上越数学教育研究，第 24 号，上越教育大学数学教室，2009 年，pp.1-12.

比例的推論を利用した割合単元の構想と児童の学習過程

布川　和彦
学校教育学系

１．はじめに

割合も乗法構造を含むことから、比例的推論と関わりがあると考えられよう。そこで、本稿では、中学年において比例的推論を明示的に扱った授業を受けた児童(*cf.* 布川, 2007)が５年生になった時点で、彼らを対象として、比例的推論を利用しながら割合単元を構想するとともに、これを授業として実施し、そこに参加した児童の学習過程を分析することで、そうした授業が児童にどのように受け入れられたのかを考察することを試みる。

２．比例的推論と割合の学習

割合の導入における比例的推論の利用としては、関係する２量について同じ割合になる数値のペアを多数生成する活動を含めて、２量の関係に焦点を当てる試みが行われてきた（田端, 2003; 土屋, 2002）。これとは別に、子どもたちが割合、特に百分率についてのかなり豊かなインフォーマルな知識を持っているとの知見（吉田ほか, 2000）に基づき、これをもとにして導入を図るとする試みも見られる（NRC, 2005; 山口, 2007）。ここでの構想は基本的に後者の立場に依拠している。

2.1. 比例的推論と割合

ここでは比例的推論を２つの伴って変わる量 A, B に対し、A が k 倍になるとき B も k 倍になると考える推論とする。伴って変わることを B=f(A)と表すと $f(k\mathrm{A})=k\mathrm{B}=kf(\mathrm{A})$を意味する。今、$\mathrm{A}_0$ をもとにした A_1 の割合を考える。本稿の調査を実施したクラスで使用されていた教科書(一松, 2008)では、割合が次のように説明されていた：「ある量を１として、くらべられる量がいくつに当たるかを表した数」。これは $f(\mathrm{A}_0)=1$ の条件の下で $f(\mathrm{A}_1)$を考えることになる。$\mathrm{A}_1= k\mathrm{A}_0$ であれば $f(\mathrm{A}_1)= f(k\mathrm{A}_0)= kf(\mathrm{A}_0)= k\cdot 1=k$ となる。これは、$f(\mathrm{A}_0)$を 1 とした上で、比例的推論に基づいて各量に数値を対応させていけば、割合が得られることを意味している [1]。また $\mathrm{A}_2= k\mathrm{A}_1$ であれば $f(\mathrm{A}_2)= f(k\mathrm{A}_1)= kf(\mathrm{A}_1)$として割合がわかっている量から他の量の割合を考えることができる。さらに $f(\mathrm{A}_0)=100$ と条件を変えれば、百分率についても同じ考え方を用いることができる。

このとらえ方に基づくと、もとにする量を固定した上で、様々な量の割合を比例的推論から考えてみるという活動が得られる (*cf.* NRC, 2005)。特に、半分の系列(1/2, 1/4 等)や 1/10 の比例的推論は子どもたちにとっても使いやすいとする知見(Misailidou & Williams, 2003; 布川, 2006; Pothier & Sawada, 1983)をふまえるならば、こうした比例的推論を中心に考えていく(*cf.* 吉田ら, 2000)活動が構想されよう。

2.2. 比例的推論の意識化のための表象

割合の授業では、量を表すテープ図あるいは数直線と割合を表す数直線を組み合わせた二重数直線が用いられることが多く、教科書でも扱われる。調査授業では、2.1 の構想、および授業に参加する子どもたちが４年生のときに、同様

の表象を用いて比例的推論に関わる問題を解決する経験を有していたことに鑑み、その利用にいくつかの変更を加えた。

2.1 で述べたように、比例的推論を用いて様々な量の割合を考えてみるという活動を行うとすると、上の表象を導入の段階から利用することができる。今回の授業では、導入段階からこの表象を利用し、また単元を通して基本的に同じ表象を利用することとした。

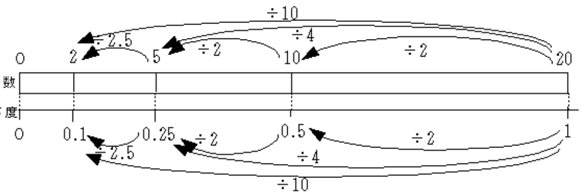

図１：第１時途中の図の様子

また比例的推論を意識化する(布川, 2007)ため、４年生のときに行った授業と同様、数値間の乗法関係を示す矢印を記入することとし、子どもたちが自分の用いた比例的推論を視覚的にとらえられるようにした（図１）。これは、表象を通して、子どもたちが自分の比例的推論をよりよくコントロールでき、それに基づいて彼らの割合に関わる意思決定が支援される(*cf.* 布川, 2005)ことを期待したものでもある（図２）。

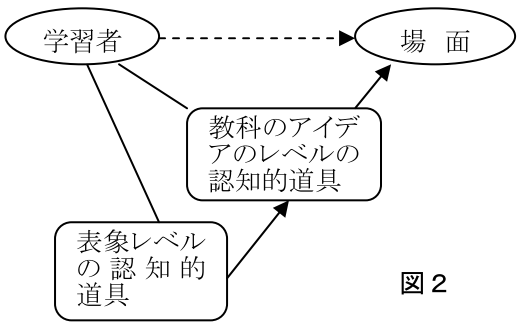

図２

大谷(2002)は表象が社会的機能だけでなく思考機能を伴うように移行することを指摘している。本稿では自分の理解しているものを表現するという面に焦点を当て、表現機能と思考機能として考えていくことにする。

2.3. 比例的推論に基づく導入の意義

2.2 で述べた表象を利用しながら、2.1 のような考え方に基づき、比例的推論を利用して割合の導入を行うことは、次のような意義を持つと考えられる。

(1) 割合の定義との整合性が見やすい。もとにする量を 1 や 100 としたときに、くらべられる量がいくつと見られるか、と比例的推論を用いて考えるところから、割合の導入をはかることができる[2)]。また 2.1 の f の具体化として割合の式を考えていくことになる。この場合、割合が「くらべられる量の程度を表すものである」との意味づけにつながるものと考えられる。

(2) 上のことにも関わるが、割合においても基準を表す 1 あるいは 100%が、常に意識されやすい。Parker & Leinhardt (1995)は、このもとになる数が見えにくいことを、割合を理解する際の1つの困難としてあげている。上述の導入ではこの基準が常に見える形になるため、こうした困難を緩和する可能性が期待される。

(3) 前述のように児童が割合についてインフォーマルな知識を持っていたときに、それを基礎として割合を導入できる。吉田ら(2000)の結果は百分率についてのものではあるが、比べられる量が半分になると割合も半分になるといった、割合に関わる比例的推論についてのインフォーマルな知識を、子どもたちが豊かに持っていることを示唆している。これを利用して、割合の導入をはかることが可能となる。

(4) 3用法の学習において用いられる図との連続性が保たれる。3用法の学習では図1のような図を用いて、演算決定の補助とする場合が多い。割合自体を図1により導入することは、導入段階と活用段階で利用される表象やイメージを統一することになる。また割合の背後にある比例的推論を視覚化することで、3用法の違いを視覚化することにもつながると期待される(*cf.* 布川, 2005)。

なお図の提示にあたってはこれを割合メーターと呼ぶとともに、比べられる量を帯状の色紙で作り、これを徐々に右に伸ばして動的に示すことで、全体に対する程度に目を向け、割合のイメージを持ってもらうようにした。さらに、比べられる量や割合を割合メーター上にとる際に、動的な扱いを単

元を通して心がけた。例えば８回を図１に記入する場合、教師が 0 から指でなぞり、適当な位置まで来たら「ストップ」と言わせるようにした。これは、山口(2007)が液量を用いて行った導入を図の上で行うことに相当する。これにより、子どもの目が向きやすいとされる部分どうしの関係(Boyer *et al*., 2008)より全体と部分との関係に着目しやすくし、もとにする量に対する程度であることが意識されることを期待した。

さらに、子どもたちがもつ程度についてのインフォーマルな知識との接続が断たれないようにするため、単元を通してそれが半分より多い、ほどほどであるなどの表現を求めた。子どもたちは 0 (0%)、1 (100%)、半分などを割合のベンチマークとして利用している(布川, 2005)が、これを生かし、さらにベンチマークを豊かにしようとするものでもある。

３．調査の方法

3.1. データの収集

調査の授業はある小学校の５年生１クラスで２～３月に実施された。60 分の授業を８回、90 分の授業を１回の計９回が行われた [3)]。授業に際し、教室の後方から教師や黒板で発表する子どもの様子を、前方から子どもたち全体の様子をビデオで記録した。また、担任教師との相談により決定した５名の抽出児童 [4)]について、１台ずつのビデオカメラによりそれぞれの子どもの学習過程を継時的に記録した。

3.2. 授業の概要

第１時はバスケットで 20 回シュートしたときに、４人のそれぞれが 20 回、10 回、5 回、2 回入ったという場面を考えた。割合メーター(以下 PM)を提示し、赤い紙の帯を伸ばしていって 20 回を表現するとともに、そのうまさ度を１と決めた。10 回を PM にとる際にも、帯を伸ばしていき、適当な位置で「ストップ」と言わせた。その上で 10 回のうまさ度を尋ねると、すぐに 0.5 という考えが出された。0.5 とする理由を近くの子と話し合わせた後、発表させたところ、回数が半分なのでうまさ度も半分という意見が出された。これを図１のように矢印を伴った形で PM の上に表した。5 回、2 回についても同様に行い、それぞれ 0.25、0.1 という考えが出され、図１のようにまとめた。8 回のうまさ度を考えさせた後、全体で話し合った。8 回が 2 回の×4、10 回の÷1.25、20 回の÷2.5 という考え、および 10 回から２回分を引くという考えが出され、8 回のうまさ度は 0.4 とされた。

第２時は、うまさ度 0.4 は半分より少し下なので、まあまあであることを確認した後、「もとにする量を１として、くらべられる量がいくつに当たるかを表した数」として割合を導入した。次に、割合を横の矢印を用いずに求める方法を、近くの子と相談しながら考えた。全体での話し合いでは、回数を÷20 する考えと、回数に×0.05 する考えが出され、これを縦の矢印により図の中に表した。第１時で求めた割合について、これらの関係が成り立っていることを確認した上で、もとの 20 回を１と見るので÷20 になると教師がまとめた。ここから、割合＝くらべられる量÷もとにする量の式を提示した。教科書の練習問題を扱う際にも、PM のかかれたプリントで考えさせ、また全体での確認の際にも PM を用いた（図３）。

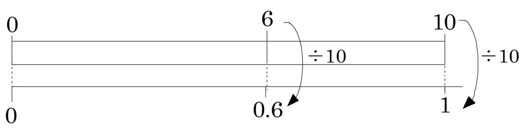

図３

第３時はもとにする量が異なるものの比較として、ジュースの濃さを扱い、100ml 中原液が 80ml のジュース A と 40ml 中 20ml が原液の B を考えた [5)]。差が 20ml なので同じとする考えと、全体の量に対する原液の割合を計算し A が濃いとする考えが発表された後で、B は原液が半分だが A は半分以上なので前者の方が濃いとする考えを紹介し、前者の方が濃いこと、割合による比較が適切であることを確認した。また２つのジュースをそれぞれ PM で表し(全体の長さ

は同じにしておく)、発表された式を確認した。40ml 中 30ml が原液のジュース C を導入し、A と C の比較をした。PM に C を表して確認をした。ある学級で男子 16 人、女子 20 人であるとき、女子の人数をもとにした男子の人数の割合と、男子の人数ともとにした女子の人数の割合を考えた[6]。最後に PM 上で考えるとともに、1.25 といった割合もあることを確認した。

第４時は、定員 50 人のバスに 40 人乗っているときの混み具合を割合で考えた。割合が 0.8 になることを PM を用いて全体で確認した後、もとにする量を 100 と見る考えとして百分率を導入した。貼ってあった PM に百分率の段を追加し、もとにする量を１とする割合と百分率を PM の上で縦の矢印で関係づけた（図４）。５種類の乗り物の割合を百分率で求める問題を扱い、全体の台数に対する各種の割合を求めた後、その結果を PM の上に表した。さらに百分率を求める練習問題を行い、最後に PM を用いて全体で確認した。

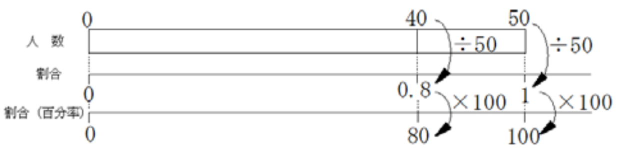

図４

第５時は、宿題として出された百分率を求める練習問題を PM を用いて確認した後、小数と百分率を互いに変換する問題を全体で行った。次に $24m^2$ の 60%を求める第２用法の問題を扱い、PM のかかれたプリントで考えさせた。全体の話し合いで、逆の(縦の)矢印を利用して 60÷100＝0.6、0.6×24＝14.4 とする考え、24×0.6＝14.4 とする考え、□÷24＝0.6 より□＝0.6×24 とする考え、10%分を 24÷10 で求め、それを×6 して 60%分を求める考えが出された。これらは PM の上に表された。最後の考えを生かし、100%から 60%へ“一発で行く”方法を考えさせた。その後の全体での話し合いで、60÷100＝0.6 なので 100×0.6 をすればよいという考えが出された。さらに教師が１と 0.6 の関係を見ても×0.6 であることが分かると補足した。最後に第２用法の式をまとめた。

第６時は、第２用法の練習問題として、5%が当たりで全体が 80 本のときのあたりの本数を求める問題、定員 80 人の車両で混み具合が 110%のときの乗客数を求める問題を取り上げた。各自で考えた後、PM を用いて確認をした。後半では第３用法の問題として、花畑が $90m^2$ で畑全体の 30%に当たるときの畑の面積を求める問題を扱った。各自で考えている途中で、教師が PM で $90m^2$ と 30%の位置を確認し、さらに考えてもらった。全体の話し合いでは、30÷100＝0.3 より 30 を÷0.3 すると 100 なので 90÷0.3＝300 とする考えが出された。教師が 0.3 と 1 の関係からも÷0.3 と考えられることに触れた(図５)。その後、第３用法の練習問題を解き、最後に全体で PM を用いて確認をした。

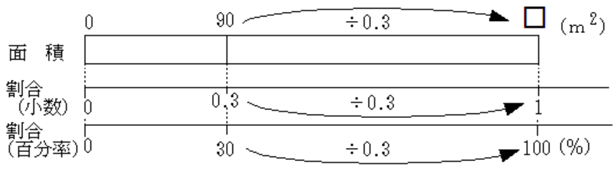

図５

第７時ではまず、３用法の混在した練習問題のプリントに各自で取り組んだ。その後、５問全部について PM の上で表しながら、式と答えを確認していった。後半では、消費税 5%がつくとき、500 円の品物を買うといくらになるかを考えた。全体の話し合いでは、500×0.05＝25、500＋25＝525 とする考え、1+0.05=1.05、500×1.05＝525 とする考えが出され、それらを PM に

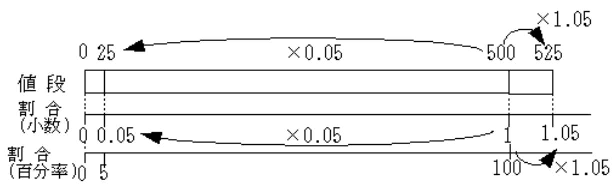

図６

表しながら確認をした(図６)。また後者については 500×(1+0.05)と書けることを教師が紹介した。最後に 1500 円のシャツを 20%引きで買

うときの値段を各自で考えたが、確認は次時に持ち越された。

第８時の冒頭で 20%引きの問題を PM で表し確認した。ここでも 20%分を求めて定価から引く考えと、80%の値段を求める考え方を取り上げた。次に、第４時で求めた乗り物調べの百分率を利用して、帯グラフの導入を行った。以前の各結果を第１時で用いた赤い紙の帯を伴う PM で動的に表し、当該の百分率に対応する帯の幅を、重ならないように並べる形で帯グラフの形にしていった（図７）。その後、与えられた帯グラフから各項目の百分率を求め、それに当たる台数を求める問題を扱ったが、PM に表して式や答えを確認した。最後に、けがの各原因の百分率を求め、帯グラフを自分で作成する問題に取り組んだ。

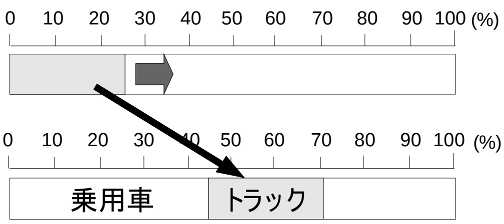

図７

第９時では、帯グラフを円環状にすることで円グラフを導入した。そして、図書館の各種類の本の割合を円グラフからよみとり、冊数を求める課題に取り組んだ。全体で冊数を求める式を確認する際には PM を用いた。次に、けがの各原因の百分率を求めて円グラフをかく課題を扱った。第９時後半では、教科書の章末の問題をプリントにしたものに取り組んだ。

４．抽出児の学習の様相

ここでは、前節まで述べてきた割合の授業が児童にどのように受け入れられたのかを考察するために、一人の男児・拓也（仮名）の学習過程を分析してみることにする。

4.1. 拓也の学習の概要

第１時では、5 回のうまさ度は求められたが、2 回については 0.25÷2、0.125÷2 を計算し、求めることはできなかった。8 回については 20÷8＝2.5 を計算したが、これをもとにうまさ度を求めることはしなかった。机間巡視で来た教師との会話の中で、2 回のときは 2×10＝20 だから 10 で割るということに言及はした。最後の方で自分の PM に 2 回と 5 回のうまさ度を 0.1、0.25 と記入し、4 回の 0.2、3 回の 0.15 に言及し、さらに 6 回に 0.3、7 回に 0.35、8 回に 0.4、9 回に 0.45 と記入した。

第２時に割合の求め方を考える課題では、いくつかの回数とうまさ度が印刷された PM に 9 回のうまさ度0.45を追加し、さらに5回と8回、2 回と 5 回の間を結ぶ弧状の線をかいて「３」と書いた。0.1 と 0.25 の間にも弧状の線をかき、0.25÷3 の計算をしようとした。その後、0.4÷0.25 を計算し、また 0.25 と 0.5 の間に弧状の線をかいて「×2」と書いた。近くの子に対する教師の支援を聞き「そういうことね」と発話し、PM 右端の 20 回と割合の 1 を指して「1 と、ああー」と発話した。さらに 20÷2 を計算したところで全体の話し合いとなった。友だちの考えを聞くと、自分の PM で各回数と割合の間に「÷20」と記入した。練習問題の最初２問では、最初に割合を計算し、その後で PM に当該の回数と割合だけを記入した。7 本のくじで 0 本当たりという問題では、PM の本数右端に 7 と書いてすぐに 7÷0 と書いた。友だちの方を見て 0÷7 と直してから、PM の 7 本の下に割合 1 を加えた。机間巡視に来た教師との会話の中で PM に縦の矢印を加えた。75 人中５年生 15 人の割合の問題では、立式、計算をしてから PM に 75 人、割合 1、15 人のみを記入した(図８)。定員

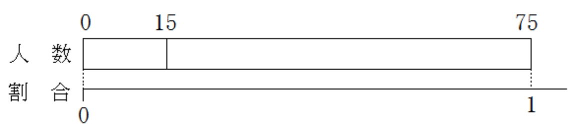

図８

130 人で乗客 117 人の割合の問題では、117÷130 と立式をしてから PM に 130 人と割合 1 を記入した。計算をして 117 人と割合 0.9 を PM に記入したが、130 人から 1 に向かう縦の矢印には

「÷117」と書いた。これは後で「÷130」と修正され、また他の欠けていた矢印も後で追加された。

第３時のジュースの問題では、最初は濃さは同じとし、「100－80＝20」「40－20＝20」「差が同じ」と書いた。近くの子を見た後、「A の方がこい」と変え、理由に「80÷100＝0.8」「20÷40＝0.5」と書いた。さらに「0.8－0.5＝0.3」「A. A の方が 0.3ml 多い」と書いた。ジュース A と C の比較では、A と C の PM をかき、C についての立式は縦の矢印を含む PM を作成した後になされた。PM 上での数の相対的な位置関係も適切であった。「A のコップの方がこい」「0.8－0.75＝0.05」「A. A のコップが 0.05ml 多い」と書いた。最後の問題で、女子の人数(20)をもとにした男子の人数(16)の割合を求める際には PM を作成してから立式をした(図９)が、男子をもとにした場合には友だちと話した後、式を先に求めた。事後にかいた PM に矢印等はなかった。

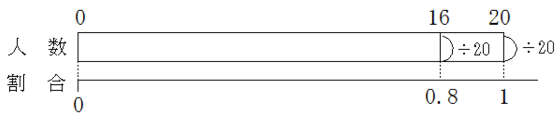

図９

第４時で乗り物の割合を求める問題では、63÷140×100 といった式をすぐに書くことができた。百分率の合計を書く際には、特に計算をした様子はみせずに「100」と記入した。またプリントに枠だけ印刷してあった PM を自分から埋めていき、縦の矢印と「÷140」も書き入れた。全体の確認の際に 63 台が半分より小さいことが話題になると、自分の PM で 63 の位置を修正した。最後の練習問題では２問とも、縦の矢印と「÷120」の記入を含め PM を作成してから立式を行った。

第５時で $24m^2$ の 60%を求める問題では、PM の面積の段の右端に 24 と書き、少し考えた後、割合の段の適切な位置に 0.6、その下の百分率の段に 60 と書いた。24×0.6 を計算し 14.4 と求めた。しかしその後も 60÷24、0.6÷24 を計算した。14.4÷24＝0.6 を計算して、14.4 から 0.6 に向かう縦の矢印をかき、横に「÷24」と書いた。24 から 1 に向かう矢印の横には「24」とだけ書いた。0.6 から 60 に向かう縦の矢印と「×100」を書いてから、「24×0.6＝14.4」「A. $14.4m^2$」と書いた。机間巡視に来た教師が言葉で説明するよう求めると少しして 24÷60 を計算し、「全体は 24」と書くが、これを「全体は 100」に直した。24 から 1 に向かう矢印の横の「24」の前に「÷」を加え、しばらくしてから「あっ」と呟いて 0.6×24 を計算した。プリントに「1×24＝24 だから」「0.6×24＝14.4 になって」「14.4÷24＝0.6 になる」と書いた。教師が矢印の向きを確認すると、0.6 と 14.4 の間、1 と 24 の間の矢印を上向きに直し、「÷24」を「×24」に変えた。100%から 60%へ“一発で行く”方法を考えた際には、100÷60 や 24÷100 の計算をして手が止まった。教師がヒントを出した後、PM の 60 と 100 の間に横線をかき(図 11)、その下に「×0.6」と書き、60÷100＝0.6 を計算した。プリントには「100×0.6＝60」と書いた。

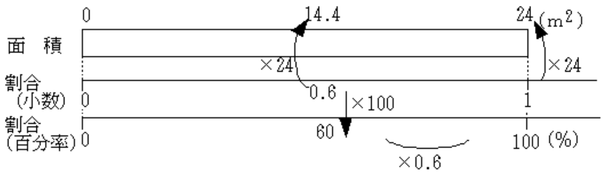

図 10

第６時でくじ 80 本の 5%の当たりを考える問題では、PM の本数の右端に 80、その下の百分率の段に 100、百分率の段の適切な位置に 5 を書いた。5 の上の割合の段に 0.05、5 から 0.05 に向かう縦の矢印をかき、「÷100」と書いた。この時点で 80×5、80×0.05 を計算し、0.05 の上の本数の段に 4 と記入し、プリントに「80×0.05＝4」と書いた。少しして PM の割合 0.05 から本数 4 本に向かう縦の矢印をかき、「×80」と書いた。80 本の下の割合の段に 0.8 と書き、両者を線で結ぶが、しばらくして割合を 1 に直し、線の横に「÷80」と書いた。定員 80 人の 110%を求める問題でも、PM に 80 人、110%、100%、割合 1.1 を適切な位置にとった時点で 80×110、次に 80×1.1 を計算した。式と答えをプ

リントに書いてから、PM の 88 人と 1.1 の間に双方向の矢印をかき、「×80」と書いた。全体での確認で教師が矢印と式の関係に注意を向けた後に、２つの問題の PM で本数や人数の段と百分率の段に横の矢印を加え、それぞれ「×0.05」「×1.1」と書いた。

第 6 時後半で 90m^2 が 30%に当たるときの全体を求める問題では、最初 PM の面積の右端に 90 と書いたが、少しして百分率の左から 1/3 あたりに 30 と書くと、その上の面積の段に 90 と書き直した。30 の上の割合の段に 0.3、面積の右端に□と書き、90 から□に向かう横矢印をかいて、そこに「×0.3」と書いた。電卓で 90×0.3 を計算し、□に何か書こうとするが何も書かなかった。友だちの方を見てから 90÷0.3 を計算し、□に 300 と書き、「×0.3」を「÷0.3」に直してから式と答えを書いた。百分率の段の 30 から 100 に向かう横矢印をかき、「0.3」と書いた。当たり 30 本が 15%にあたるくじ全体の本数を求める問題では、PM の本数の右端に 30、その下の百分率の段に 100、割合の段に 1 と書いたが、少しして 30 の位置を本数の左から 1/3 あたりに直す。その下の百分率の段に 15、割合の段に 0.15 と書き､30 から右に向かう横矢印をかき、そこに「÷0.15」と書いた。30÷0.15 を計算し､最後に 15 から 100 に向かう横矢印をかいて「÷0.15」と書いた。102 人が 120%に当たるときの定員を求める問題では､120%､100%､割合 1.2、1 を適切な位置にとり、人数の段を右方向に少し伸ばした。100%の上の人数の段に 102 と書き、しばらく考えてから 102÷1.2＝85 を計算した。PM に 85 は書き込まず再度 102÷1.2 を計算した後、102 の位置を 120%の上に直した｡100%の上に 85 を書き､102 から 85 と 120%から 100%に向かう横矢印をかき、それぞれに「÷1.2」と書いた。120÷1.2 が 100 になることを確認した。

第 7 時前半の練習問題で 24m^2 が 8%にあたるときの全体を求める問題では､PM の左から 1/10 あたりに 8%をとり、その上の面積の段に 24 と書いた。ここで 24÷8、24×8 を計算し、100%の上の面積の段に 192 と書いた。8%の上の割合の段に 0.08 と書き､24×0.08 と 24÷192 を計算して 2 問目に移った。２問目を解いてから 1 問目に戻り、24×0.08、24÷0.08 を計算した後、プリントに「24÷0.08＝300」と書いた。PM の 192 を消し、300 に直した。２問目の 800 円の 20%の問題では、PM の値段の右端に 800、百分率の左から 1/8 あたりに 20、その上の割合の段に 0.2 と書いた。800÷0.2 を二度計算した後、PM を見てから 0.2×800 を計算した。PM の 0.2 の上の値段の段に 160 と書き、プリントに「800×0.2＝160」と書いた。３問目を解いてから２問目の PM に戻り､0.2 から 1 に向かう横矢印と「×5」を書き、160×5＝800 と計算した。値段の 800 から 160 に向かう横矢印をかき、そこには「÷5」と書いた(図 11)。3 問目(160 人中女子

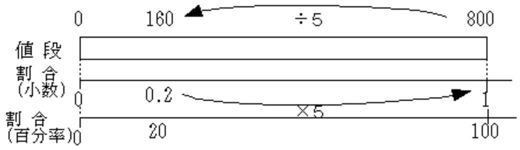

図 11

72 人の割合)では､PM の人数の右端に 160 と書き､次に人数の右から 1/3 あたりに 72 と書きかけてこれを中央近くに変更した。160÷72 と 72÷160 を計算した後、72 の位置を左から 1/3 あたりに変更した。72 の下の割合の段に 0.45、その下の百分率の段に 45 と書いてから､式と答えを書いた。PM の 160 から 72 に向けて線を引いてから、0.45×4、0.45×2、0.45×2.5 を計算した。横の線に何かを書こうとして何も書かず、160 から割合の 1 に向かう縦矢印をかき、そこに「÷160」と書いた。72 から 0.45 に向かう縦矢印もかき、「÷160」と書いた。４問目(36 人の 75%)では、PM の人数の右端に 36、右から 1/4 あたりに 75%、割合の 0.75 をとった。36×0.75 を計算し､0.75 の上の人数の段に 27 と書いた。式と答えを書いてから、1 から 36 と 0.75 から 27 に向かう縦矢印を書き、それぞれに「×36」と書いた。５問目(□の 24%が 48dl)では、PM の左から 1/4 あたりに 24%、その上の体積

の段に 48、割合の段に 0.24 と書いた。0.24×5、0.24×4.5、48×0.24、48÷0.24 を計算し、体積の右端に 200 と書いた。PM で 0.24 から 48 に向かう縦矢印をかいて「÷24」と書くが、机間巡視に来た教師との会話の中でこれを消し、48 から 200 と 0.24 から 1 に向かう横矢印に修正し、後者に「÷0.24」と書いた。全体の確認の途中で、１問目の PM で 0.08 から 1 に向かう横矢印と「÷0.08」を、４問目の PM で 1 から 0.75 と 36 から 27 に向かう横矢印と「×0.75」を加えた(図 12)。また第２問の「×5」「÷5」としていたものを「×0.2」に直した。

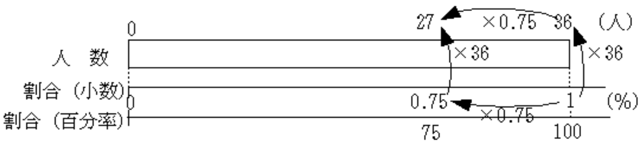

図 12

第７時後半の 500 円の 5%の税込み価格を求める問題では、PM の値段の右端に 500、百分率の左から 1/10 あたりに 5、その上の割合の段に 0.05 と書いた。0.05 の上の値段の段に数値を書きかけてから少し考え込み、500÷0.05 と 500×0.05 の計算をした。書きかけの数値を 25 としてから、PM の割合の 1 から 0.05 と値段の 500 から 25 に横矢印をかき、それぞれに「×0.05」と書いた。1500 円の 20%引きの値段を求める問題では、PM の値段の右端に 1500、百分率の左から 1/5 あたりに 20、その上の割合の段に 0.2 と書いた。割合の 1 から 0.2 に向かう矢印をかき、そこに「×0.2」と書き、1500×0.2 の計算をした。0.2 の上の値段の段に 300 と書き、1500 から 300 に向かう矢印をかいた(図 13)。式と答えを書いた後、「0.2 は 1×0.2 だから 1500×0.2 をして 300 とでて、1500－300 で 1200」と書いた。

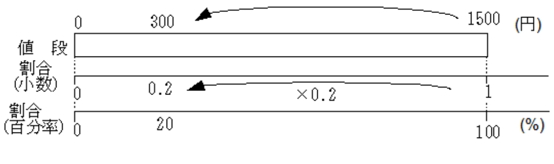

図 13

第８時で帯グラフから百分率を読み取り、各種類の台数を求める課題では、50×0.42＝21 といった計算を特に滞ることなく書いていった。百分率の合計を書く際には、特に計算した様子を見せずに 100 と書き、その後で各種類の百分率を足し合わせていた。けがの各原因の百分率を求める際には、最初 11÷23 とすべきところを 23÷11 や 20×11 などとしていたが、全体で確認して以降は正しい計算を順次行った。

第９時前半では、各種類の冊数を 3600×0.4 などと正しく計算して求めた。全種類を円グラフから読み取る前に百分率の合計に 100 と記入し、後で合計を別途計算した。けがの原因の円グラフをかく課題では、250÷850 とすべきところを 850÷250 としたが、友だちに教えてもらって以降は正しい計算を順次行った。

第９時後半で 10 問中７問正答のときの割合や４試合中４試合勝ったときの割合は、すぐに正答した。15m のテープに対する 12m の割合では、枠が印刷された PM で長さの右端に 15、左から 1/3 あたりに 12 と書いたが、これを右から 1/4 あたりに直した。そこで 12÷15 を計算し、12 の下の割合の段に 0.8 と書いた。12m をもとにしたときの 15m の割合では、PM の長さの右端に 12 と書き、長さの段をもとの 1/4 程度伸ばしてからその右端に 15 と書いた。15÷12 を計算し、15 の下の割合の段に 1.25 と書いた(図 14)。

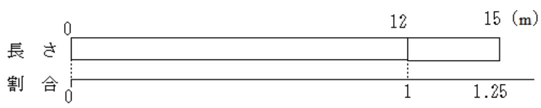

図 14

24 人に対する欠席者 3 人の割合の問題では、3÷24＝0.125 を計算したが、解答欄には 13%とした。その後、24÷3、24×0.13、24÷0.13、3×24、0.13÷24 なども計算した。友だちが 3÷24＝0.125 と計算するのを見て、最後に 13%を 12.5%に修正した。出席者の割合については友だちどうしの会話を聞き、出席者が 21 人になると理解したが、その際もまず「24÷21」と書いてこれを計算し、友だちの方を見て 21÷24 に変更した。630 円が売値 600 円の何%にあたるかを考える問題でも、600÷630 を計算した後、前のプリントを見て 630÷600 に変更した。300 個

の 4%を求める問題では、300×0.04 を計算した。２つのくじ(40 本中 16 本当たりと 20 本中 7 本当たり)の比較では、それぞれの当たりくじの割合を正しく求め、割合の大きい A が当たりやすいとした。昨年が 125 人で今年は 10 人増えたときに、今年の人数が昨年の何%かを求める問題では、10÷125 を計算し、その後 125÷10 を計算した後、問題文を読み直して 115÷125 を計算した。48 ページを読んだときに残りが全体の 60%に当たるという問題では、0.6×48、60×48 を計算して、解答欄に 2880 と書いた。48÷2880 を計算してから、悩む様子を見せた。さらに 60÷48、48÷125 を計算した。しばらくしてから図 15 のような図をかき、48 と□の間で鉛筆を動かしていたが、この時点で終了時間となった。

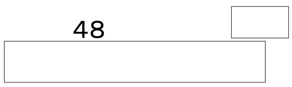

図 15

4.2. 拓也の学習に見られる特徴

(1) 導入段階での素朴な推論の影響

第 1 時でうまさ度を求める際に、拓也は 1 回のうまさ度が 0.05 であることを用いて、ビルド・アップ的に各回のうまさ度を求めた。この授業ではここまでに、10 回、5 回、2 回のうまさ度を比例的推論に基づき求めていたが、拓也の様相は、こうした経験の後であっても初期段階では、比例的推論への移行段階とされるビルド・アップの考え方が現れることを示している。

これに関わる要因がいくつか考えられる。第一に、彼の比例的推論が半分の系列と密接に関連していたことである。2 回のうまさ度を求める際、5 回のうまさ度 0.25 に対し 0.25÷2 や 0.125÷2 を計算した。また第 2 時で 8 回のうまさ度 0.4 を 5 回のうまさ度 0.25 で割った際にはこの関係を PM に記入しなかったが、0.25 と 0.5 が「×2」の関係であることは PM に書き込んだ。第二に、比例的推論を意識的に利用できる状態になっていなかった。8 回のうまさ度を求める際に 20÷8＝2.5 を計算し、2 回のうまさ度は 2×10＝20 だから 1÷10 で求められることも理解していながら、8 回のうまさ度を 1÷2.5 で求めようとする様子は見られなかった。また上述のように 0.4÷0.25＝1.6 を計算しても、それを PM の他の部分と関連づけることはしなかった。これらの特徴は、第２節で述べた素朴な比例的推論の状態にあったことを示唆している。

さらに拓也の第２時後半の学習も、2.2 で述べた意識化につながりにくいものとなっていた。PM にもとにする量や割合の 1 を書かなかったり、数値間の乗法関係を表す矢印等を自分からは記入しないことが多かった。立式も PM を作成する前に行っていた。そのため、素朴な状態からの移行が不十分であった可能性が考えられる。

実際、第３時のジュースの濃さの課題で、それまでうまさ度という割合を学習してきたにも関わらず、拓也は最初、加法方略により２つの濃さを同じとした。また加法方略からの移行も友だちの方を見ることでなされていた。さらに 0.8－0.5＝0.3 を計算し、0.3ml とした。比例的推論の意識化が十分なされなかったことで、加法方略を誘発し、またうまさ度と液量との関係も意識できていなかったと考えられる。

(2) 図の上での割合的感覚の重視とそれに基づく立式の修正

PM 利用と動的扱いにより、数値化以前の割合的な感覚を大切にする様子が見られた。例えば第２時で 15÷75＝0.2 を計算した後 PM に 15 人を書く際、0.2 として適切な位置に書いた。図９のような場合もあるものの、こうした感覚の利用は単元を通して見られ、第９時で 15m に対する 12m の割合を求める際も 12m の位置を書き直し、0.8 としてより適切な位置にした。

PM 上で数値の相対的な関係に注意していたことから、その情報を利用して立式を選択する様子が見られた。例えば、第６時でくじ 80 本の 5%を求める際に、80 本、100%、5%、0.05 を PM に記入し、その上で 80×5 と 80×0.05 を計算し、答えを４本と求めている。これは 5%の位置に対応する本数として適当な 4 を与

える式を選択したように見える。第７時で「□の 24%が 48dl」の□を求める際にも、PM に数値を配置した後で 48×0.24 と 48÷0.24 を計算して後者を選択した。

今回の授業では比例的推論の意識化により、それに基づく立式を期待したが、拓也は数値間の相対的な位置と割合的な感覚に基づき式を選択する一方で、数値間の乗法的関係を PM 上で把握し、それに基づいて式を決めるという形には必ずしもならなかった。相対的位置に基づきながらも十分に乗法的関係を確認していなかったという意味で、PM の半思考的な状態に留まったと言えよう。ただし、吉田ら(2000)が数の相対的な大きさに基づく立式も有意味的な方略としていることからすると、移行的な状態として評価することもできよう。

(3) 比例的推論の意識化の効果とその不徹底

拓也は PM を作成してから立式をする様子も見せた。例えば第７時前半で３用法の混在したプリントに取り組んだ際、1500 円の 20%引きを求めるのに、PM で 1 から 0.2 に向かう矢印をかいて「×0.2」を記入し、その後 1500×0.2 の計算を行った。「0.2 は 1×0.2 だから 1500×0.2 をして」と説明を自ら書いたことは、ここでの比例的推論を意識し、それに基づき立式したと考えられる。こうした立式の仕方は第３時から見られ、第４時、第６時後半にも見られた。

一方で、(1)や(2)でも触れたように、PM 上に数値を配置したり矢印等を記入する前に立式することも多く見られた。さらに、第９時後半の練習問題のほとんどで、拓也は PM を自らかくことなく立式をしていた。

第９時で第１用法の問題を PM に数値を記入して考えた際には、すぐに適切な立式をし、それ以外の式は検討していない。しかし第９時で PM を全くかかずに取り組んだ問題では、第１用法の場合に特に、いくつかの式を考えて、友だちの方を見てからそのうちの１つを選択するという様子が何度も見られた。これらより、拓也は PM 上に問題場面を表した場合の方が自信を持って立式ができていたこと、また PM に矢印等を記入しない場合でも、上述の半思考的な利用から、比例的推論をより意識した利用に移行していたことが示唆される。最後の図 15 の問題で、いくつか計算をして答えの候補が見いだせなかったときに、初めて自分から PM をかこうとしたことは、PM が拓也にとって思考機能を持ち始めていたことを伺わせる。

PM による比例的推論の意識化は、拓也にとって一定の効果をもたらしたものの、第９時で立式に自信がない場合にも PM をかいて判断することが少なかったこと、また単元の途中では半思考的な状態に留まっていたことなどから、その効果は十全ではなかった。この原因として次のことが考えられる。第一に、前述のように PM に自分から矢印等をかきこまないことも多く、比例的推論の意識化や比例的推論と立式の関係の理解が不十分であったのではないかということである。第二に、PM をかく際に基準となる１への着目が弱かったことが考えられる。６年生の割合単元で PM と類似の図を扱った佐藤(2008)は児童の学習過程の分析から、１を最初にかくようなかき順が比例的推論の発達と関係していると指摘している。拓也はこうしたかき順になっておらず、例えば、第６時でくじ 80 本の 5%を求める際には、割合の 1 は、立式・求答し、PM に答え 4 本を記入した後に書き入れていた。授業の中では１に着目することに何度か言及したが、その点が共有されなかった可能性がある。また学習の困難度との関係で、プリントに PM の枠を印刷する際に基準の１を印刷した場合もあったため、１への注目が意識されにくかった可能性も考えられる。第三の原因として、小数を含む倍関係についての感覚が不足していたことがある。例えば第７時で「□の 24%が 48dl」の問題では、まず 0.24×5、0.24×4.5 を計算した。これは $0.24 \times x = 1$ になる x を見いだそうとしたものと考えられる。この x を用いれば $48 \times x$ で□が求まる。逆に考えれば、拓也は 0.24÷0.24＝1 という乗法的関係に気づ

けなかったことになる。800 円の 20%の問題でも、800×0.2 と立式しながらも PM の 0.2 から 1 に向かう矢印には「×5」と記入した。これは 1×0.2＝0.2 という乗法関係を把握できなかったことを示唆する。このように小数を含んだ乗法関係がすぐに把握できなかったことで、比例的推論を適用しにくかったことが考えられる。

(4) 多面的な乗法関係に基づく割合の理解

前項で触れたように、拓也は 0.24×x＝1 になる x を見いだそうとしたり、1 と 0.2 との関係を×0.2 としてだけでなく、×5、÷5 としてもとらえていた。これらは、24%が約４分の１である、20％が５分の１に等しいといった理解にもつながり、割合あるいは乗法関係を多面的に捉えることにつながると思われる。

また、102 人が 120%にあたるときの定員を求める問題では、最後に 120÷1.2＝100 を計算して確かめている。PM に現れる数値間の関係を比例的推論の観点からチェックすることで、自分なりに整合した図式を PM の上に認めていこうとするものであり、問題場面の理解を深めることにつながると言えよう。さらに、可能な矢印を加えることも、４つの量の乗法関係を多面的に捉えることに資するであろう。例えば、第７時前半の 36 人の 75%を求める問題で、拓也は最初、1 から 36、0.75 から 27 に向かう縦矢印をかき、「×36」という乗法関係を PM に表していた。全体で確認をしている際にはここに、1 から 0.75、36 から 27 に向かう横矢印をかき、「×0.75」という乗法関係を加えている。

こうした多面的な捉え方は、立式を納得する上でも有用と考えられる。第５時で第２用法の初めての学習として 24m^2 の 60%を考えた際、拓也は数値を PM に配置をし、いくつかの計算をした後、求めた 14.4 という答えの候補について 14.4÷24＝0.6 を確認し、これを答えとして選択した。第１用法に相当する乗法関係がここでの理解を支えていたと考えられる。さらに PM で 24 と 1 の関係を吟味する中で「あっ」と呟いて 0.6×24 を計算し、プリントに説明を書いた。これは、0.6 を乗ずることや積 14.4 が求める面積となることを、逆の縦矢印により支持できたことを示唆している。さらに 100 と 60 の関係を考えた際に、これらの間に横線をかき「×0.6」としたことは、0.6 を乗ずることを 100 から 60 への変換との関係でも捉えたことを意味する。

図をかくことと情報を得ることの相互作用(Nunokawa, 2006)に注目するならば、このように PM に書き込みながら情報を増やし、問題場面に関わる整合したイメージを構築していくことを、問題場面を理解する過程という点からさらに検討していくことが必要であろう。

５．おわりに

今回の授業を通して、拓也は割合を含む場面において、数の相対的な関係といった割合的な感覚を重視しながら考えるようになっていった。割合を比例的推論をもとに数値的に考えること、および PM によるその意識化については、一定のレベルで受容し、そうした考え方をするようになったものの、その受容は限定的であった。

こうした学習の様相を見ると、表現機能から思考機能への移行をさらに慎重に扱い(*cf.* 布川, 2007)、その中で数値間の乗法関係や比例的推論を意図的に利用して、割合の理解につなげていく必要があろう。また 4.2(4)で言及したように、今回の拓也の学習では多面的に乗法関係を捉える様子が見られたが、この多面的な把握を割合や３用法の理解を確かにするものとして利用することも検討していく必要がある。

謝辞：調査にあたりご協力頂きました桑原利恵先生、林克巳先生、青木弘明先生はじめ上越教育大学附属小学校の先生方に感謝申し上げます。

註および引用・参考文献

1）田村(1978)は次のように述べている：「'A は U の a 倍である'と答えられるとき、すなわち A＝U×a となるような分数 a が見出されるとき、われわれは a を'A の U に対する比'または'A と U の比'といい、A:U で表す」(p. 40)。これに従えば、A_1=

kA_0となる *k* を求めることが本質であり、$A_1A_0^{-1}$もこれを求めるための操作と考えられる。

2) 他の教科書のように「くらべる量がもとにする量の何倍にあたるかを表した数」として割合を定義する場合には、別の議論が必要であろう。

2) 調査の授業は以下のメンバーにより実施された：布川和彦、高橋等（上越教育大学）；林克巳（上越教育大学附属小学校）；佐藤満、林尚之、渡辺由仁、松井守、山澤晴子、濱谷伸広、磯野和美、上田貴之、清水祐子、中嶋良子（上越教育大学大学院生）；入澤梨香、黒木真奈美、高山いつか、吉邨公輔、濁川幸広（上越教育大学学部生）。授業者には佐藤と林がなり、授業は授業者の２名と布川が中心となって立案し、メンバーで検討した。

3) 児童のうち４名は３年次より継続して協力してもらっている児童である。１名は３～４年次に協力してもらった児童が転校したのに伴い、新たにお願いをした児童である。

5) PM 上での思考を通して、加法方略から割合へと移行できた事例を布川(2008)で報告している。

6) １より大きい割合を PM 上で意味づけて受容できた事例を布川(2008)で報告している。

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where Young Children Go Wrong. *Developmental Psychology*, *44* (5), 1478-1490.

一松信ほか. (2008). みんなと学ぶ小学校算数5年下. 学校図書.

Misailidou, C. & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children’s proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 335-368.

National Research Council. (2005). *How students learn: Mathematics in the classroom*. Washington, D.C.: National Academies Press.

布川和彦. (2005). 子どもの学習過程に基づく支援の構想：５年生「割合」単元における学習過程の分析を通して. 上越数学教育研究, *20*, 11-20.

Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *2* (3), 33-54.

布川和彦. (2006). 比例的推論の授業における小学校４年生の学習の様相. 上越数学教育研究, *21*, 1-12.

布川和彦. (2007). 小学校３年生による比例的推論の課題の解決：下位単位の利用に焦点を当てて. 上越数学教育研究, *22*, 1-10.

布川和彦. (2008). 比例的推論を利用した割合の導入の試み. 日本数学教育学会第41回数学教育論文発表会論文集, 957-958.

大谷　実. (2002). 初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価. 平成 11～13 年度科学研究費補助金(基盤研究C(2))成果報告書.

Parker, M. & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65* (4), 421-481.

Pothier, Y. & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14* (5), 307-317.

佐藤　満. (2008). 比例的推論の発達を促す統合的な授業の効果に関する研究：６年「倍と割合」「比」の実践を通して. 上越数学教育研究, *23*, 53-64.

田端輝彦. (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, *85* (12), 3-13.

土屋利美. (2002). 比例の見方を用いた「割合」の指導実践. 日本数学教育学会誌, *84* (8), 30-37.

田村二郎. (1978). 量と数の理論. 日本評論社.

山口　潤. (2007). 割合における児童の学習過程に関する研究：割合のイメージを生かした表象の効果. 上越数学教育研究, *22*, 101-112.

吉田甫, 河野康男, 横田浩. (2000). 割合の問題解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析. 宮崎大学教育文化学部紀要・教育科学, *2*, 123-133.