質量）d は $w/v = d$ である。この溶液を二つの部分に分けて，部分の密度を，$d(1) = w(1)/v(1)$と $d(2) = w(2)/v(2)$と書く。無論，$d = d(1) = d(2)$である。つまり，密度は示強性である。このとき，二つの量 $d(1)$と $d(2)$の次元は等しいのだが，加算，$d(1) + d(2) = 2d$，は物理的には全く無意味である。数学で使われる比例式では，$w(1)/v(1) = w(2)/v(2) = \{w(1) + w(2)\}/\{v(1) + v(2)\}$ と書く[15]ことがある。この比例式は，つねに成立するのではなくて，均一な溶液についてのみ成立しているのである。示強性物理量は，伝播または物質の移動によって変化[13]する。示量性と示強性のいずれでもない物理量もある。

二種の物理量q_iとq_j（$i \neq j$）の乗除法は，$q_i q_j = \{a_i a_j\}\{u_i u_j\}$ と$q_i/q_j = \{a_i/a_j\}\{u_i/u_j\}$ であらわせる。ここで，$u_i u_j$とu_i/u_j

$$u_i u_j = (i_0+j_0,\ i_1+j_1,\ i_2+j_2, \ldots,\ i_7+j_7)$$
$$u_i/u_j = (i_0-j_0,\ i_1-j_1,\ i_2-j_2, \ldots,\ i_7-j_7)$$

は単位であり，$a_i a_j$ と a_i/a_j は数値である。すなわち，物理量の乗除算の結果は，物理量＝数値×単位の一般形であらわせる物理量となる。

エネルギーは物理量間の乗法のよい例である。エネルギーの次元は，(any, 2，1，-2，0，0，0，0) なので，二種の物理量の組み合せ（積）としてみると，次の例がみつかる。圧力と体積，表面張力と面積，力と長さ，仕事率と時間，モルエンタルピーと物質量，温度とエントロピー，電位と電荷，など。いずれも，示強性物理量と示量性物理量の組み合せとなっている。

物理量の除法で使われる多くの分母は，示量性である。単位物理量で別の物理量を割算すること，つまり，なになにあたりの物理量をつくるやり方は特に重要である。単位物理量が系全体を代表する物理量のとき，例えば，体積とか質量とかのとき，系のサイズに依存しない新しい物理量をつくる方法である。示強性物理量の合成法則として，二種の食塩水の混合[15]を考える。濃度（食塩の質量/食塩水の質量）を x/a と y/b とで表現して，仮に $x/a<y/b$ とすれば，$x/a<(x+y)/(a+b)<y/b$ の関係を得る。混合操作では平均をとることになる。今，二種の食塩水を a 対 b で混ぜると，加重平均は，$(x/a)(a/(a+b))+(y/b)(b/(a+b))=(x+y)/(a+b)$＝混合後の濃度だから，混合比率 a 対 b で分配されている。このような例は元素の相対原子質量にもみられる。

等式の左右は，つねに同次元である。すなわち，同次元の物理量のみ等しくおける。例えば，氷点における，セルシウス温度を θ(ice) で，熱力学的温度を T(ice) であらわす。物理量 θ(ice) を物理量℃で，物理量 T(ice) を物理量 K で測定（定義）すれば，0 と273.15という数値を得る。そこで，θ(ice)/℃＝0 や T(ice)/K＝273.15と書ける。さらに，θ(ice)＝0 ℃または T(ice) ＝273.15 K と変形してもよい。温度という物理量を，二種類の単位を用いて，表現していることになる。

3．物理量の関数について

ある変数 x の関数 $f(x)$ は，x のベキの有限級数または無限級数として展開できるとき，解析的とよばれる。物理や化学でよく現れる解析関数の例としては，$1/(1-x)$, $\sin x$, $\log x$, $\exp x$ などがある。ここでの注意は，物理量を x として使えない点である。仮に，x に次元があるとすると，関数 $f(x)$ の展開項には，x^2, x^3 などが現れるので，項ごとに次元が違ってしまう。そこで，一般に物理量 x の関数をあつかうときには，x/x^0 を関数の引数[16]に選ぶ。ここで，x^0 は x と同次元で標準として選ばれた物理量[17]であり，故に，x/x^0 は無名数（数値）となる。つまり，$f(x/x^0)$ とするのである。こうすると，関数 $f(x/x^0)$ も無次元の数値となる。例えば，水素イオン指数 pH の定義[1,18]は，水素イオンのモル濃度 $c(H^+)$ と標準のモル濃度 c^0＝mol dm^{-3} とを用いて，次のようにあらわせる。

$$\mathrm{pH} = -\log(c(\mathrm{H^+})/c^0) = -\log(c(\mathrm{H^+})/\mathrm{mol\ dm^{-3}})$$

二種の関数 $f(x/x^0)$ と $g(y/y^0)$ とはいずれも無次元（の数値）である。だが，もし，x と y の次元が異なるならば，これらの関数の加減法は意味がない。量の計算法では近似式，$1/(1-x) \fallingdotseq 1+x$，$\ln(1-x) \fallingdotseq x$，$\sin x \fallingdotseq x$，などが使われることがある。等式の左右の項の次元は一致していなければならないのだから，x は当然，無次元である。物理学や化学の学生（と生徒）は，このような変数や関数の次元に注意をはらうように教えられていないことが多い。変数や関数や方程式が数学においてまず導入され，そのまま物理学や化学で利用されるからであろう。数学では，変数や関数は，抽象的な（自然科学でいう無次元で，しかも四則算が自由にできる）量として，定義され導入されている。自然科学教育においては，自然科学特有の性質をもつ量と関数と方程式を学ぶ必要がある。

物理量の除法あるいは比の値を求める計算では，物理量の大きさ，特に分母の大きさに注意をはらうべきである。長さの差分 Δx を時間の差分 Δt で割算して，さらに，$\Delta t \to 0$ の極限をとり，これを高等学校数学では $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と書く。このとき，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ は，$\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}t$ とに分けてはいけなくて，あくまで一つのまとまった記号である。一方，物理学では，$\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}t$ とは初めから分けられていて，それぞれは有限な微小量であり，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ は正に除算である。そこで，物理学のほうが近似にすぎないと考えがちであるが，そうではない。物理学では時間は有限なのであって，$\Delta t \to 0$ の極限値は無意味である。すると数学のほうが特殊な理想状態を示していると考えることもできる。

4．量計算の算法について

物理量の演算に関する国際式の計算法の長所[19]を整理すれば，次のようになる。

1）一つの物理量を，単位とは無関係に，一つの文字であらわせる。
2）計算式の中で次元を自動的にあわせられる。
3）計算式の中で単位が入り混じってもそのまま計算できる。
4）図や表の表現では特にわかりやすい。

ここでの考え方[5]は，物理量＝数値×単位の表現に集約される。以下では，この表現について議論する。

数学では，数と量をあらわす文字の四則演算をあつかう。そこでは，$2x$ とかくと，2かける x の約束である。量の計算法は，数学の演算と似ている点もあるが，数学で使われる量ではなくて，物理量の演算であることに，制限が生じることになる。既に論じたように，量の計算法では，無名数間でも加算できないことがある。例えば，時間 t を標準時間 1 sec で割り，質量 M を標準質量 1 kg で割れば，両者はいずれも無名数だが，加算は無意味である。量の計算法においては，数学における四則演算の規則をそのまま適用してはならない。

国際式の量の計算法は自然科学では古くから使われていて，Lodge[20]が既に1888年に推奨している。以下の例にみられるように，Lodge の計算法は，物理量＝数値×単位を徹底して利用して，物理量間で直接演算していることがわかる。Lodge は物理量間の積と商の問題を考察している。そこで使われている単位は，例えば，長さの単位が feet であり，現代日本のわれわれには，わかりにくい点がある。そこで，彼の例題の一部を SI を用いて書きかえながら検討する。

(i) ある人が，25 km を5 h（時間）で歩くとき，その平均の速さは

$$25\ \mathrm{km}/5\ \mathrm{h} = (25\times1\ \mathrm{km})/(5\times1\ \mathrm{h}) = (25/5)(1\ \mathrm{km}/1\ \mathrm{h}) = 5\ \mathrm{km/h}$$

となる。ここで，1 km/1h＝km/h は，平均の速さの定義により，1時間に1 km 進む速さを示す。さらに，h＝60 min だから，5 km/h＝5(1000 m)/(60 min)＝83 m/min と書ける。この表記法のよい点は，速さを数式で表現できて，しかも，式をこわさずに別の測定モードに変換できることだと，Lodge はいう。測定モードとは，Lodge の用語で，上記の速さの例のように，単位を換算すると，別の測定モードにうつる。

(ii) ある人が1時間に 4.5 km 歩けるとして，40分間歩くとその距離は，

$$(4.5\ \mathrm{km/h})\times(40\ \mathrm{min}) = (4.5\ \mathrm{km}/60\ \mathrm{min})\times40\ \mathrm{min} = 3\ \mathrm{km}$$

となる。日本で中等教育を受けた生徒は，この例題のようには計算しない。そこで後で日本式と比較しながら，この例題を再度計算する。Lodge は，続けて例題をかかげながら，物理量の演算に関する一般則を導きだしている。

(iii) $2\times1\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}\times2 = 2\ \mathrm{m}$，すなわち，数値と物理量の積においては，交換則が成立する。

(iv) $2\ \mathrm{m}+3\ \mathrm{m} = (2+3)\mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$，すなわち，同一の物理量では，数値に関して分配則が成立する。

(v) $4\ \mathrm{m}\times2\ \mathrm{km} = 8\ \mathrm{m}\times\mathrm{km}$，すなわち，物理量の積においては，数値は数値同士で乗除算できる。

(vi) $8\ \mathrm{m}\times\mathrm{km} = 8\ \mathrm{m}\times1000\ \mathrm{m} = 8000\ \mathrm{m}^2$，すなわち，同一の次元では，数値の乗除算の規則を乱すことなく単位をそろえることができる。

5．教科書にみる計算法の問題点について

まず，現行の高等学校の物理教科書[3)]や化学教科書[4)]をみてみよう。どの教科書も，表記法は似ている。「質量 m [kg] の物体にはたらく重力の大きさ F [N] は $F=mg$ である」とか，「重力加速度 g[m/s²]は... $g=$ 9.8m/s²である」とか，「求める時間 t[s]は... $t=100/4.0=$ 25 [s] である」とかが，みつかる。次は，日本の教科書[4)]の代表的な文章である。「圧力一定のとき，一定量の気体の体積が 0 ℃で V_0，t℃で V であるとすれば,... $V=V_0(1+t/273)$，ここで$273=T_0$，$273+t=T$ とする。」これらの例に典型的にあらわれているように，高等学校教科書は，単位は物理量であるという考えに立っていない。イタリック体アルファベットが物理量と数字に使われていて，括弧 [...] が物理量と数字のいずれにも添えられている。この括弧は注意をうながすために，単位を入れておくメモ用紙のようなものらしい。物理量を，単位とは無関係にアルファベット文字で表記する方法ではないのである。物理定数は，国際式の表記法がそのまま採用されている。例えば，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$のようにである（ただし，数値と単位の積とは考えていない）。日本式で表記すれば，$g\,[\mathrm{m/s^2}]=9.8$あるいは $g=9.8\,[\mathrm{m/s^2}]$ となるのだろうか。以上のように，物理量の表記法が一貫していないので，生徒はアルファベット文字ご

とに，数値なのか物理量なのかを判断するか，あるいは混同しながら使用することになる。

ある教科書が単位を物理量と考えているかいないかは，セルシウス温度と熱力学的温度との換算式をどのように表記しているかを，みるとよい。SI では，セルシウス温度 θ と熱力学的温度 T との関係は

$$T/\mathrm{K}=\theta/{}^\circ\mathrm{C}+273.15$$

と定義されている。そこで，25℃をケルビン単位の温度であらわしなさいという，簡単な問題[9]を解いてみる。日本式では，単位は括弧でそえるものなので，上の換算式を全く理解できないであろう。一方，SI ではセルシウス温度という物理量 θ を，同種の物理量である単位℃で測定すると，数値25が得られると考え，それらの積を，$\theta=25\times{}^\circ\mathrm{C}=25\ {}^\circ\mathrm{C}$ と表現する。そこで，$\theta/{}^\circ\mathrm{C}=25$ である。$T/\mathrm{K}=25+273.15=298$ となるので，両辺に単位 K を掛算して，$T=298$ K を得る（物理量＝数値×単位の表現になる）。日本の高等学校教科書[3,4]では，「セルシウス温度 t [℃] と絶対温度 T [K] は，$T=273+t$ の関係にある」と，述べられている。明らかに，アルファベット文字は数値をあらわしている。セルシウス度25 ℃をケルビン単位に変換するには，まず，数字25を取り出す。次に，$T=273+25=298$ と計算する。改めて，ケルビン単位をつけて，298 K と答える（日本式では，$T=298$ [K] と書くべきであろうか）。日本式では，演算はあくまで数のみを対象にしていて，単位はわきに添える記号にすぎないのである。

物理量の演算方法に関して，Lodge の例題（ii）を再考する。日本式の表記法でも，この例題文のように，数値のとなりに単位を置くが，両者の関係を積と考えない。日本の多くの生徒は，次のように解答するであろう。まず，1時間(＝60分)と4.5 km とから数値をとりだす(数値と単位をまとめて一つの物理量，とは考えない)。未知数を x とおいて，比例式 $60:4.5=40:x$ をたてる(題意を数式であらわす)。それを解いて，解 x を得る。解 x はそのままでは数値なので，それに単位をつけ，答とする。一方，国際式の量の計算法では，Lodge の例題(ii)のように，直ちに，物理量間で乗算して解答を得る。ここでは，乗算の意味を理解していることが前提となる。単位の記号を使わないで，(4.5キロメートル/60分)(40分)としても本質は変わらない。求める距離を x として（x km ではない)，速さという物理量 4.5 km/h と $x/$ (40 min) を等しいと置けば，$x/(40\ \mathrm{min})\ =\ 4.5\ \mathrm{km/h}$ を得る。

もう一つ例題，濃度 2g/L の食塩水 10 mL 中の食塩の量を求めよ，を解いてみる。日本の生徒は，前例のように，数値と単位を切りはなして比例式をたてるか，または，次のように計算式をたてて解答するであろう。この濃度では 1000 mL あたり2g 溶けていて，10 mL は10/1000の割合だから，2(10/1000) ＝ 0.02 [g] ですと。一方，国際式による量の計算方法では，(2g/L)(10mL) ＝ 20 mg と，物理量である濃度と体積を単純に乗算する。濃度は単位体積あたりの質量であり，ある体積中の質量を求めるのだから，直ちに掛算すればよいとするのである。求める質量を x (x g ではない) とすると，10 mL の濃度 x/10mL ともとの濃度 2 g/L は等しいので，x/10mL ＝ 2 g/L とおける。その後は，数値は数値間で，単位は単位間で演算し，結果を整理しているにすぎない。国際式では，物理量間で計算式をたてれば，後は機械的な演算ですむのである。

日本式と国際式の計算法には，採用する表記法の背景に，並置された数値と単位の関係に違いがあった。日本式では数値のとなりに備忘のために単位を置き，国際式では両者の関係を掛

算と考えた。国際式の量の計算ができるようにするための前提は，物理量＝数値×単位の考え方に立ち，物理量を単位とは無関係に記号であらわすことにつきる。日本の中等科学教科書には，物理量＝数値×単位の表現はほとんどみあたらないが，密度は単位体積あたりの質量であると，生徒は学習している。そこで，密度の単位 g/cm^{3}や25℃は，いずれも，乗除算で結合されていると徹底すれば，国際式の計算法の第一歩となるのである。

6．量の計算法の重要性について

量の計算法は，計算問題を解くために利用される，単なる技術ではない。物理的諸科学において，量は記号（数字を含む）を用いて，量と量との関係（例えば，法則）は等式や不等式を用いて，あらわされる。科学教育において，児童生徒学生の物理量に関する学習は，段階を追って進む。まず，基本的な物理量をいくつか学び，次に，それらを組み合せて新しい物理量をつくりだす。質量と体積を学んでから，それらの商として密度をつくりだす類である。さらに，自然法則，例えば力は質量と加速度の積に等しいという法則を，複数種の物理量間の関係式として，学習する。こうして，量の学習は，記号や式を用いる表記法を獲得しながら進行することになる。国際式では，単位に無関係に物理量に文字をあてはめ，物理量＝数値×単位の表現法を基本としている。さらに，同種の物理量を等置することで，式をたてる。それ故に，国際式では量の表記法の学習が，物理量と法則を理解する道筋そのものなのである。一方，数の立式と数の演算にこだわる日本式の計算法では，量の表記法の学習と法則を理解する道筋とは，離れてしまう。計算法の学習が計算問題を解く手段におちいる所以であろう。

水の入っているコップと食塩がある。それぞれを，はかりで測ると w(水とコップ)＝ 100 g と w(食塩)＝ 5 gだったとする。食塩を溶かす。生徒に，全体で何グラムかと，きいてみる。無論，食塩は肉眼にはみえなくなるけれども，w(水とコップ)＋w(食塩)＝ 100 g ＋ 5 g ＝ 105 gと答えられればよいわけである。物理量におけるこの国際式の加法は，日本式の表現である100＋5＝105［g］と比べると，はるかに自然である。二つの測定値（物理量）の加法（演算）は，合併しての測定と対応しているからである。彼らが溶解に関する質量の保存性を定量的に把握しているならば，それはこのような量の計算を通じて，明確にあらわされる。物質の性質に関する学習者の理解は，このように，物理量の計算を通じて確認されるのである。（だが，生徒が105g と答えても，保存則を正しく把握していると断定は出来ない。逆はかならずしも真ならず。）

二個のコップにそれぞれ，10℃と70℃の温度の水が入っている。これらを混合しても，80℃にならない。逆に，80℃の水を分割しても，より低い温度の水が得られるわけではない。すなわち，温度という物理量には加法性はない。冷たい水あるいは温かい水のもつ性質は，温度という物理量を通じて，定量的にあらわされるのだが，さらに，上の混合時の物理現象は，温度という物理量には，加法性が成立しないものとして，生徒に把握されるべきである。物理的世界に対する学習者の理解はこのような量の計算を通じて進展する。上の二例が示すように，量の計算法は，その表記法を用いて，物理量のある表現から別の表現にうつることであり，学習者にとっては自然科学における量の定量的な関係（法則や測定量）の把握である。量の計算法は，科学教育において，極めて重要な事項なのである。

量の学習において，特別に重要な量の組み合せは，何々あたりの量とよばれる物理量である。

時間あたりの距離は速さを，体積あたりの質量は密度を，体積あたりの溶質の量は濃度をあらわしている。モルの新しい導入法[7]では，モルあたりの質量(モル質量)という物理量が鍵であった。これらの例にみられるような，二種類の物理量の比はそれぞれの測定値を求めてから計算によって得られるのだから，量の計算法は実験結果の整理と理解にとっても，欠かせない学習事項なのである。量の計算に実際にあたってこそ，量についての理解が進むことは，初等中等高等科学教育のいずれの学習者にとっても，同様である。

日本の中等科学教科書にみられる量の計算法が，国際的に孤立していることは既に述べた。自然科学が国境を越えて発展しつつあるとき，日本式の計算法で育てられた人びとの状況は極めてみじめなものとなるであろう。日本式で表記された測定データは，世界に発信しても読まれないし，世界で通用する物理化学データ集[21]も使えないからである。日本の科学教育では，高等教育段階で，国際式の量の計算法を学習している。日本の中等教育と高等教育の間にあるこのよう段差は，早急に解消されるべきである。

注と文献

1) I. Mills *et al*., Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry, IUPAC, Blackwell Scientific Publications, Oxford (1988); second ed., 1993; 日本化学会標準化専門委員会監修, 朽津耕三 訳, 物理化学で用いられる量・単位・記号, 講談社(1991)。E. A. Guggenheim and J. E. Prue, Physicochemical Calculations, North-Holland Publishing Company (1955); 藤代亮一，鈴木啓介，天谷和夫 共訳，物理化学計算法，内田老鶴圃新社 (1957)。用語の"quantity calculus"または"algebra of quantities"を，朽津は物理量の四則演算と，藤代らは量の方程式または量の計算方法と，和訳している。

2) 中学校理科，学校図書，平成5年2月。中学校理科，教育出版，平成5年1月。中学校理科，大日本図書，平成4年1月など。

3) 詳説物理IB，三省堂，平成6年3月。物理IB，実教出版，平成6年1月。物理IB，第一学習社，平成6年2月など。

4) 化学IA，三省堂，平成6年3月。高校化学IB，実教出版，平成6年1月。高等学校新編化学，第一学習社，平成6年1月。化学IB，大日本図書，平成6年2月など。

5) 前掲書Millsをみよ。

6) 単位間の換算法については，K. Stead, School Science Review, **65** (No. 231), 233 (1983) に解説がある。長く使われた，R. C. Smoot, J. Price, and R. G. Smith, Chemistry — A Modern Course, Merril Publishing, Ohio (1965-1987) では，$5\ dm^3=(5\ dm^3/1)(1000\ cm^3/1\ dm^3)$ などと計算しているが，熱力学的温度とセルシウス温度の換算式として $K=℃+273$ を採用している。同様なあつかい方は，L. Michels, A Basic Math Approach to Concepts of Chemistry, Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove (1978-1993) にもみられる。また，S. B. Newell, Chemistry — An Introduction, Little, Brown and Company, Boston (1977-1980) では，単位を含む物理量間で乗除算をしているが，換算式を $℃=K\times(1℃/K)-273.16℃$ としている (Newellは273.16を使っている)。

7) 研究紀要 (上越教育大学)，**16**(1)，279 (1996)；**16**(2)，651 (1997)。

8) E. A. Guggenheim, Phil. Mag., **33**, 479 (1942)。彼は，物理量＝数値×単位における数値

を，その物理量の measure とよんだ。

9) P. W. Atkins, Physical Chemistry, W. H. Freeman and Company, New York (1990), fourth ed., Example 1.3では，$T/\mathrm{K}=\theta/℃+273.15$ (exactly) を採用している。

10) O. Redlich, J. Chem. Educ., **47**(2), 154 (1970)。用語 extensive と intensive については，この Redlich や前掲の Guggenheim (1942) とその引用文献をみよ。さらに，最近の文献，S. G. Canagaratna, J. Chem. Educ., **69**(12), 957 (1992)，も参照せよ。数学の領域では，示量性の量を外延量とよび，示強性の量を内包量とよぶことがある。例えば，遠山 啓 編，現代化数学指導法事典，明治図書 (1971) をみよ。

11) R. C. Tolman, Phys. Rev., **9**, 237 (1917)。

12) 野村昭之助，化学教育，**26**(2)，103 (1978)。この文献では，物理量を物理化学量とよぶ。成分の量だけではなく，物質の構造や結合様式に依存する物理化学量は構造依存性をもつという。ある物質の物理化学量の加成性とは，物理化学量がその物質の成分に固有な量の和としてあらわされるときをいう。原子量と分子量については，加成性が成立する。質量については加法性が成立し，したがって，相対質量についても加法性が成立するから。

13) 佐藤弦，化学教育，**33**(5)，408 (1985)。

14) 諸橋轍次，大漢和辞典，大修館，によれば，度は度合をあらわし，率は率分のことである。度とは，ある物理量を別種の物理量で割るときの量につける。速度は長さを時間で，密度は質量を体積で割る，などがその例である。率は同種の物理量の比（の値）を意味する。円周率は円周を直径で割る。百分率は百あたりの割合である。その他に，混合率もある。度や率の現今の用法には，みだれもある。例えば，反応進行度[5]の度は上記の意味ではない。

15) 銀林 浩，人文的数学のすすめ，日本評論社 (1989)。

16) ある関数の変数 x を計算機用語では引数（ひきすう）とよぶことがあるが，純粋数学ではあまり使われないようだ。

17) 標準状態における物理量を示す記号として，IUPAC[5]は，物理量の右上肩に添える記号を推奨している。小さな丸か，または，横に串ざしされた小さな丸（プリムソルとよばれる）である。以下の Everett によれば，プリムソル記号 $\ominus$ は，S. Plimsoll (1824-1898，英国の政治家）に因む。彼は，荷積の限度を示すため船体の横につける乾舷標（プリムソル指標）を導入した。D. H. Everett, An Introduction to the Study of Chemical Thermodynamics, second ed., footnote 1 in section 5.4, Longman Group, London (1971)；玉虫伶太，佐藤弦 訳，入門化学熱力学，東京化学同人 (1974)。

18) 熱力学では，気体の圧力 p は，例えば，自然対数関数 $\ln(p/p^0)$ のように比の形で現れる。その他の著名な関係式として，次の式が知られている。Arrhenius の式，$k=\mathrm{A}\ \exp(-E/RT)$ では，k は反応速度定数で，E は反応に特有の定数で活性化エネルギーとよばれ，R は気体定数である。Helmholtz の式，$\Delta G=RT\ln K$ では，ΔG はギブスエネルギー変化，K は反応の平衡定数である。

19) 前掲書 Guggenheim and Prue の序論をみよ。

20) A. Lodge, Nature **38**, 281 (1888)。

21) 例えば，D. R. Lide, CRC Handbook of Chemistry and Physics, 76th ed., CRC Press (1995) と引用文献をみよ。

Quantity Calculus in Science Education

Tetsuo MORIKAWA* and Yasuko NISHIYAMA*

ABSTRACT

There are two different ways of calculating physical quantities in the science education of Japan; the one, called the Japanese method hereafter, has been introducing to high-school students; the other, called the international method, has been adopted by the International System of Units (SI) and by textbooks for English-speaking people. The Japanese method interprets a physical unit as being only a symbol, and is concerned with the arithmetic operations of numbers. The international method considers a physical quantity to be equal to the product of a numerical value and a unit, and multiplies and/or divides one physical quantity by another directly. This paper discusses both difference between Japanese and international methods and many problems awaiting solution in the high-school textbooks of Japan. The discontinuity above-mentioned in quantity calculus should be dissolved to form a better organization.

* Division of Science