

誘起されたチャーン-シモンズ (Chern-Simons) 項を含む格子ゲージ理論の相構造

高野 浩志*・松居 哲生**

(平成6年10月31日受理)

要 旨

高温超伝導や量子ホール効果などの解析で、有効的場の理論として現れる2次元のチャーン-シモンズ項を含む理論に注目する。具体的に仮想フェルミオンにより誘起されたチャーン-シモンズ項を持つU(1)格子ゲージ理論を構成し、平均場近似を使ってこの理論の相構造を解析する。

KEY WORDS

two dimensional	2次元	Chern-Simons	チャーン-シモンズ
lattice gauge theory	格子ゲージ理論	phase structure	相構造
mean field	平均場		

1 はじめに

高温超伝導や量子ホール効果などの物質が示す不思議な現象がなぜ起こるのか。その原因を探る際、その主役である電子の運動またはスピンの平面に束縛していることに注目して、なんらかの2次元性に特有な性質が反映して起こる現象である、と考えるのは自然である。実際TTF-TCNQという物質は電子の運動が擬1次元的であり、そのための特有な性質、フェルミオン面のネスティングによってパイエルズ転移が起き、電荷密度波が存在している。また最近の実験でスピン波のギャップが観測されたが、これも1次元スピン系特有のハルデインギャップに起因するものである。

それでは、高温超伝導などの現象において、2次元のどのような性質が反映しているのだろうか。もちろん、いろいろな性質が絡んでいると思われる。その中で、重要な鍵を握っていると考えられていることに、チャーン-シモンズ (CS) 項の影響、が挙げられる。

2次元の電磁気学では3次元での馴染み深いマックスウェル項以外に、チャーン-シモンズ (CS) 項の存在が許される。普通の連続理論の作用には、マックスウェル項は $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)$ という形で、チャーン-シモンズ (CS) 項は $\epsilon_{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho$ という形で現われる。最初に議論

* 情報処理センター

** 近畿大学理工学部

された動機は、この項が2次元のゲージ場（例えば光子の場）に質量を与えることができること、さらに空間のトポロシーに関連していることから、この項が含まれている量子電気力学（QED）に電子のようなフェルミオンなどの物質が相互作用している系はどういうものか、という理論的なものであった。⁽¹⁾（1981）

その後、高温超伝導が発見された翌年（1987）、CS項目によって物質の統計が変化できることが指摘された。⁽²⁾例えば電子のようなフェルミオンがある条件のものボゾンにかかわるということである。以前より純粋に2次元の世界では基本粒子の統計が、フェルミオンとボゾン以外にもなりうるということが数学的に示されていた。しかし、具体的なモデルが作られていなかったためこのことは注目をあびることとなった。また次のような新しい超伝導のシナリオが書ける、ということからも注目をあびた。従来の超伝導のシナリオを簡単に述べると、フェルミオンである電子がフォノンの引力によってクーパーペアをつくることで統計的にボゾンとなり、これがボーズ凝縮することで、超伝導が出現する、というものである。もし統計変化が起こるならば、ある条件のもとで電子1個でもボゾンになり、超伝導を引き起こせる、というわけである。もちろんひとつの例を示しただけで、シナリオはいろいろ書けるだろう。そのほか、量子ホール効果との関連も指摘され、CS項を含む理論は多数の研究者の興味をよび、現在も活発な研究がなされている。

我々の空間は3次元なのに、どうして、2次元の理論を調べるか。理由は以上述べたように物質の中の2次元性がある状況で、3次元の基本的な理論から出発し、物性現象の本質を探るために余分な自由度を落とし、現象に重要である自由度を抜き出して、理論を再構成した時、2次元の理論が顔を出せば、それは現象をとらえる有効的な理論として、調べる価値があるからである。この論文では、CS項を含んだ理論が、上記したことを含む何らかの現象の有効理論として現れる場合を想定している。

さて、CS項を含む理論がどういう性質を持っていて、どういう現象を引き起こすかを調べたいのだが、ここでは特にその相構造に注目し、解析を行う。相構造に注目する理由を述べる。理論にはそれを特徴づけるパラメータがある。例えば水を記述する理論だと、温度、水分子の質量や、分子間の相互作用の大きさ（結合定数）などである。もし温度が高くて、気体相にある場合、水分子はほとんど独立に運動していて、結合定数が小さいと考えられる（弱結合相）。そこでは相互作用項を摂動として扱う近似が有効であろう。温度が下がってきて液体相、氷の固体相にいけば、分子同士が近づき結合定数が大きくなる。するとこの強結合相でもはや摂動理論を展開するのは全く意味がなくなり、それにかかわる方法が必要となる。このように一つの理論でもそれを特徴づけるパラメーターの値によって相が変わると、記述する方法を変更する必要が出てくる。水の例だと我々はすでに摂氏0度と100度で相が変わることを知っているが、新しく有効理論としてできたものは、パラメーターがどういう値のときどんな相であるかは未知のことなので、相構造を調べるのが重要となってくる。ところがCS項目を含む理論の相構造の大局的な議論はまだされていない。

どういふ方法で相構造を議論するか。我々はすでに、強結合相をうまく記述する、格子ゲージ理論を知っている。格子ゲージ理論は最初、核力の強い相互作用を記述する量子色力学（QCD）の研究で登場した。相構造のような弱結合を含むものを調べるにはこの格子理論が有用である。そこで、CS項を含む格子理論から出発していく。格子理論とは、時間と空間をメッシュ（格子）に区切りこのうえに構成するものである。ニュートン力学、マックスウエル電磁気

学, 量子電磁気学や量子色力学は連続時空上で構成された理論なので, これらを格子上に再構成する必要がある。従来の研究から, たとえば QED などの作用にでてくる, ゲージ場の運動項すなわちマックスウェル項, $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)$ (x は, 連続時空間の点をラベルする変数で実数) はブラケット変数 $U_{\mu}(n)$ (n は, 格子上の点をラベルする変数で整数) で再構成されることがわかっていて, このブラケット変数を使うことが強結合領域を調べる際重要であることを知っている。ところが CS 項はこのブラケット変数で直接書くことができないという問題がある。そこで我々は, CS 項は格子上のフェルミオンの量子補正で誘起される, ⁽³⁾ という事実を使って間接的に CS 項を格子理論に含ませる。つまり仮想的なフェルミオンを導入すると, それがシステムの相違造に与える影響は量子補正を通して CS 項が与える影響と同じなのである。この論文では, 仮想フェルミオンと普通の物質場フェルミオンと $U(1)$ に群に従うゲージ場を含む, 格子理論を考える。

次に, 相構造を調べるのだが, その方法はいくつかある。くりこみ群をつかって, パラメータの流れを見る方法, モンテカルロ法を使って数値計算をおこなう方法, 平均場近似を使う方法, などである。ここでは, 簡単におこなえて, 定性的に相構造がおさえられる, 平均場近似を採用する。次の第 2 章で, CS 項を含む格子理論の平均場近似を形式化し, その相構造の結果を示す。最後の第 3 章で, まとめと議論, 今後の展望を述べる。

2 CS 項を含む格子ゲージ理論の平均場近似と相構造

我々が考える 2 次元空間の格子ゲージ理論の作用, A と分配関数 Z は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 Z &= \int [d\psi][d\xi][dU] \exp(A_{\psi} + A_{\xi} + A_U) \\
 A_{\psi} &= \sum_x [-\bar{\Psi}_x \Psi_x + K \sum_{\mu} \{\bar{\Psi}_{x+\mu}(r+\gamma_{\mu})(U_{x\mu}^{\dagger})^{q_{\psi}} \Psi_x + \bar{\Psi}_x(r-\gamma_{\mu})(U_{x\mu})^{q_{\psi}} \Psi_{x+\mu}\}], \\
 A_{\xi} &= \sum_x [-\bar{\xi}_x \xi_x + L \sum_{\mu} \{\bar{\xi}_{x+\mu}(s+\gamma_{\mu})(U_{x\mu}^{\dagger})^{q_{\xi}} \xi_x + \bar{\xi}_x(s-\gamma_{\mu})(U_{x\mu})^{q_{\xi}} \xi_{x+\mu}\}] \\
 A_U &= \frac{1}{4g^2 e^2} \sum_{\mu \neq \nu} [U_{x\nu} U_{x+\nu,\mu} U_{x+\mu,\nu}^{\dagger} U_{x\mu}^{\dagger} - 1 + (h.c.)]. \tag{1}
 \end{aligned}$$

作用 A は 3 部分, A_{ψ} , A_{ξ} , A_U から成っていて, それぞれ, 物質場フェルミオン Ψ , 仮想フェルミオン ξ , ゲージ場のマックスウェル項, に関する部分である。 x は格子の各点を表わすラベルであり, μ は方向を示すインデックスで, 空間方向に 1, 2 時間方向は 3, をとる。 μ 方向単位格子ベクトルも μ で表すことにする。 Ψ_x は 2 成分のグラスマン数で (Wilson-Dirac) 物質場フェルミオンであり, ξ_x は CS 項を誘起する (Wilson-Dirac) 仮想フェルミオンである。 γ_{μ} は 2×2 のディラック行列で $[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]_+ = 2\delta_{\mu\nu}$ を満たす。 K, L はホッピングパラメータであり, r, s はいわゆるウィルソンパラメータである。 $U_{x\mu}$ は $U(1)$ 群変数で, 格子点を結ぶ線 (リンク $(x, x+\mu)$) 上に値をもつ。連続極限で, これは $U_{x\mu} = \exp(ieaA_{x\mu})$ のように書ける。ここで e はゲージ場と物資場との結合定数でいわゆる電荷であり, a 格子間隔, そして $A_{x\mu}$ はゲージ場である。この連続極限でみると, Ψ は $q_{\psi} e$ の電荷をもち, ξ は $q_{\xi} e$ の電荷を持っている。 q_{ψ} と q_{ξ} はともに整数としてかまわない。

我々はフェルミオンが含まれる格子ゲージ理論の平均場近似⁽⁴⁾を採用する。普通, 平均場近似は次のように形式化できる。我々は, システムの作用 A に対して分配関数 $Z = \text{Tr} \exp(A)$ か自

由エネルギー $F = -\log(Z)$ を計算したいのだが、相互作用があるため一般には正確に解くことができない。しかし適当な正確に解くことができる平均場の作用を試験的作用 A_0 として仮定すると、その分配関数、自由エネルギー $Z_0 = \text{Tr exp}(A_0)$, $F_0 = -\log(Z_0)$ が計算できる。真の自由エネルギー F はイエンゼン-パイエルス不等式によって上からおさえられているので、 $F \leq F_0 - \langle A - A_0 \rangle$, (ここで $\langle \dots \rangle$ は作用 A_0 に対する平均値を表わす。) 右辺に含まれている変分パラメータを、安定条件を満たしながら、右辺を最小にすることで真の自由エネルギーの近似値を得ることができる。

そこで次のような平均場の作用を考える。

$$\begin{aligned} A_0 = & \sum_x [-\overline{\Psi}_x \Psi_x + K \sum_\mu [\overline{\Psi}_{x+\mu} (r_0 + \gamma_\mu) W \Psi_x + \overline{\Psi}_x (r_0 - \gamma_\mu) W \Psi_{x+\mu}] \\ & - \overline{\xi}_x \xi_x + L \sum_\mu [\overline{\xi}_{x+\mu} (s_0 + \gamma_\mu) V \xi_x + \overline{\xi}_x (s_0 - \gamma_\mu) V \xi_{x+\mu}] \\ & + \sum_\mu J (U_{x\nu} + U_{x\nu}^\dagger)] \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 W, V, J, r_0, s_0 は変分パラメータである。 W, V は実数で全てのリンクで等しいと仮定する。場に関して汎関数積分を実行すると、 $-F_0$ は次のようになる。

$$-F_0 = \sum_k \ln(A^2 + B^2) \sum_k \ln(\hat{A}^2 + \hat{B}^2) + dN \ln T_0(J), \quad (3)$$

ここで

$$\begin{aligned} A & \equiv 1 - 2KW r_0 D, \quad \hat{A} \equiv 1 - 2LV s_0 D, \\ B^2 & \equiv (2KW)^2 E, \quad \hat{B}^2 \equiv (2LV)^2 E, \\ D & \equiv \sum_\mu \cos k_\mu, \quad E \equiv \sum_\mu \sin^2 k_\mu, \end{aligned} \quad (4)$$

であり、

$$T_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp(2J \cos \theta). \quad (5)$$

である。この d は格子の次元数で (今は $d=3$)、 N は格子点の総数である。 ($N \equiv \sum_x 1$) .

$\langle U_{x\mu}^{q_\psi} \rangle$, $\langle U_{x\mu}^{q_\xi} \rangle$ および $\langle U_{x\mu} \rangle$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle U_{x\mu}^{q_\psi} \rangle & = U^{q_\psi} \equiv \frac{T^q(J)}{T_0(J)}, \\ \langle U_{x\mu}^{q_\xi} \rangle & = U^{q_\xi} \equiv \frac{T^x(J)}{T_0(J)}, \\ \langle U_{x\mu} \rangle & = U \equiv \frac{T_1(J)}{T_0(J)} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで

$$\begin{aligned} T^q(J) & = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos q_\psi \theta \exp(2J \cos \theta), \\ T^x(J) & = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos q_\xi \theta \exp(2J \cos \theta), \\ T_1(J) & = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos \theta \end{aligned} \quad (7)$$

以上を用いると、 $\langle A - A_0 \rangle$ は次の式となる。

$$\begin{aligned}
 \langle A - A_0 \rangle &= -K \sum_k \frac{1}{A^2 + B^2} [AD(rU^q - r_0 W) - 2KWE(U^q - W)] \\
 &- L \sum_k \frac{1}{A^2 + B^2} [\hat{A}D(sU - s_0 V) - 2LVE(U - V)] \\
 &+ \frac{\beta}{2} Nd(d-1)(U^4 - 1) - 2NdJU -
 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで

$$\beta \equiv (ge)^{-2} \tag{9}$$

システムの定常状態条件は次の式で与えられる。 $\hat{F} \equiv F_0 - \langle A - A_0 \rangle$ として、

$$-\frac{\partial}{\partial k_i}(\hat{F}) = 0 \tag{10}$$

ここで、 k_i は変数パラメタで、 W, V, J_q, J, r_0 と、 s_0 を表わす。 W, V と、 r_0, s_0 に関する条件式から、次のようなひとつの解のセットを見つけることができる。

$$\begin{aligned}
 r_0 &= r, s_0 = s \\
 W &= U^{q_\psi}, V = U^{q_\xi}
 \end{aligned} \tag{11}$$

この解を、 J に関する条件に代入して次の式を得る。

$$-\frac{\partial U}{\partial J} X + \frac{\partial U^{q_\psi}}{\partial J} Y + \frac{\partial U^{q_\xi}}{\partial J} = 0 \tag{12}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 X &\equiv \beta(d-1)U^3 - J, \\
 Y &\equiv -\frac{1}{dN} \sum_k \frac{G}{A^2 + B^2} \\
 Z &\equiv -\frac{1}{dN} \sum_k \frac{\hat{G}}{A^2 + B^2} - J, \\
 G &\equiv 2rKD - 4r^2K^2WD^2, \hat{G} \equiv 2sLD - 4s^2L^2VD^2,
 \end{aligned} \tag{13}$$

である。

この条件下、 $F_0 - \langle A - A_0 \rangle$ が最小値をとるときの J, U^{q_ψ}, U^{q_ξ} および $\langle U \rangle$ の解を調べる。 U^{q_ψ}, U^{q_ξ} および U は Eq.(6) からわかるように J の関数で、 $J = 0$ のとき、 $U^{q_\psi} = U^{q_\xi} = U = 0$ で、 $J \neq 0$ のとき、これらはなんらかの値を持つ。そこで、 U の値だけに注目しても充分である。

$U = 0$ (a) はあきらかな解で、システムが閉じ込め相にあることを示唆する。そこではゲージ場の揺らぎが大きくて $\langle U_{x\mu} \rangle, \langle U_{x\mu}^q \rangle$ が、0 になる。ここでいう閉じ込めというのは、量子色力学のクォークの閉じ込めのアナロジーで使っている。クォークは基本粒子だが我々の世界では単体で存在せず、常に色一重という条件、例えば三つが閉じ込められて陽子や中性子を構成している。

$U \neq 0$ (b) はシステムが非閉じ込め相にあることを示唆する。 $U \neq 0$ ということは $U_{x\mu} = 1 + iqeA_{x\mu} + O(A^2)$ という展開を仮定した摂動理論が正しく使える相領域である。そこは弱結合相であり、ゲージ場の揺らぎが小さい相領域であり、 Ψ 粒子や、 ξ 粒子が単体でホッピングできて、漸近場の状態として出現できる。 $F_0 - \langle A - A_0 \rangle$ の (a) での値と (b) での値を比較し、どちらが低いかを見ることで、 $\beta - K - L$ 空間の相構造が決定される。

数値計算を計算機にさせることで結果を得た。その際、ウィルソンパラメタを普通とられる

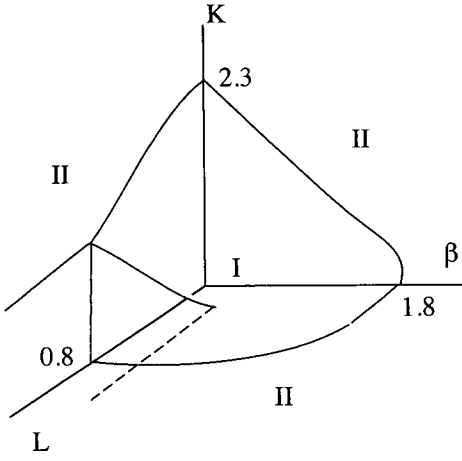


図 1

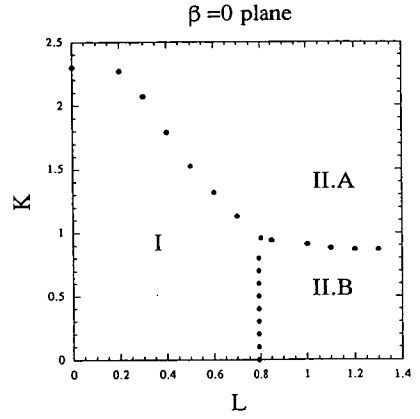


図 4

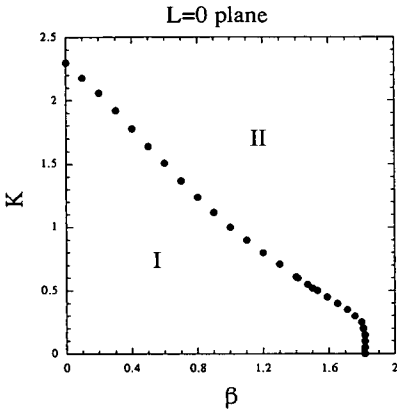


図 2

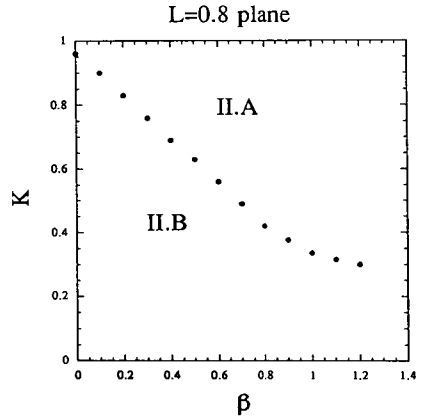


図 5

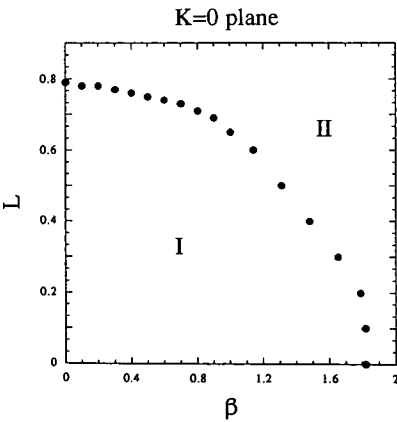


図 3

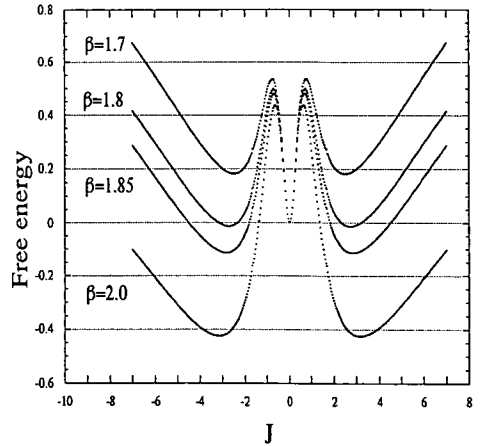


図 6

$r=s=1$ に設定した。さらに理論は $K \rightarrow -K$ かつ $L \rightarrow -L$ の変換で不変なので、 K と L を正確に限った。電荷は $q_\psi = 2$, $q_\epsilon = 1$ にとっている。マックスウェル項が無視できる状況では、 $2\pi(q_\epsilon)^2/2(q_\psi)^2 = 2\pi \times \text{整数}$ という条件が満たされない場合、物質場のフェルミオンが分数統計をもつことが示されている。⁽⁵⁾ この場合は統計変化はおこらない。図 1 に相構造の大まかな様子を示す。詳しい相構造の図は、図 2-4 に示した。それぞれ $L=0, K=0, \beta=0$ の平面上の図である。主に 2 つの領域、I, II に分かれることが見て取れる。領域 I は解(a)に対応した閉じ込め相で、領域 II は解(b)に対応した非閉じ込め相である。解(b)は極小値なので、ひとつとは限らない。領域 II ははその解(b)のなかでどれが最小値かによって、分かれる場合がある。

図 2 では、 β が小さくなるとある値、 β_c で相が閉じ込め相にかわることが示されている。これは結合定数が大きくなると、フェルミオンが単体の粒子としては存在できずに、閉じ込めが起こるということを示している。さらに、ホッピングパラメタ K の値が大きくなるにつれ、 β_c の値が小さくなっている。つまりフェルミオンの運動が激しくなるにつれ、結合定数が大きくなると、閉じ込めが起こりにくくなるということを示している。

図 4 の中、領域 II. A と領域 II. B を分ける線の付近では自由エネルギーに二つの局所的極小値が現れる。これは理論にフェルミオンが 2 種類入っていることの反映である。 J の値の大きいほうの極小値を $F1$, J の値の小さいほうの極小値を $F2$ とすると、この線上で $F1$ から $F2$ の遷移が起こる。谷にあたる極小値 $F1$ と $F2$ を分けている峠は、 β が大きくなるにつれて低くなり、だいたい 1.3 あたりで消滅する。図 5 に、 $L=0.8$ のときの $F1 \rightarrow F2$ 遷移の相構造を示した。

図 6 では相 I ~ II への転移近くの自由エネルギーの典型的な振る舞いを示した。これを見るかぎり、相転移は 1 次であるが平均場近似なので相転移が何次であるかは正確にはわからない。

3 まとめと議論

以上、電荷の違った仮想フェルミオンと物質場フェルミオンを含む $U(1)$ 格子ゲージ理論を研究した。このシステムは物質場フェルミオンと CS 項を含む格子ゲージ理論とみなすことができる。そして、平均場理論を使い、強結合領域も含む一般的なパラメタ空間のなかで、この理論の相構造を解析した。相は基本的に二つ現れ、非閉じ込め相と閉じ込め相である。

この理論は CS 項を含むが、ある条件では CS 項は誘起されないことが示されている。宗氏の計算⁽⁹⁾によると、誘起される CS 項の係数は、 $\text{sgn}(m_\epsilon) \cdot \text{sgn}(s)$ に比例する。ここの解析では、普通とられる値として $s=1$ と設定している。ホッピングパラメタ L と m_ϵ の関係式、 $L=1/(6s+m_\epsilon)$ から、 $L < 1/6$ で係数が 0 となる、すなわち CS 項は誘起されない。CS 項がある場合とない場合では力学的性質はどう違ってくるのだろうか？、その違いの情報を取り出すオーダーパラメタは何か？。ここでの解析ではオーダーパラメタとして U の値しかない。そこで $L=1/6$ の近傍で U の値に何か変化がみられるかどうか調べたが、有意な変化は見られなかった。CS 項のある無しに関わる力学的性質を見るためには、たとえば、場の相関関数の振る舞いなどを見る必要があるだろう。これはモンテカルロ法を使った数値計算が妥当である。

我々が採用した平均場の作用はパラメタが全て実数という仮定をおいたが、一般には複素数に拡張していい。その際なんらかの位相の情報が CS 項の情報を抜き出してくるかもしれない。また、ここでは 0 度の相違構造しか示さなかったが、温度が相構造に与える影響などは、物性

を議論する際重要な因子であるので、温度効果をいれた理論の再構成が望まれる。またスピンスステムの有効場理論を考えた場合、ゲージ群が非可換群になるので、 $U(1)$ からの拡張も必要となってくる。こういった平均場近似の拡張は今後の課題である。

謝 辞

この小論を作成するにあたり、有益な議論をしていただいた榊原氏や宗氏に感謝します。また数値計算は上越教育大学情報処理センターの Sun sparcl0 で実行しました。

引用文献

- (1) S. Deser, R. Jackiew and S. Templeton, Ann. of Phys. 140 (1982) 372, Phys Rev. Lett. 48, (1982) 975
- (2) A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 325.
F. Wilczek, "Fractional Statistics and Anyon Superconductivity" (World Scientific, Singapore 1990).
- (3) H. So, Prog. Theor. Phys. Vol.73 (1985) 528
- (4) R. Horsley, Phys. Lett. B107 (1981) 285, M. Bonini and G. Marchesini, Phys. B110 (1982) 275
- (5) See *e. g.* R. MacKenzie and F. Wilczek. Int. J. Mod. Phys. A3, (1988) 2827

Phase Structure of Lattice Gauge Theory with Induced Chern-Simons Term

Hiroshi TAKANO* and Tetsuo MATSUI**

ABSTRACT

In the analysis of High Temperature superconductivity and quantum Hall effect, it is important to imply the effect of two-dimensionality. We consider a two-dimensional theory as an effective theory of these phase phenomena. Especially, we notice the Chern-Simons term which appears in the action as the special nature of two-dimensionality. A compact $U(1)$ lattice gauge theory of Chern-Simons gauge field is constructed by inducing the Chern-Simons term through Wilson-Dirac fermions. The theory may contain also the usual Maxwell plaquette term and matter fermions. The inducing fermions and matter fermions may have different $U(1)$ charges. The phase structure of the theory at zero temperature is analyzed by mean-field theory.

* Information Processing Center, Joetsu University of Education, Joetsu, 943 Japan

** Department of Physics, Kiniki University, Higashi-Osaka, 577 Japan