上越数学教育研究, 第 18 号, 上越教育大学数学教室, 2003 年, pp.23-30.

$\sqrt{2}$ の無理数性の認識について

岩 崎　浩

1　はじめに

本稿では，$\sqrt{2}$ の無理数性の認識について，特に，無理数性を認識する 2 つの方法を取り上げる。1 つは，ユークリッドの互除法であり，もう 1 つは背理法による方法である。

無理数性とは,2 つの量の間に成立する関係である。特に，$\sqrt{2}$ は，一辺が 1 の正方形の一辺の長さと対角線の長さとの間の関係である。従って, ここで取り上げる 2 つの方法は, 正方形の一辺の長さと対角線の長さとを関連づける方法でもある。そして両者とも「測定する」というわれわれの素朴な活動と結びついている。

ユークリッドの互除法による方法においては，主に幾何学的表現において正方形の一辺と対角線との間の関連づけを行う。次いで, これを連分数と関連づけ, 代数的に表現すると同時に，$\sqrt{2}$ の近似値を求めることを試みる。特に，代数的表現は，その表現が美しいと同時に，幾何学的表現における無理数性, すなわち, 互除法の過程が無限に繰り返される可能性の理解を助けるであろう。また，代数的表現は，$\sqrt{2}$ 近似値を求めることを可能とし，このことが $\sqrt{2}$ の存在をより具体的に捉える上でも有効に働くであろう。

また，背理法による方法は，正方形の一辺と対角線とが（共通する）小さな単位のいくつ分という形で比較可能かどうかという問題——測れない世界を認識するという文脈——の中で取り上げる。

2　$\sqrt{2}$ の無理数性を認識する 2 つの方法

まず，無理数性の意味を明確にしておくことにする。上で述べたように，無理数性というのは，2 つの量の間に成立する関係である。ユークリッド原論では，共通の尺度によって測ることのできる量を通約可能といい，共通の尺度のない量を通約不能な量と定義されている [1)]。本稿での無理数性とは，2 つの量が互いに通約不能の関係にあることを意味している。

ここで,「共通の尺度によって測る」という言葉がでてきたが，デューイによれば，この「測るという活動」が数概念の源であり，2 量を比較するための道具が数ということになる [2)]。2 量を比較しようとするとき，共通の尺度を定め，そのいくつ分で両者を数に対応させるという考え方はきわめて自然である。測るという活動は，この共通の尺度を前提とした行為であり，さらに単位 1 を定めることで，数と対応づけられる。逆に 1 をどのように定めるかによって，数は相対的に定まる。この意味で，数とは本質的に比ともいえる。

無理数性というのは，2 つの量の間に共通の尺度が存在しないような関係のことであるから，上で述べたような適当な単位を定めて測るという，素朴な意味での測るということが不可能であるような 2 量の間の関係のことである。このことからも，無理数性（通約不能性）は理論的な起源を有する概念なのであって，実用からのものではない [3)] ことは容

易に推測されるであろう。

2.1 ユークリッドの互除法による方法

無理数性を認識するためには，理論的な道具が必要である。その1つの道具がユークリッドの互除法である。ユークリッドの互除法は，**2数**の最大公約数を見いだすアルゴリズムである [4)]。ここで，数とはある適当な単位のいくつ分で表現されるものであり，それは有理数の範囲である。一方，後述するが，このアルゴリズムは，原理的に任意の線分で表現される**量**にも適用可能であり，それゆえ，**2量**の間の非通約性（無理数性）を認識するための理論的な道具となりうるのである [5)]。

まずは，ユークリッドの互除法について，その方法を簡単のために2数42と30を例として述べることにする。

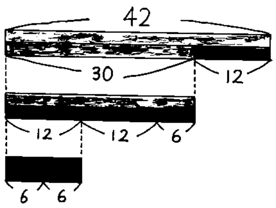


図 1: 42と30の最大の共通の尺度は？

まず，大きい方の数42を小さい方の数30を物差しとして測る。もしも，30の何回分かで42をちょうど測り切れたとすると，小さい方の数30が共通の尺度となる。今の場合，42であるから測りきることはできない。30が1回とれて，12だけ余る。今度は，この余りの数12を物差しにして，先ほど物差しにした数30を測る。もしも，この新しい物差し12で先ほど物差しにした数30を測りきれたとすると，この新しい物差し12が数42と30の共通の尺度となる。なぜなら，数30を測りきるわけだから，数30とこの新しい物差し12とで構成されている数42も同時に測りきることになるからである。今の場合，この新しい物差し12で30を測りきることはできない。12が2回とれて，6だけ余る。今度は，この余りの数6を物差しにして，先ほど物差しにした数12を測る。もしも，この新しい物差し6で12を測りきることができたとすると，この新しい物差し6が共通の尺度となる。なぜなら，数12を測りきれれば，数12と数6とで構成されている数30も測りきることができ，さらに，数30と数12とで構成されている数42も当然測りきることになるからである。今の場合，数6は数12を測りきるので，数6が共通の尺度となる。

これで，数6が数42と数30の共通の尺度となることが示された。次に，数6が最大であることを示そう。仮に数6よりも大きな共通の尺度mがあったとする。mは，数42と数30の両方を測りきることができるから，数42を数30で測った際の余りの数12も測りきらなければならない。なぜなら，12を測りきれなければ，12と30とで構成されている42も測りきれないことになってしまい，数mが42と30の共通の尺度であったことに反するからである。12を測りきることができるということは，同様の理由で，30を12で測った際の余り6も測りきらなければならない。しかし，これは$m > 6$であるから不可能であると同時に不合理である。したがって，数6よりも大きな共通の尺度は存在しない。つまり,数6が最大でなければならない。

このアルゴリズムは，数を前提に作られている。つまり，単位を前提に作られているので，少なくとも共通の物差しとして単位にたどり着くことでこのアルゴリズムは終了する。ところが，この原理自体，すなわち，いつも余りを物差しにして前の物差しを測っていくというやり方そのものは，単位の存在とは無関係である。つまり，任意の線分で表現しうる**2量**へとその適用範囲を拡張することができる。ここにユークリッドの互除法が無理数性を認識する道具として機能する優れた

性質（秘密）があるわけである。

2.1.1 ユークリッドの互除法と連分数

ユークリッドの互除法によって最大公約数（共通の尺度の最大のもの）を求める方法を等式で表し，この一連の等式を用いると，どんな分数（有理数）も次のような「連分数」という美しい複合分数に表現することができる。ここでは，$\sqrt{2}$ を連分数で表現し，その近似値を求める準備として，ユークリッドの互除法と連分数との関係について述べることにする。

例えば，先ほどの 42 と 30 で考えてみよう。$\dfrac{42}{30}$ を連分数で表現することを考えるのである。42 と 30 にユークリッドの互除法を適用すると，一連の等式,

$$42 = 30 \times 1 + 12 \quad (1)$$
$$30 = 12 \times 2 + 6 \quad (2)$$
$$12 = 6 \times 2 \quad (3)$$

が得られる。これらの等式 (1),(2),(3) の両辺をそれぞれ,30，12，6 で割ると，

$$\frac{42}{30} = 1 + \frac{12}{30} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{30}{12}} \quad (4)$$
$$\frac{30}{12} = 2 + \frac{6}{12} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{12}{6}} \quad (5)$$
$$\frac{12}{6} = 2 \quad (6)$$

が得られる。これらの等式を結合することによって，$\dfrac{42}{30}$ の連分数が得られる。

$$\frac{42}{30} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

2.1.2 ユークリッドの互除法による $\sqrt{2}$ の無理数性の認識

それでは，ユークリッドの互除法によって正方形の一辺 $(=1)$ と対角線との間に共通の尺度が存在するかどうかを調べることにする。次の図 2 は，正方形の対角線とその一辺にユークリッドの互除法を適用した様子を図示して表現したものである。

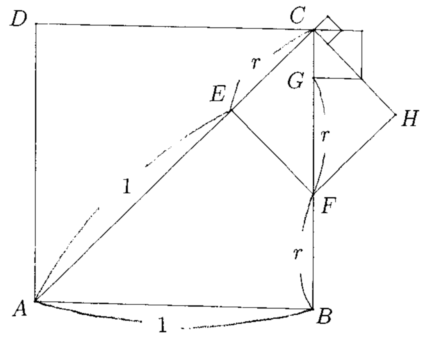


図 2: 正方形の一辺を物差しとして対角線を測る

まず，図 2 で，正方形 $ABCD$ の対角線 $AC(=1)$ をその一辺 AB を物差しとして測る。すなわち，AB に等しく AE をとると，1 回とれて $CE(=r)$ だけ余る。今度は，この余り $CE(=r)$ を新しい物差しにして，前の物差し $AB(=1)$ を測る。AB を測る代わりに BC を測ってもよい。そうすると，BF, FG と 2 回とれて，GC だけ余る。

ここで注目すべきことは，図 2 の小さい四角形 $CEFH$ が正方形になっているという事実である。この事実は，次節の補題として証明することとして，この事実が示唆している，より重要な事実に目を向けることにする。その事実とは，余り r を新しい物差しとして，一歩前の物差し $BC(=1)$ を測る操作，特に，FG をとる操作が，この小さな正方形 $CEFH$ の対角線 CF をその一辺 $(=r)$ で測る操作になっているということである。すなわち，正方形の対角線をその一辺で測るという操作から出発したユークリッドの互除法の手続きが，その過程で再び（小さい）正方形の対角線をその一辺で測るという操作に還元されたということである。

このことは，正方形の対角線とその一辺に適用されたユークリッドの互除法が無限に繰り返されるということを意味している。つま

り，正方形の対角線とその一辺との間には共通の尺度なるものが定まらないということ，存在しないということである。これがユークリッドの互除法による $\sqrt{2}$ の無理数性の認識である。

2.1.3 補題の証明

前節で述べたユークリッドの互除法の手続きに忠実に補題を定式化すれば次のようになるであろう。

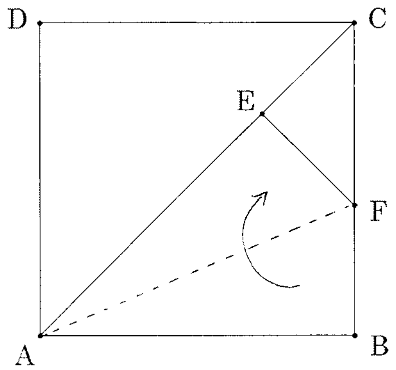
補題の定式化:

正方形 $ABCD$ の対角線 AC 上に，$AE=AB$ となる点 E をとる。次に，BC 上に $BF=CE$ となる点 F をとる。このとき，

$$\angle CEF=\angle R$$

$$CE=EF=FB$$

が成り立つ。



ただ, このように定式化した場合，その証明の過程で無理量の比の相等関係を取り扱わねばならなくなる。この無理量の比の相等関係の厳密な定義はユードクソスの比の相等関係の定義（『原論』第5巻定義5）を待たねばならない。無理数の比の相等関係は，2量の間の非通約性（無理数性）の発見以後はじめて意識されたことであるので, この時点，すなわち, 無理数性を認識する過程においては使いたくないのである。

補題の再定式化とその証明

このような理由から，ここでは図に示された幾何学的関係を次のようにみることにする。すなわち, 正方形 $ABCD$ を一枚の折り紙に見立て，ユークリッドの互除法の最初の過程で AB を物差しとして AC を測る操作を，正方形の一辺 AB が対角線 AC に重なるように折る操作と考えるのである。そうすると,$\angle CEF=\angle R, EF=BF$ であることは, この操作の必然的結果であり, 直観的にも明らかである。（あるいは,$AE=AB$ となるような点 E をとり，点 E 垂線の足として，AC の垂線を立て，BC との交点を F とすれば, 直角三角形 EAF と BAF において,AF 共通，仮定より $AE=AB$ であるから，合同（斜辺と他の一辺相等）となり，その結果，$EF=BF$ が示される。）

$CE=EF$ を示すことが残っているが，これは，$\angle CEF=\angle R$ であり，$\angle ECF=\dfrac{1}{2}\angle R$ であるから，三角形の内角の和の定理により，$\angle EFC=\dfrac{1}{2}\angle R$ となる。よって，$\triangle EFC$ は，$EC=EF$ の二等辺三角形であることが示される。

2.1.4 ユークリッドの互除法による幾何学的表現と連分数展開との関連

ここでは，2.1.2 節で行った際の正方形の対角線とその一辺との間に適用されたユークリッドの互除法の過程を振り返る。そして，ユークリッドの互除法が適用される過程で用いられた幾何学的表現を手がかりとしながら，$\sqrt{2}$ を連分数で表現することを試みることにする。このことは，ユークリッドの互除法を正方形の対角線とその一辺に適用すると，その過程は無限に繰り返されるという事実を代数的表現 (連分数展開) において確認することになる。また，この代数的表現を利用して，$\sqrt{2}$ の近似値を実際に計算することにする。

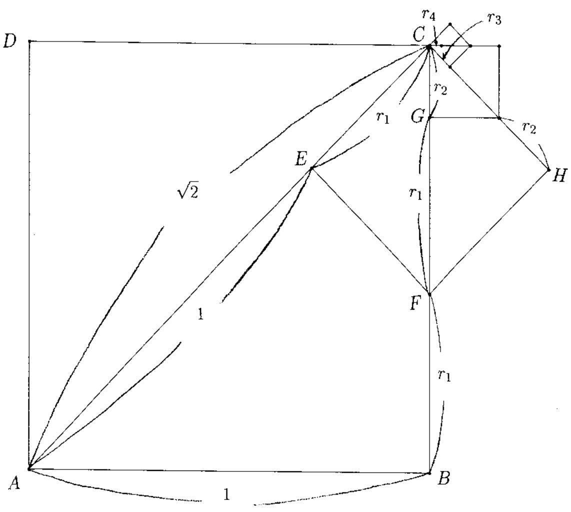


図 3: 互除法から連分数へ

2.1.2 節で行ったように，正方形 $ABCD$ の対角線とその一辺にユークリッドの互除法を適用すると，図 3 のように，まず，正方形の対角線 AC をその一辺 $AB(=1)$ で測ると 1 回とれて，$CE(=r_1)$ だけ余る。今度はこの余り r_1 を新しい物差しとして前の物差し AB を測る。$AB=BC$ なので，BC を r_1 で測ると，2 回とれて，$CG(=r_2)$ だけ余る。次に，この余り r_2 を新しい物差しとして前の物差し r_1 を測ると，2 回とれて，r_3 だけ余る。以下，同様にすれば，$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \cdots, r_n, \cdots$ が得られる。

互除法の過程をこれらの記号を用いて等式で表現していくと次のようになる。

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1 \times 1 + r_1 && (7)\\
1 &= r_1 \times 2 + r_2 && (8)\\
r_1 &= r_2 \times 2 + r_3 && (9)\\
r_2 &= r_3 \times 2 + r_4 && (10)\\
r_3 &= r_4 \times 2 + r_5 && (11)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

(8) 式，(9) 式，(10) 式，(11) 式の両辺をそれぞれ $r_1, r_2, r_3, r_4, \cdots$ で割ると，

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1 \times 1 + r_1 && (12)\\
\frac{1}{r_1} &= 2 + \frac{r_2}{r_1} && (13)\\
\frac{r_1}{r_2} &= 2 + \frac{r_3}{r_2} && (14)\\
\frac{r_2}{r_3} &= 2 + \frac{r_4}{r_3} && (15)\\
\frac{r_3}{r_4} &= 2 + \frac{r_5}{r_4} && (16)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

を得る。これらの等式を結合することによって，$\sqrt{2}$ の連分数展開は，次のように構成できる。

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1 \times 1 + r_1 && (17)\\
&= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{r_1}} && (18)\\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_2}{r_1}} && (19)\\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} && (20)\\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_4}{r_3}}}} && (21)\\
&\vdots\\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots\ 2 + \cfrac{r_n}{r_{n-1}}}}}} && (22)
\end{aligned}$$

(22) 式において，$\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{2}$ と考えて，$\sqrt{2}$ の近似値を求めてみよう。計算は，$\frac{1}{2}$ から始めて，これに 2 を加えて，逆数をとるという操作を繰り返し ($n=k$ の場合には，$k-1$ 回)，最後に 1 を加えれば，それが $\sqrt{2}$ の近似値となる。

次の表は，この様にして実際に計算した

(近似値の数値は小数第 9 位以下切り捨て) 結果である。

n	$+2$	逆数	$+1$	近似値
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$1+\frac{2}{5}$	1.4
3	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{12}$	$1+\frac{5}{12}$	1.41666666
4	$\frac{29}{12}$	$\frac{12}{29}$	$1+\frac{12}{29}$	1.41379310
5	$\frac{70}{29}$	$\frac{29}{70}$	$1+\frac{29}{70}$	1.41428571
6	$\frac{169}{70}$	$\frac{70}{169}$	$1+\frac{70}{169}$	1.41420118
7	$\frac{408}{169}$	$\frac{169}{408}$	$1+\frac{169}{408}$	1.41421568
8	$\frac{985}{408}$	$\frac{408}{985}$	$1+\frac{408}{985}$	1.41421319
9	$\frac{2378}{985}$	$\frac{985}{2378}$	$1+\frac{985}{2378}$	1.41421362
10	$\frac{5741}{2378}$	$\frac{2378}{5741}$	$1+\frac{2378}{5741}$	1.41421355
11	$\frac{13860}{5741}$	$\frac{5741}{13860}$	$1+\frac{5741}{13860}$	1.41421356

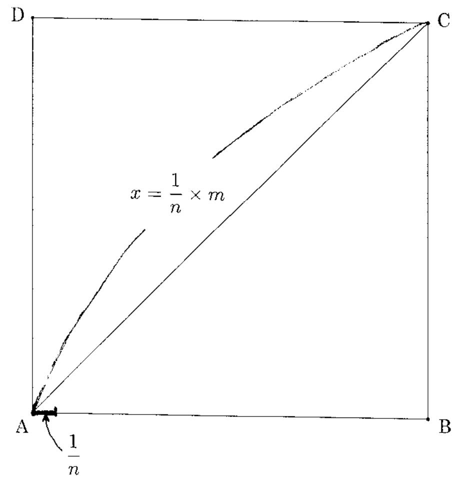


図 4: 共通の尺度があったとすると

2.2 背理法による方法

次に，無理数性を認識するもう一つの方法についてみていくことにする。

今，図 4 のように，一辺が 1 の正方形を考え，その対角線の長さを x としよう。そして，1 と x とが通約不可能の関係にあることを証明することにしよう。

三平方（ピタゴラス）の定理を適用すれば，

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \tag{23}$$

が成り立つ。背理法の原理に従って，x が 1 と通約可能であると仮定して矛盾を導くことにしよう。

今，x が 1 と通約可能であると仮定する。つまり，1 と x との間に共通の尺度が存在すると仮定する。共通の尺度とは，例えば，1 を細かく等分割して得られる量で，それを整数倍すれば x も丁度測りきることができるものである。今，1 を n 等分したときに，その m 倍で x を測りきることができたとしておこう。

すなわち，

$$x = \frac{1}{n} \times m = \frac{m}{n} \tag{24}$$

となる。ここに測りきることができるという事実と分数で表現できるという事実との関連がみれるであろう。つまり,「測れる世界」というのは分数で表現できる世界，すなわち，有理数の世界なのである。

さて，ここで，$\dfrac{m}{n}$ は，もうこれ以上約分できない分数，すなわち，既約分数にすることができる。この既約分数を 2 つの整数 a, b を使って $\dfrac{b}{a}$ で表すと，

$$x = \frac{m}{n} = \frac{b}{a} \tag{25}$$

である。このとき，a と b には 1 以外に共通の約数，すなわち，公約数は存在しないということに注意しよう。$x = \dfrac{b}{a}$ を (23) の式に代入して整理すると，

$$b^2 = 2a^2 \tag{26}$$

となる。(26) の右辺を見ると 2 という因数がある。したがって，b^2 は偶数でなければならない。b は偶数か奇数のどちらかである。奇数の 2 乗は奇数（これは中学校の文字式の典型的な応用問題！）なので，b は偶数ということになる。

さて，この新しく見いだされた，b が偶数であるという事実は，$b = 2p$ (p は整数) という式の形で表現できる。これを (25) に代入して整理すると，

$$2p^2 = a^2 \tag{27}$$

となる。(27) の左辺に 2 という因数があるから，a^2 は偶数，したがって，上と同じ考えで，a も偶数とならねばならない。

ここで a と b が共に偶数であるという事実は，a と b には 1 以外の公約数 2 が存在することを意味している。しかし，この事実は，a と b には 1 以外に公約数が存在しないということに矛盾する。この矛盾は，x が 1 と通約可能であると仮定したことから導かれので，結局，x は 1 と通約不可能であるということである。

われわれは，正方形の一辺と対角線との間に，共通のものさしが存在しないという，われわれの直観を超えた事実も，数や図形などの数学的言語の力を借りることによって認識することができるのである。ここでは，ピタゴラスの定理，背理法という正しい論理的過程，奇数と偶数の関係を適切に表現しうる明確な言語が用いられた。

3　おわりに —結語にかえて

以上，$\sqrt{2}$ の無理数性を認識する 2 つの方法について述べてきた。

ユークリッドの互除法によって正方形の対角線と一辺との間の無理数性を認識する過程を反省すると，ユークリッドの互除法という認識の道具のすばらしさにあらためて感銘を受ける。ユークリッドの互除法が数に適用するために作られていたにもかかわらず，その原理は，本質的に，いわゆる単位（ギリシャ数学において数を構成するもとになると考えられていたもの）を前提としないものであり，それゆえ，任意の線分で表現しうる量にも適用することができたのである。そして，正方形の対角線とその一辺に対してユークリッドの互除法を適用したとき，この過程が永遠に続くということに気づく——というのが無理数性の認識であった。

この過程には，次の 3 つの段階があった。すなわち，第 1 段階 : 正方形の一辺をその対角線から引くと，新たに正方形の一辺が現れる様子が示された。第 2 段階: 一回目のひき算の残りからの第 2 の引き算は，そこに生じた小さい方の正方形の対角線，すなわち第 2 の（より小さい）正方形の対角線からの引き算になっていることが見られた。第 3 段階: なお残された 2 つの新たな余りは，また第 3 の正方形の対角線と一辺とになっていることが示された。[6] この 3 段階においてユークリッドの互除法の無限過程をわれわれは認識しなければならないのであるが，この無限過程を図そのものによって示すことは不可能である。言い換えれば,「真の証明とは，示された図柄 (Zeichnung) の中にあるのではなく，それがいかに理解されるかの中にある」[7] といえる。逆に,「証明の最も本質的な核を形づくるものは，決して目に見えるものではなく，その反対に，図形がもはや示し得ないものである。」[8] あるいは,「もはや眼には見えない，より重大な事実，すなわち同じ三つの段階の無限反復の可能性というものを，人は推測するわけである。」[9]

この点を補っているのが背理法による無理数性の認識の方法であった。この方法は，共通の尺度があるとして，つまり，測定可能だと仮定してそれが不可能であることを数学的言語の力を借りて論理的に導いているからである。

この過程でわれわれが素朴に数と考えているものは単位（それがどんなに小さくても）を前提とし，そのいくつ分として数えられるものであったことに，また，測れる世界というものが分数で表される世界であることにも気づかされる。

本稿で取り上げた背理法による $\sqrt{2}$ の無理数性を認識する方法（証明）は，扱われている数学的関係は「$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。有理数は分数の形で表せるから，$\sqrt{2}=\frac{n}{m}$，ここで，m,n は正の整数で互いに素であるとしてよい・・・」で始まる標準的な教科書の内容と同じであるが，その数学的関係が取り上げられている文脈が異なることに注意したい。これは些細なことのように思われるかもしれない。しかし，メタ知識の視点からすると根本的に異なるのである。文脈は認識主体（子ども，われわれ）と数学的関係との出会いを演出する。文脈はわれわれが出会う新しい数学的関係との関わり方を決定する上で本質的な役割を担っているからである。われわれは文脈を通してその数学的関係が一体何であるか，どのように重要であるかも評価し，学んでいる。われわれは知識である数学的関係と知識についての知識（メタ知識）を常に同時に獲得している [10] のである。だから，文脈を「測れない世界」の認識としただけで，この背理法による無理数性の証明の意味も全く異なったものとなりうる。実際，私自身，この「測れない世界」の話は，算数科指導法という講義においてそれこそ‘熱くなって’語る内容の一つであるが，聞いている学生たちも，中学校あるいは高校で学んだ無理数性の証明とは全く違うものとして受け止めているように感じられる。

最後に，ここで述べてきた $\sqrt{2}$ の無理数性の認識の 2 つの方法は，中学校の数学の内容の範囲内にあり，中学生にとっても十分に理解できる内容であると筆者は思っている。ユークリッドの互除法や連分数などは新しい学習内容となるであろう。分数の計算ができれば十分に理解でき，またその美しさ，奥深さに興味・関心を抱くことも十分に期待される。ここで取り上げた内容を題材として，新しい数学教育実践（授業）を開発していくことは今後の課題としたい。

引用・参考文献

1) Heiberg, I. L. 編,『ユークリッド原論』(中村幸四郎, 寺阪英孝, 伊東俊太郎, 池田美恵 訳・解説), 共立出版社,1971, 227 頁.（第 10 巻定義 I-1.）

2) 平林一栄，J.Dewey 著「数の心理学」の算術教育史的位置—J.Piaget に連らなるもの—,『数学教育学論究』Vol.I, 57-67 頁.

3) Á. サボー著，中村幸四郎，中村　清，村田　全（訳）『ギリシャ数学の始原』，玉川大学出版, 1978, 98 頁.

4) Heiberg, I. L. 編, 上掲書，151 頁.

5) 実際,『原論』第 10 巻（無理量論）命題 3 において，2 つの通約できる量に対して，その最大公約量を求める方法としてユークリッドの互除法が示されている*。また，同上命題 2 では，互除法の過程が無限に繰り返される可能性によって非通約性を認識しうることが示されている**。
* Heiberg, I. L. 編, 上掲書，229-230 頁.
** Heiberg, I. L. 編, 上掲書，228-229 頁.

6) Á. サボー，上掲書，250 頁.

7) Á. サボー，上掲書，250 頁.

8) Á. サボー，上掲書，251 頁.

9) Á. サボー，上掲書，251 頁.

10) Otte,M., Bromme,R., Der Begriff und die Probleme seiner Aneignung, in; Bloch,J.R., Künzli,R., Lang,M. (Hrsg.), *Grundlagen- konzepte der Wissenschaft- skritik als unterrichtsstrukturierende Momente*, Instiuite für die Pädagogik der Naturwissenschaften, an der Christian- Albrechts-Universität Kiel, Referate des 13. IPN-Seminars, 1978, S.167.

11) 彌永昌吉，伊藤　徹,『ギリシャの数学』，共立出版，1979.

12) 岩崎　浩,「具体的教材（題材）の陶冶価値を検討することの意味：非通約量（無理数）の発見に対するプラトンの見方」, 一般教科教育学研究会 (編),『一般教科教育学序説』, 大学教育出版, 1998 年, 54–75 頁.

13) Courant,R., Robbins,H., *What is Mathematics?* , Oxford University Press, Oxford, 1941. (森口繁一 監訳,『数学とは何か (第 4 刷)』, 岩波書店, 1969.)

14) 平林一栄, 算数教育における数学史的問題 —「量」に関連して—,『皇學館大學講演叢書 第七十五輯』, 皇學館大學出版部，1994.

15) 一松　信,『$\sqrt{2}$ の数学』，鳴海社，1990.