上越数学教育研究, 第 20 号, 上越教育大学数学教室, 2005 年, pp.21–30.

中学校確率の発展的教材としての条件付確率：

面白い問題を中心としたその発展過程の再構成

岩　崎　　浩
自然系教育講座（数学分野）

1　はじめに

本稿では，条件付確率に関わる面白い問題を順次取り上げながら，条件付確率を中学校数学の確率の発展的内容として実現するための基礎として，条件付確率の概念の発展過程を再構成することを試みる。

生徒たちの数学そのものへの知的興味・関心を如何に覚醒するかは現在の数学教育における喫緊の課題の１つである。また，そのための豊かな教材の開発が望まれている。世界トップレベルの学力の復活を目指した教科内容の改善充実，基本的な学習内容の定着を目指す理数教育の改善充実の観点から学習指導要領が不断に見直されようとしている今日，これまで以上に子どもの進度や興味に応じて発展的な内容を用意することが求められているといえるであろう。

本稿で条件付確率を取り上げるのもこのような趣旨からであるが，それと同時に次の理由からである。すなわち，条件付確率に関わる知識の意味を検討し，人間の自然な思考過程として再構成する試みは，それ自体，数学教育学に固有の重要な研究課題の１つであり，この再構成のアイディアこそが新しい授業デザインの根幹となると考えるからである。

2　なぜ条件付確率か

確率概念は，将来起こりうる可能性を適切に捉える上で重要である。条件付確率の概念も，ある情報から予測される可能性をより的確に判断する合理的な考え方と方法を与える。したがって，先行き不透明で変化の激しい現代社会において生きていく上で，全ての人にとって，ますます必要かつ重要な知識となってきている。この意味で，条件付確率は中等数学教育の教材の中心の１つとなるべきである。その理由の１つは，条件付確率のもつ極めて豊かな応用可能性によるものである。Steen (1990) も，確率の基礎からのいっそう実り豊かな歩みが，条件付確率，独立，乗法規則へと進むものであるとした上で，これらが自然科学や社会科学で確率モデルを構成するのに非常に貴重な新しい考えと基礎技能の両方を含んでいると述べている [1)]。

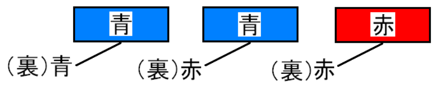
現在の日本の数学教育においては，条件付確率の内容は平成元年の指導要領の改訂から数学 I から数学 C に移されたことで実質的に全ての生徒が学ぶべき内容ではなくなってしまっている。しかし，上述の理由からも，条件付確率の内容は，今一度見直すに値する重要な内容であるように思われる。勿論，条件付確率を中等教育の実り豊かな題材として位置づけるためには，この概念の定義や公式を中心とした形式的な扱いは避けねばならない。特に，早まった定式化は数学を生徒たちから遠ざけてしまうばかりか，人間が本来もっている自ら「考える」という精神を弱めてしまうであろう。このことは，特に確率概念に関わって，Freudenthal (1973) が，17 世紀のフランスの賭博師メレ [2)] が比例という数学を知って

いたがために，これに頼り，人間にとって最も大切な「考える」（自らの数学を創りだす）という機会を失い，賭けで大損をしてしまうという例を挙げ，雄弁に物語っている[3)]。

以下で具体的に示すつもりであるが，条件付確率の考え方は，人間が確率的状況について考えるきわめて自然な思考方法として生じる。その意味で，中学校で大切にしている「起こりうる場合を順序よく整理すること」[1]の発展的内容として自然に位置づけることができる。また，このことによって中学校数学科において形式的な扱いではなく，具体的で重要と思われる問題との関係において実質的な意味を伴って取り上げることができるであろう。

3 まずは問題から

まずはじめに次の問題を考えてみることにしよう。[4)]

> 形も大きさも同じだが色が異なる 3 枚のカードがある。それぞれ，表が青色で裏も青色のカード，表が青色で裏が赤色のカード，表も赤色で裏も赤色のカードである。表と裏の区別はできない。
>
> 
>
>
> A 氏がこの 3 枚のカードの中から 1 枚のカードをすばやく引き抜いてテーブルの上に置いた。テーブルの上のカードの色は赤色である。A 氏はこう言った：「賭けをしよう。このカードをめくったとき青色が出るか，赤色が出るか。」
>
> さて，青色に賭けた方が有利なのか？赤色に賭けた方が有利なのか？あるいは，有利不利はないのか？

3.1 一見合理的にみえる考え方

1 つ目の考え方：赤色の面があるカードといえば，3 枚のカードのうち両面が青のカード 1 枚を除く 2 枚である。テーブルの上のカードはそのうちの 1 枚である。今，赤が出ているのであるから，その裏は，赤の場合と青の場合の 2 通りである。裏が赤であるのはそのうちの 1 通りだから，その確率は $\frac{1}{2}$，同様に，裏が青である確率も $\frac{1}{2}$ である。これを以下「太郎君の考え」ということにする。

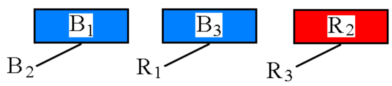
別の考え方：3 枚のカードには，表裏合わせて合計 6 つの面がある。その 6 つの面のうち 3 面が赤であり，残りの 3 面が青である。したがって，でたらめに 1 枚引き抜いてテーブルの上に置いたとき，裏側（テーブルに接している面）の色が赤である確率は次のように考えることができる。すなわち，この場合，同様に確からしく起こりうる全ての場合の数は 6 通りで，そのうち，裏面が赤である場合の数は 3 通りであるから，求める確率は，$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ である。同様に裏面が青色である確率も $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ である。したがって，確率は同じではないか——。これを以下「次郎君の考え」ということにする。

これらの考えは，一見合理的にみえる。紙面の都合で省略するが，実際にカードを作成し，何度か試してみると，これらの考えが妥当なものではないこと，また,「表に赤い色が出ているときは赤に賭けた方が有利」であり,「表に青が出ているときには青に賭けた方が有利」であるという規則性に気がつく。

しかし，これは一体どういうことなのか——。次節では，上の 2 つの考え方のどこに誤りがあるのかを中学校で大切にしている「起こりうる場合を順序よく整理すること」に基づいて考えていくことにする。

3.2 確率空間の記述と条件付確率の導入

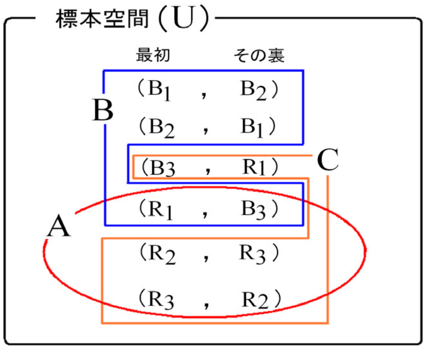
中学校で大切にしている「起こりうる場合を順序よく整理すること」は本質的に標本空間を記述することであり，数学的確率を考える最も基本的かつ重要な事柄である。標本空間さえ正しく記述できれば，その部分集合として，これに関する事象の確率が定まるからである。



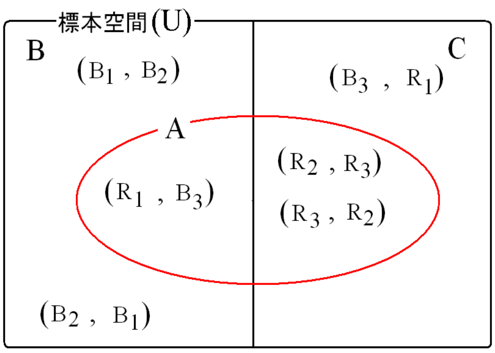
[1]中学校学習指導要領 [第 2 学年] 2 内容 C 数量関係 (2) ア

図のように，カードに記号を付けると，問題に示されている試行の結果は，最初に何が出ているかを X，次にそのカードの裏は何であるかを Y とすると，起こりうる全ての場合は，それらの対 (X,Y) で表現できる。最初に何が出ているかには，$B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, R_3$ の 6 つの可能性があり，これで全てである。また，そのカードの裏の色は，それぞれに取り出されたカードにより必然的に決定されるので，最初に出ているカードにそれぞれ対応して，$B_2, B_1, R_1, B_3, R_3, R_2$ の 6 つとなる。したがって，標本空間 U は，$U = \{\ (B_1,\ B_2), (B_2,\ B_1), (B_3,\ R_1), (R_1,\ B_3), (R_2,\ R_3), (R_3,\ R_2)\ \}$ として記述できる。

今，ここでの試行の標本空間 U を 1 つの集合としてベン図に表現してみよう。最初に赤色が出る事象を A, 裏が青色である事象を B, 裏が赤色である事象を C とすると，これらは，U の部分集合として次のように図示できる。



この図を整理してもう少し見やすく描きかえると次のような図になる。



さて，この標本空間の図を参照すると，起こりうる全ての場合は，事象 B と事象 C とに二分されていることが観察される。この事実は，取り出されたカードの裏側は赤色であるか，青色であるかのどちらかであり，これ以外にはありえないことを意味している。つまり，ここでの試行において事象 B，事象 C が起こる数学的確率は，定義からそれぞれ，$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$，$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ となり，同じであることが分かる。これをそのまま問題の解としたのが，先に述べた次郎君の考えである。取り出されたカードの表の色が赤色であったという情報を見落としていることが分かるであろう。一方，先に述べた太郎君は事象 A に着目している。しかし，事象 A の 2 つの要素 (R_2, R_3) と (R_3, R_2) を区別することなく，これを (赤，赤) という 1 つの要素として数えてしまったところに誤りがあったといえるであろう。

事象 A が既に起こっているということを考慮して，つまり，事象 A に限定して先のベン図を眺めてみると，全体で 3 つの要素があり，そのうち裏が赤色となる事象が 2 つ，青色となる事象が 1 つあることが分かる。したがって，その数学的確率はそれぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ であると考えるのが自然であり，妥当であると考えられよう。

このように，事象 A が既に起こっているということを考慮して，つまり，このような条件のもとで，事象 B が起こるという事象——これを記号で $B|A$ と表現する——の確率 $P(B|A)$ を，次のように考えるのである。すなわち，事象 A を標本点の全体，すなわち，仮に標本空間とみなして，その中で事象 B が起こるという事象——これを記号で $A \cap B$ と表現する——がどれぐらい起こるかを考える。これは次の式で表現できる。

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \tag{1}$$

これを**条件 A のもとでの B の条件付確率**という。これをもとの標本空間で定義された確率と関係づけるために式 (1) の右辺の分母と

分子を $n(U)$ で割って変形すると次の関係式が得られる。すなわち，

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2}$$

この (2) 式を**条件付確率の定義**とするのである。この式から直ちに次の式が導かれる。

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \tag{3}$$

これを確率の**積の法則**という。

さて，問題の解答は既に明らかとなったが，この新たに定義された条件付確率の式を確認する意味で，上述の式 (2) から計算で求めてみよう。今，$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$，$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{1}{6}$ であるから，これらの数値を式 (2) に代入すれば，

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \tag{4}$$

つまり，表に赤が出ているという条件のもとで，裏に青色が出る確率は $\frac{1}{3}$ ということである。裏は青であるか赤であるかのどちらかであるから，この条件のもとで裏に赤色が出る確率 $P(C|A)$ は，

$$P(C|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{5}$$

つまり，表が赤の時には，赤色に賭けた方が有利であるということである。同様に，表が青の時には，青に賭けた方が有利なのである。つまり，同色に賭ければよいということである。この観点で問題を見直せば，3 枚のカードのうち同色の組み合わせのカードが 2 枚，異色の組み合わせのカードが 1 枚であった。同色が出る確率は $\frac{2}{3}$, 異色が出る確率は $\frac{1}{3}$ である。

4　条件付確率の発展的展開

ここでは，関連する問題を 3 つ取り上げ，条件付確率の概念と方法を，徐々に，今日的かつ現実的な問題の解決に直結するより複雑な確率的状況に対処する方法として発展させていくこととする。

4.1　モンティ・ホール問題

> B 氏は，あるクイズ番組で優勝し，賞金と豪華商品を獲得するチャンスを得た。3 つの扉があり，その内の 1 つの扉の向こうに賞金と豪華商品が用意されている。残りの 2 つの扉の向こうには何もない。B 氏は悩みに悩んだ末ようやく 1 つの扉を選んだ。その時，司会者が，残った 2 つの扉の内の 1 つを開けた。その扉の向こうには何も入っていない。何と，司会者はどの扉に賞金と豪華商品が入っているかを知っていたのである。しばらくして，司会者はこう言った。「今一度チャンスをあげましょう。今なら変えてもいいですよ。」さて，B 氏は初心を貫き変えない方がよいのであろうか，それとも，思い切って変えるべきなのであろうか？

この問題は「モンティ・ホール問題」[5)]，あるいは,「モンティ・ホール ジレンマ」としてよく知られている問題である。紙面の都合で省略するが，この問題も，前節で述べたような，いくつかの合理的と思われる考え方が想定でき，実験によって調べることができる。

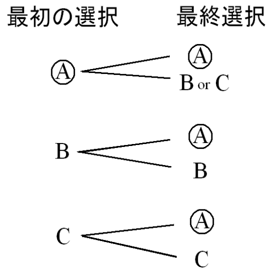
3 つの扉をそれぞれ A, B, C とし，この扉のどれか 1 つに賞金と豪華商品があるとする。今，A の扉の向こうに賞金と豪華商品があるとして，Ⓐで表すことにする。勿論，B や C の扉の向こうに賞金と豪華商品があるとしてもよいが，記号が変わるだけで全く同様の結果となるので考える必要はないであろう。

それでは，このクイズ番組で扉を選ぶ過程を試行とみなして，この試行で起こりうる場合を順序よく整理し標本空間を記述してみよう。この過程には，B 氏が最初に扉を選ぶ段階と司会者が 1 つの扉を開けた後，最終的に扉を選ぶ段階の 2 段階がある。

この試行によって得られる結果の全体，すなわち，標本空間 U は，最初にどの扉を選ぶかを X，最終的にどの扉を選ぶかを Y とすると，これらの対 (X, Y) によって表現することができる。

まず，最初にどの扉を選ぶかであるが，これにはⒶ, B, C の 3 つの可能性がある。次に，

第 2 段階に入る。それぞれ 3 つの場合に分けて順に検討しよう。



Ⓐを選択していた場合には，司会者は，B または C のどちらかの扉を開けることとなる。したがって，B 氏が選べるのは，B または C のどちらか 1 方である。ここで，どちらか一方だけであることに注意しよう。つまり 1 つの可能性しか残っていないということである。これは，B または C のどちらかから選ぶことができる場合，つまり，B 氏は B の扉を選ぶことも可能であるし，また C の扉を選ぶことも可能であるというような 2 つの可能性がある場合とは異なっている。

B を選択していた場合には，司会者は，必ず，C の扉を開けることとなる。したがって，B 氏は，Ⓐを選ぶことも可能であるし，B の扉を選ぶことも可能である。

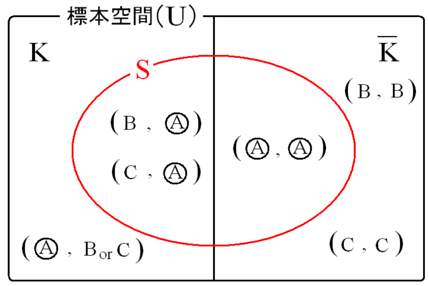
C を選択していた場合には，司会者は，必ず，B の扉を開けることとなる。したがって，B 氏は，Ⓐを選ぶことも可能であるし，C の扉を選ぶことも可能である。

結局，標本空間 U は，$U=\{(\textcircled{A},\textcircled{A}),(\textcircled{A}, BorC),(B,\textcircled{A}),(B,B),(C,\textcircled{A}),(C,C)\}$ として記述できる，$n(U)=6$ である。

次に，変えるという事象を K，変えないという事象を $\bar{K}$ とし，最終的に賞金と豪華商品の扉を当てるという事象を S とすると，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
K &= \{(\textcircled{A}, BorC),(B,\textcircled{A}),(C,\textcircled{A})\}\\
\bar{K} &= \{(\textcircled{A},\textcircled{A}),(B,B),(C,C)\}\\
S &= \{(\textcircled{A},\textcircled{A}),(B,\textcircled{A}),(C,\textcircled{A})\}
\end{aligned}
$$

である。また，ここでの試行においては，変えるか変えないかのどちらかしかないので，標本空間 U は，変えるという事象と変えないという事象とに分けられる。次のベン図は，このことに注意しながら，標本空間の構造を表現したものである。



この場合も，前節のカード問題と同様，上のベン図から「変えるという条件の下で最終的に賞金と豪華商品を当てる確率」及び「変えないという条件の下で最終的に賞金と豪華商品を当てる確率」がそれぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ であることは明らかである。ここでは練習のために，条件付確率の数学的定義の式から計算してみよう。というのも，次節以降の問題を通して具体的に述べるつもりであるが，より複雑な確率的事象を考える場合には，むしろ，事象を確率記号に翻訳し，記号表現のもつ形式性を利用する方が有利に思考を進めることができる。これは本質的に数学的モデル化に基づく解決過程であり，ある確率的状況を条件付確率として適切に記号に翻訳する能力，記号を形式的に処理する能力とともに，形式的に処理された結果としての記号を解釈し判断する能力が要求される。この意味で，記号に十分慣れることが大切である。

問題を数学的モデル化してみよう。まず，変えるという条件の下で最終的に賞金と豪華商品を当てる確率は，K という条件の下で事象 S の起こる条件付確率 $P(S|K)$ として定式化できる。これは，定義により，$P(S|K)=\frac{P(S\cap K)}{P(K)}$ と変形できる。ベン図から，$P(S\cap K)=\frac{n(S\cap K)}{n(U)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. また，$P(K)=\frac{n(K)}{n(U)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. したがって，$P(S|K)=\frac{P(S\cap K)}{P(K)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$ となる。

この計算結果は，数学的確率に従えば，変えた場合の方が変えない場合よりも 2 倍有利と解釈でき，B 氏は思い切って変えるべきであるということになる。

4.2 エリサテスト

さて，次の問題は，条件付確率がエイズ抗体のふるい分けという今日的問題に応用されていることを示す例である [6]。

> エリサテスト [酸素抗体法] は，エイズ抗体が存在するかどうかで血液をふるい分けするため，1980 年代半ばに導入された。抗体が存在すると，エリサは確率 0.98 で陽性である。テストされた血液に抗体が混入していないとき，テストでは確率 0.07 で陽性の結果になる。エリサによってふるい分けされた血液千単位のうちの 1 単位がエイズ抗体を含むなら，すべての陽性反応のうちエイズ抗体を含まないもの (偽の陽性) は何% であるか。

数学的モデル化：この問題は少し複雑なので，文章で表現されている問題状況を確率の記号表現に置き換え，数学的モデルとして定式化することにしよう。

くじ引きのように，エリサによってふるい分けされた全ての血液（非常に多くの血液単位から成っている）から 1 単位分の血液を取り出す試行を考える。このとき可能な取り出し方の全体を標本空間 U とすると，その数は，エリサによってふるい分けされた全血液単位の数（具体的な数は不明）と同じである。この試行は，取り出された血液にエイズ抗体が存在する場合（この事象を A とする）と，エイズ抗体が存在しない場合（この事象を $\bar{A}$ とする）とに二分される。今,「エリサによってふるい分けされた血液千単位のうちの 1 単位がエイズ抗体を含む」ことが分かっているので，標本空間における事象 A，事象 $\bar{A}$ の占める割合は，それぞれ $\frac{1}{1000} = 0.001$，$\frac{999}{1000} = 0.999$ である。これらの値は，それぞれ，$\frac{n(A)}{n(U)}, \frac{n(\bar{A})}{n(U)}$ と同じであるから，

$$P(A) = 0.001, P(\bar{A}) = 0.999.$$

ここで，今，数学的確率 $P(A)$ の意味の拡張が図られたことに注意したい。数学的確率 $P(A)$ の定義式 $\frac{n(A)}{n(U)}$ は，これまで標本空間の要素の数 $n(U)$ とその部分集合である事象 A の要素の数 $n(A)$ をそれぞれ求め，この 2 つの値から確率を計算していた。しかし，$\frac{n(A)}{n(U)}$ という確率 $P(A)$ の定義式は，本質的に，$n(A)$ の $n(U)$ に対する割合であり，それぞれの数が具体的に定まっていなくとも，これらの比さえ分かっていれば定まるということである。

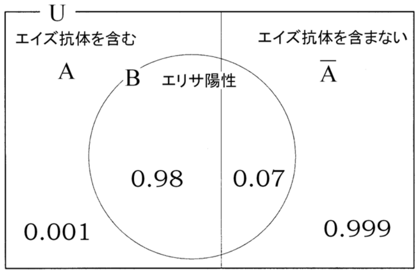
「（エイズ）抗体が存在すると，エリサは確率 0.98 で陽性である」ことが分かっているので，抗体が存在するという条件の下でエリサが陽性となる確率，すなわち，条件付確率 $P(B|A)$ は，

$$P(B|A) = 0.98$$

である。また,「テストされた血液に抗体が混入していないとき，テストでは確率 0.07 で陽性の結果になる」ことが分かっているので，抗体が存在していないという条件の下でエリサが陽性となる確率，すなわち，条件付確率 $P(B|\bar{A})$ は，

$$P(B|\bar{A}) = 0.07$$

である。次の図は，これらの結果をベン図に視覚的に表現したものである。



さて，この問題で問われているのは,「すべての陽性反応のうちエイズ抗体を含まないもの (偽の陽性) の割合である。すなわち，エリサテストが陽性であるという条件の下で，エイズ抗体を含まないという事象が起こる確率，すなわち，条件付確率 $P(\bar{A}|B)$ である。これで問題状況が定式化された。

計算過程：このままだと計算できないので，条件付確率の定義の式及び確率の積の法則を使って変形すると，

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A})P(B|\bar{A})}{P(B)} \qquad (6)$$

となる。これまでに，$P(\bar{A}) = 0.999$ と $P(B|\bar{A}) = 0.07$ は求まっているので，後は $P(B)$ を求めればよいことが示唆される。これはモデル化したことの 1 つの恩恵である。これは標本空間 U に占める「エリサテストが陽性である事象 B」の割合である。ベン図から 0.98 に 0.07 を加えたくなるかもしれないが，これはできない。0.98 は事象 A に対する事象 $A \cap B$ の割合であり，0.07 は事象 $\bar{A}$ に対する事象 $\bar{A} \cap B$ の割合であるからである。ではどうすればよいのか。これらを分けて考えられないか。

エリサ陽性という事象 B は,「エイズ抗体を含み，かつエリサ陽性」という事象 $(A \cap B)$ と「エイズ抗体を含まず，かつエリサ陽性」という事象 $(\bar{A} \cap B)$ とに二分されていることに注意すれば，事象 B はこれらの事象の和として表現できる。すなわち，

$$B = (A \cap B) + (\bar{A} \cap B)$$

したがって，それぞれの要素の数は，

$$n(B) = n(A \cap B) + n(\bar{A} \cap B)$$

となる。両辺を標本空間全体の数 $n(U)$ で割れば，

$$\frac{n(B)}{n(U)} = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} + \frac{n(\bar{A} \cap B)}{n(U)}$$

したがって，確率の定義から，

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

この式の右辺に確率の積の法則を適用すると，

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \qquad (7)$$

これで，右辺のそれぞれの確率の値は全て既知となった。確率 $P(B)$ を計算すると，

$$P(B) = 0.999 \times 0.07 + 0.001 \times 0.98 = 0.07091$$

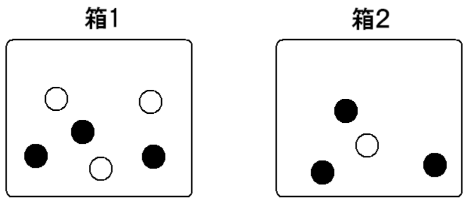
となる。(6) 式に既知の確率の値全てを代入して計算すると，

$$P(\bar{A}|B) = 0.9861796\cdots$$

解釈：つまり，エリサテストで陽性反応を示した血液のうち，エイズ抗体を含まないもの（偽の陽性）は，約 98% であるということである。この計算結果から，エイズ抗体を含む血液の割合が比較的少ない場合には，エリサテストの結果，陽性と判定されても，エイズ抗体を含んでいる場合というのは，100 人に 2 人程度であるということが分かる。

4.3 箱当て問題：情報の価値

下の図のように，2 つの箱がある。箱 1 には，黒玉 3 個と白玉 3 個，箱 2 には，黒玉 3 個と白玉 1 個が入っている。それぞれの箱の内容はあなたに知らされているが，箱は中が見えないばかりか，外見も全く同じで見分けがつかない。C 君は，この箱のうちから 1 つを選び，それが箱 1 であるか箱 2 であるかを当てるというゲームに 100 円を支払って参加した。当たれば 200 円受け取り，100 円の儲けとなる。はずれれば支払った 100 円の損となる。ただし，追加料金 30 円を支払えば，C 君が選んだ箱からサンプルとして玉を 1 個ランダムに取り出し，その玉の色を C 君に教えてくれるという。C 君は追加料金を支払ってまでこの情報を手に入れるべきであるか？



この問題[7)] は，いわゆるマーケット・リサーチに関する典型的な問題のモデルになっている[8)] という意味で，条件付確率の応用可能性とその具体的方法を理解するのに役立つであろう。

玉を取り出さなければ，選んだ箱が箱 1 である確率も箱 2 である確率も明らかに $\frac{1}{2}$ で同じであろうが，選んだ箱から取り出した玉の色という情報が入ると，状況は変わってくるであろう。例えば，取り出された玉の色が黒

色と分かれば，選んだ箱は箱 1 よりも箱 2 である可能性が高いように思われる。もしも取り出された玉の色が白色であれば，逆に箱 1 である可能性が高いように思われる。問題は，この可能性がどの程度のものであるかということである。この情報に価値があることは確かであるが，その価値はどの程度か。少なくとも 30 円以上の価値があるかどうかである。

数学的モデル化：選んだ箱と答えた箱とが一致する事象を S，選んだ箱と答えた箱とが一致しない事象を $\bar{S}$，選んだ箱から取り出された玉が黒色である事象を B，選んだ箱から取り出された玉の色が白色である事象を W とする。また，追加料金を支払ってこのゲームに参加したときの C 君の期待値を E とすると，選んだ箱と答えた箱とが一致すれば，100 円の儲けとなり，一致しなければ 100 円の損となるので，

$$E = P(S) \times 100 + P(\bar{S}) \times (-100) \tag{8}$$

となる。したがって，$P(S)$ を求め，E の値が 30 円以上になっているかどうかを調べればよい。

さらなる数学的モデル化：さて，選んだ箱から取り出される玉は黒か白のどちらかである。選んだ箱と答えた箱とが一致する事象 S は，取り出された玉の色が黒の事象 B と白の事象 W のどちらか一方であり，これ以外にはありえない。したがって，求める確率 $P(S)$ は，次のようになる。

$$P(S) = P(W \cap S) + P(B \cap S) \tag{9}$$

これを確率の積の法則を使って展開すれば，

$$P(S) = P(W)P(S|W) + P(B)P(S|B) \tag{10}$$

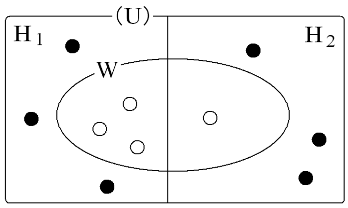
結局，$P(W)$，$P(S|W)$ 及び $P(B)$，$P(S|B)$ を計算すればよい。

計算過程：それでは，(1) 取り出された玉が白色の場合と (2) 取り出された玉が黒色の場合に分けて，それぞれ求めてみよう。

(1) 取り出された玉が白色の場合

ここで，$P(S|W)$ についてであるが，この意味は，取り出だされた玉が白色の場合に，選んだ箱と答えた箱が一致する確率である。一見複雑に思えるが，要は，取り出された玉が白色のとき，選んだ箱が箱 1 である確率が分かればよいのである。（選んだ箱は箱 1 か箱 2 のどちらかなので，このとき箱 1 である確率が $\frac{1}{2}$ よりも小さければ，箱 2 と答えればよいからである。）

そこで，箱 1 が選ばれる事象を H_1，箱 2 が選ばれる事象を H_2 として，$P(H_1|W)$ を計算することにしよう。考えやすくするために，図のように，標本空間のイメージ図を描いてみる。ここで，この標本空間のイメージ図は正確な標本空間ではないことに注意しよう。



例えば，事象 H_1 と事象 H_2 が起こる確率は共に $\dfrac{1}{2}$ であるが玉の数をみると，それぞれ 6 個と 4 個になっている。求める必要のある確率は，$P(W), P(H_1|W)$ であるが，図も参照しながら，既に分かっている確率を書き出しておこう。$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$, $P(W|H_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(W|H_2) = \frac{1}{4}$.

また，$W = (H_1 \cap W) + (H_2 \cap W)$ であることにも注意し，$P(H_1|W)$，すなわち，取り出した玉が白色であるとき，その箱が箱 1 である確率を計算しよう。

$$\begin{aligned} P(H_1|W) &= \frac{P(H_1 \cap W)}{P(W)} \\ &= \frac{P(H_1)P(W|H_1)}{P(W)} \\ &= \frac{P(H_1)P(W|H_1)}{P(H_1 \cap W) + P(H_2 \cap W)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(H_1)P(W|H_1)}{P(H_1)P(W|H_1)+P(H_2)P(W|H_2)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

したがって，$P(H_1|W)=\frac{2}{3}$. また，この途中の式から $P(W)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ であることが分かる。よって，$P(S|W)=\frac{2}{3}$.

(2) 取り出された玉が黒色の場合

取り出される玉は白色であるか黒色であるかのどちらかである。したがって，取り出された玉が白色である確率 $P(W)=\frac{3}{8}$ ならば，取り出された玉が黒色である確率 $P(B)$ は，$P(B)=1-P(W)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ である。

(1) の場合と同様に計算すれば，取り出された玉の色が黒色のとき，選んだ箱が箱 1 である確率 $P(H_1|B)$ は，$\frac{2}{5}$ であることが分かる。よって，$P(S|B)=\frac{3}{5}$.

(10) 式に，これらの結果を代入して計算すれば，

$$P(S)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{5}{8}$$

したがって，$P(S)=\frac{5}{8}$ と $P(\bar{S})=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ を (8) 式に代入すると，求める期待値 E は，

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{5}{8}\times 100+\frac{3}{8}\times(-100) \\
&= \frac{1}{4}\times 100 \\
&= 25
\end{aligned}
$$

解釈：つまり，このサンプリングによって得られる情報の価値は 25 円ということである。したがって，C 君は追加料金 30 円を支払ってまで，この情報を手に入れるべきではないということが分かる。

5　おわりに

本稿では，条件付確率に関わる面白い問題（4 問）を順次取り上げながら，条件付確率を中学校数学の確率の発展的内容として実現するための基礎として，条件付確率の概念の発展過程を再構成することを試みてきた。それは，人間の思考活動の中に条件付確率という考え方を正しく位置づけようとする 1 つの努力でもあった [9)]。

まず，最初のカードの色当て問題では，ある事象の起こりうる全ての場合を順序よく整理すること（標本空間の記述）を拠り所とした問題の解決過程において，われわれの自然な考え方として条件付確率のアイディアが生じることを示した。このことは標本空間の記述さえできれば，そこから中学生が条件付確率のアイディアを発見しうることを示唆している。このとき，標本空間に各事象を書き入れ，整理し，これらの関係を直観的・視覚的に表現する方法としてベン図が，中学生の確率概念の拠り所である標本空間の記述と新しい条件付確率の概念とを結びつける有効な表現となるであろう。この過程で，条件付確率の数学的定義とその記号的表現 (式) を導入し，この式から確率の積の法則 (式) を導いた。後半の 2 つの問題で，いわゆるベイズの定理を含む複雑な式が出てくるが，これらは上述の 2 つの式の単なる組み合わせである。2 番目のモンティ・ホール問題は，われわれの直観的な予想と実際の結果との間にギャップが大きいという意味で興味深い例である。この問題も，最初の問題と同様，標本空間を正確に記述することで解決されるが，ここで述べた標本空間の記述に至る長い思考過程は，その重要性を物語っているであろう。3 番目のエリサテストの問題をモデル化する過程で，条件付確率の定義の意味の自然な拡張が図られたが，この意味の拡張により，条件付確率の適用範囲が広がり，条件付確率による数学的モデル化が容易になる。この応用可能性は，この問題にみられるように，条件付確率がエイズ抗体のふるい分けという今日的問題に応用されるという事実や，4 番目の箱当て問題に

おいて，マーケット・リサーチにも応用されうるという事実が示唆している。また，その際の数学的モデル化においては，記号化，定式化することにより計算が可能となり，より複雑な現象へとアプローチできるということも強調してきた。ただ，そのためには，生徒たちがこの記号表現に十分に慣れる必要があり，ある程度の練習時間を要するであろう。2 節でも述べたように時期尚早な形式的操作は教育上問題がある。

しかしながら，本稿で展開してきたような，面白い問題を中心とした実質的な意味を伴う条件付確率の発展過程の再構成は，中学生にもアプローチ可能な魅力ある発展的内容の授業デザインの 1 つの根幹となりうるであろう。ここで取り上げた内容を題材として，新しい数学教育実践（授業）を開発していくことは今後の課題としたい。

註及び引用文献

1) L.A. Steen 編（三輪辰郎 訳）『世界は数理でできている』, 丸善, 2000 [原書 1990] , 180 頁.
2) シュヴァリエ・ド・メレ (1610-1684) は，ポワトゥー出身の軍人で，パスカルとも親しくしていたようである。パスカルは，メレから出されたとみられる問題に関してフェルマーといくつかの書簡のやり取りをしている。17 世紀以前にも確率の考えがあったことは断片的に記録に残されているようであるが，I. トドハンター氏によれば*，この書簡に確率論の真の起源を求めることができるという。
*I. トドハンター著（安藤洋美 訳）,『確率論史』，現代数学社，1975, 9-23 頁参照.
3) Freudenthal, H. , *Mathematics as an Educational Task*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1973, p.585.
4) この赤-青カードの問題は，次の著書*の中の問題を参考にした。ただし，ここで取り上げた問題及びその解説は筆者がアレンジしたものである。
*大村　平 :『確率の法則—勝負に強い人間の秘密』，1978，37-39 頁.
5) モンティ・ホール問題は、Monty Hall がホストを勤めるアメリカのゲームショー「Let's make a deal」に由来する初歩的な確率の問題である。この問題が有名になったのは、1990 年に "Parade magazine" の中の Marylin vos Savant の「Ask Marylin」という質問と回答のコラムでこの問題の解が議論された後、何人かの数学教授を含む多くの読者が彼女の解答は間違っていると投書したことに、主に負っている。(ウィキペディア (Wikipedia)[インターネット上の百科事典] 参照)
6) L. A. Steen, 上掲書, 2000, 181-182 頁.
7) この情報の価値に関する問題は，次の著書*の中の問題を参考にした。ただし，ここで取り上げた問題及びその解説は筆者がアレンジしたものである。
*金子郁容 :『＜不確実性と情報＞入門』，岩波セミナーブック 33，1990，145 頁.
8) この問題とマーケット・リサーチの問題との関係について若干の補足をしておく。ある会社が新製品を開発して，それがヒット商品になるかどうかを予測したいとする。成功を箱 1 に，失敗を箱 2 に対応させれば，この製品がヒット商品になるかどうかを予測することは，選んだ箱が箱 1 であるか，箱 2 であるかを当てるということに相当する。このとき，箱の中から玉を 1 つとってその色を見るということが，マーケット・リサーチに相当する。それは，例えば，アンケートを取って何百人とか何千人とかの潜在的な顧客の意見を聞くとか，地域を限ってその地域の店に新製品を置いてお客の反応を見るとか，ということである。(金子郁容，上掲書，1990, 147-148 頁を参照.)
9) 平林 (1990) は，理論を志向する数学教育研究のプログラムとして次の 3 つを提案し，それぞれに解説を加えている。
   1. 数学活動の本性を明確にし，それを人間の認知活動一般のなかへ，正しく位置づけること。
   2. 人間文化としての数学の歴史的・社会的役割を，教育の観点から明確に把握すること。
   3. 窮極的には，数学教育の実践における内容や方法を，批判したり是認したりする基礎的理論を構築すること。

   *平林一栄, TME in J. の研究活動の趣旨（草案）, 1990.