上越数学教育研究，第19号，上越教育大学数学教室，2004年，pp.1-16.

米国における最近の数学教育改革の方向：1989年，1991年，1995年のスタンダーズの考察から

高橋　等

１．はじめに

本稿は，上越教育大学に着任し暫くした頃の1997年７月19日に，上越数学教育研究会という上越地域の数学教師の方々の研究会で講演させていただいた際の草案である。当時，講演のための草案を作成したが，公表する機会を探しているうちに今日に至ってしまった。講演の内容は，NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)から出版されていた一連のスタンダーズへの評価と，今後の日本が取るべき方向を述べたものであった。従って，本稿の題目に「最近の」とあっても，2000年にNCTMによって出版された最新の「Principles and Standards for School Mathematics」の内容を考慮しないで考察したものである。

NCTMによる2000年のスタンダードには2001年に筑波大学数学教育学研究室翻訳・監修として出版された和訳である「新世紀をひらく学校数学－学校数学のための原則とスタンダードー」がある。スタンダーズのうちでも有名な1989年に出版された「Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics」の和訳は1997年に筑波出版会から出版されている。米国の一連のスタンダーズの影響は，世界に向けて広く影響力のあるもので，米国の一連の動きを知ることは数学教育者にとって行うべきことだろう。講演の草案としての本稿を投稿するにあたり，全体を修正し，最新の「Principles and Standards for School Mathematics」の批評を付加することも考えたが，しかし，当時の「Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics」への批評を鑑みるという機会をもちたくも考え，そのままに投稿することにした。以下は，当時の講演の草案である。

本日は，この会にお招き頂きお礼申し上げます。

本日の話の内容を，先生方と私にとって有益な話にしようと考え，様々に摸索してみた。そこで，今日，各国でさかんに試みられている数学教育改革の話題のうちから特に我が国の数学教育に影響を及ぼしてきた米国の数学教育改革を取り上げ，解釈し，我が国の現状と比較しながら紹介することにする。

米国の事情を述べるからといって，米国が行っている数学教育改革をそのまま取り入れたらよい，というのではない。むしろ，今日の米国の改革は我が国の数学教育，特に算数の授業を参考にしているに違いなく，米国が我が国に学んだ格好となっている。とはいっても，米国が数学教育を根本から見直し，改革に際して社会的背景を浮き彫りにし，理論的基礎付けを行い，具体的にカリキュラムを編成してみせ，教材例を提示することは，我が国にとって非常に参考となる。我が国と米国とには数学教育上の問題点として共有しているものもあり，米国の数学教育改革を分析

することは，我が国の数学教育を反省し，改良していく上で，意義がある。

実は，中央教育審議会によって平成８年７月19日に発表された答申「21世紀を展望した我が国の教育の在り方について」(文部省中央教育審議会，1996)における立場と，米国の数学教育改革の立場とに共通するところがあると考えている。中央教育審議会によるその答申は学校教育一般に関するものであって，米国の数学教育改革の場合と直接の比較をすることはできない。けれども，その答申が何れ我が国の数学教育の方向に少なからない影響を及ぼすかも知れないことを考えれば，米国の改革の方向を見定めておくことは，有益なことと考える。

本日は，次の順に話しを進める。第一に，米国の数学教育改革を推進させている社会的背景を述べ，次いで，その数学教育改革における理念を我が国の現実と対比させながら述べる。次に，その改革におけるカリキュラム開発研究のための原理を述べ，幾つかの事例を紹介する。最後に，その改革が我が国の数学教育実践に与える示唆について述べる。

私はカリキュラム開発研究は，我が国で広く行われている，実践における研究に有用な示唆を与えると考えている。次に，米国の数学教育改革の社会的背景について述べる。

２．米国の数学教育改革の社会的背景

現在行われている米国の数学教育改革運動は，約11万7千名(1996年現在)の会員を有する数学教育に係わる人々の全国組織，NCTM(National Council of Teachers of Mathematics，全米数学教師協会)が推進している。NCTMは1989年から1995年にかけて，改革の理念，カリキュラム，教材例，評価などを内容とする三つの文書を公刊し，当時，会員に無償で配布した。この三つの文書とは，カリキュラムと評価のスタンダード(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics，1989)，プロフェッショナルスタンダード(Professional Standards for Teaching Mathematics，1991)，アセスメントスタンダード(Assessment Standards for School Mathematics，1995)である。

カリキュラムと評価のスタンダードは，改革の背景と理念，幼稚園から第12学年までのカリキュラムと評価を内容とする。幼稚園から第12学年までとは，我が国においては幼稚園から高校３年までに相当する。

Home runs	9
Triples	2
Doubles	16
Singles	24
Walks	11
Outs	38
Total	100

Fig. 11.2. Softball stats

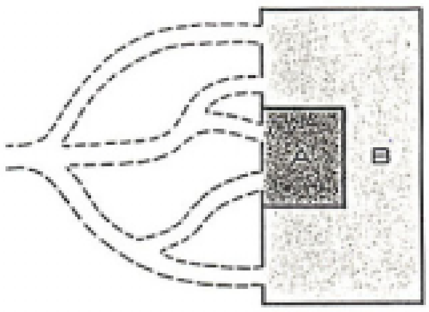


Fig. 11.3. Maze

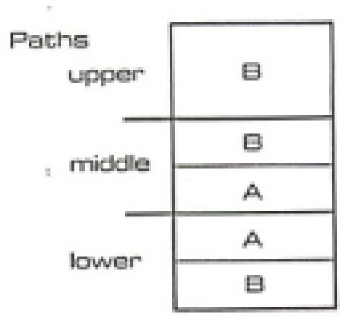


Fig. 11.4. Grid

この図は５学年から８学年までの確率の問題である。カリキュラムと評価のスタンダードにはこの他にも様々な教材例が掲載されている。後半では，幾つかの教材例を紹介しながら話しを進める。

プロフェッショナルスタンダードは改革の背景と理念，数学教師に必要な専門性を内容とする。米国では特に教師の質の問題は切実であり，教師教育が数学教育上の大きな問題である。我が国でも長期研修の充実，大学院への現職の先生方の派遣が行われている。

アセスメントスタンダードでは，NCTMの改革の理念に基づいて，教師が子どもの学習をアセスメントすることを可能にする手続きとやり方を述べている。

今回はカリキュラムと評価のスタンダードとプロフェッショナルスタンダードとの二つの文書を参考にする。単にスタンダーズと述べるときには，これら双方を指すものとする。

ところで，NCTMは民間団体であり，スタンダーズには我が国の学習指導要領のような法的拘束力はない。にもかかわらず，NCTMはこれら三つの文書に全米で共有し得る規準性をもたせようとしているように見える。

米国の教育制度は地方分権に立脚しているため，各州が地方学区の設置，廃止を行ったり，独自のカリキュラムを作成する権限をもつ。15000以上ある地方学区は教科書の選定や採択，教育内容に関する指導・助言の権限をもつ。地方学区の統合など最近では徐々に教育組織の中央集権化を志向する動きもあるようだが，教育制度に限らず政治上の地方分権を主義とする米国にあって，スタンダーズなるものが提示されたことは画期的である。

次に，スタンダーズが作成されるに至った社会的背景を，スタンダーズ作成において委員長を勤めるなど主導的役割を果たしているRomberg(1996)による講演を参考として述べる。

３．スタンダーズ作成の社会的背景

Romberg(1996)はスタンダーズ作成の社会的背景として，今日の，工業の時代から情報の時代への変化をあげる。この変化には大きくは二つの特徴がある。一つ目は，推進力としての体力への知力の付加，二つ目は，具体的な生産物から抽象的な生産物への変化，である(Romberg,1996)。この体力への知力の付加というのは，社会が要求する労働力の質的な発展のことである。例えば，今日，工場の管理はおよそコンピュータによって行われていることを考えれば，必要な労働力として体力に知力が付加している。生産物の変化というのは，主流を占めている自動車などの機械類と同様に，情報それ自体が商品としての大きな価値をもってきており，その価値が益々高くなっているという変化である。

このような情報の時代を繁栄させていくための能力としての数学の学力，を高めることが要求されることは，当然のことである。Romberg(1996)が「米国では，来るべき情報の時代においても繁栄していこうとするのであれば，市民に必要なのは数学や科学，科学技術のよりよい理解であることに気づいて来ている」と述べているように，国民による数学や科学，科学技術の理解は国力の維持という点からも要求されることである。

しかしながら，スタンダーズの立場というのは，国力の維持という立場を越えたより一層深淵なものであると考えている。国力の維持に重点を置くのであれば，今回のNCTMによる改革は1960年代の数学教育現代化運動とその性格を大きくは異なるものとしない。このことに関しては，ウェスコンシン大でのRomberg(1996)の同僚Apple(1992)が指摘するところでもあり，話しの中で少しずつ示していくことにする。

さて，工業の時代と情報の時代との各々の時代を支えてきた勢力をあげておくことにする。これらの勢力は学校を取り巻く社会にあって，各々の時代において必然的に学校教育に影響を及ぼしている。Romberg(1996)によれば，工業の時代においては，機械，工場，合理主義，分析的思考，実験科学，および製紙技術と印刷技術に支配され，これらが，当時，科学的経営，ベルトコンベアラインなど

の開発を促した。

これらの勢力に支えられた学校教育が，客観的真理観，肖像的形式的知識観，生産物としての学習者という考え，刺激－反応という行動主義心理学による学習観，大多数の子どもが大量生産経済にスムーズに適応できるように効率的に準備する必要性，に従ってなされてきたとするRomberg(1996)の言及は，およそ妥当であろう。我が国の学校教育を省みた場合，経済成長の過度の追求に支えられた効率を求める学校教育，受験準備に多くの労力を費やさねばならない学校教育が，Romberg(1996)の言う工業の時代の学校教育に相当する。中央教育審議会が最終答申で，ゆとりや生きる力に力点を置くのも，工業の時代型の学校教育への反省からであろう。

工業の時代から情報の時代に至らせた勢力としてRomberg(1996)は次をあげる。一つ目は，真理が社会的構成物と見なされ，知識について形式的というよりは構成主義による知識観が台頭して来たこと，二つ目は，学習者は生産物というよりも活動的な参加者として見られていること，三つ目は，心理学において行動主義を後退させ，認知理論や知識論，知識の理解モデルの構築へと進歩してきたこと，四つ目は，人々には急速に変わる環境に適応するために学び，新しい知識を生み出し続けることができることが要求されていること，である。

これらの情報の時代を支える勢力とその要求を背景とした学校教育の有り様がスタンダーズに反映されている。スタンダーズでは大多数の子どもが大量生産経済にスムーズに適応できるように効率的に準備することとは全く正反対のことが要求されている。つまり，子どもは，環境の中で自分のやり方で周囲を理解し，環境にある知識資源の使い方を理解するように仕向けられている。我が国の中央教育審議会の言うゆとりや生きる力に力点を置いた学校教育が子どもを中心に置いている姿勢とスタンダーズに示されている改革の方向とは，共通するものがあるのである。

次に，この情報の時代を反映したスタンダーズの理念を解釈していくことにする。

４．スタンダーズの理念

スタンダーズに表される改革において最も注目すべき点は，その理念である。新しい理念を礎にするのでなければ，これまでの数学教育からの進展はない。数学教育の目標は理念なくしてはあり得ないし，教材の選択，配列は理念があって初めてなされるものである。

Romberg(1993)はスタンダーズの理念と作成過程を報告した論文で，カリキュラムと評価のスタンダードにおいては，ほんの数行のみに要約されている理念を五つに分けて説明している。その数行とは，"(Inherent in this document is a consensus) all students need to learn more, and often different, mahematics and that instruction in mathematics must be significantly revised."((この文書に含まれる理念は次の共通理解であって)，すべての子どもはより一層，様々な数学を頻繁に学習する必要がある，数学の指導は意義のあるものに改められなければならない)(NCTM 1989)である。五つに分けたものとは，"すべての子ども","より一層の数学"，"様々な数学を頻繁に"，"学習すること"，"改められる"，である。これら五つにRomberg(1993)は次のような短い説明を付け足している。なお，上記引用文の括弧内の英文Inherent in this document is a consensusはRomberg(1993)では引用文から除かれているものの，ここでは原文に忠実に引用した。

a) "すべての子ども"に数学を教えることは，21世紀において生産力のある市民になる誰もが数学的教養をもたなければならないことを背景とする。"すべての子ども"には才能のある"白人男性"のみでなくすべての小数派が含まれる。

b) "より一層の数学"とはすべての子どもが算術的な決まりきった手続きを行うことを越えた学習を必要とすることを意味する。米国では現在，ほとんど半数の子どもが算術を越えた如何なる数学をも勉強していない。
c) "頻繁に様々な数学を"はすべての子どもが代数，幾何，三角法，統計，確率，離散数学，さらには微積分学さえから概念を学習する必要があることを指し示す。
d) "学習すること"は記憶と反復とを越えることを意味する。学習は調べること，組織立てること，表すこと，推理すること，問題を解決するために適切な方略を使用すること，如何なる数学が使用されているかを熟考することを含む。
e) "改められる"指導とは教師と子どもとが数学の授業を，推量し，議論を行い，方略を論議するところである共同体として企画する必要があることを意味する。

これら五つを解釈していくことにする。五つのうち最も根幹にある理念は"すべての子ども"にである。"すべての子ども"にという理念は，しばしば"mathematics for all"という標識によって表されている。実は，この"mathematics for all"に要約される理念を失わない限りにおいて，NCTMのスタンダーズは数学教育の現代化を越え得る改革であると私は信じている。NCTMのスタンダーズと現代化との決定的な違い，実現させるには手間がかかろうけれども実現させなければならない違いをこの講演の後半の方で述べていくことにする。

さて，この"mathematics for all"をやや詳しく，我が国の実情と対比させながら解釈することにする。プロフェッショナルスタンダードには"mathematics for all"の具体的な対象が述べられている。それらは次の四つである。

(1) 教育の機会を与えられてきた子どものみでなく，如何なる教育の機会をも与えられてこなかった子ども。
(2) 優勢派である白人の子どものみでなくダーク，ヒスパニック，インディアン，他の少数民族の子ども。
(3) 男子と同様に女子。
(4) 学校での活動や数学学習において，進んでいる子どものみでなく，進んでいない子ども。

これらのうち，(1) 教育の機会を与えられてきた子どものみでなく，如何なる教育の機会をも与えられてこなかった子ども，(2) 優勢派である白人の子どものみでなくダーク，ヒスパニック，インディアン，他の少数民族の子ども，への教育は米国では多民族国家という社会的背景があるが故の大問題であろう。一方，我が国の場合，米国の場合ほど切実ではないのかも知れないが，これら(1)，(2)に相当する事情はある。

(1)に対しては，例えば我が国では不登校，保健室登校などの子どもがいる。公的立場からはすべての子どもに対し学校教育を受ける機会が開かれているものの，現実にこのような子どもがおり，子どもが公的に数学教育に参加することができない場合がある以上，このことは解決すべき問題である。

(2)に関連しては，我が国の場合，帰国子女の日本語能力の問題がある。日本語能力の高低が数学的能力と直接の関係があるかどうかは別として，学級の中に帰国子女がおり数学授業が日本語で行われるのであれば，(2)は我が国においても数学教育上の問題である。

(3)男子と同様に女子，については米国の場合，男女の社会的地位の平等の追求には伝統的に厳しく，また，大学までは男子と同等であっても女性の場合，大学院に進む場合が多くはないという状況があるようなので"mathematics for all"としてこの項目を取り上げたものと考える。我が国の場合，教育を受ける機会は公的には整備されてきていると

考える。ところが，第３回国際数学教育調査の結果では中学校１年生と２年生の数学の成績，態度ともに男子の得点が高く，有意差があった。一方，米国の場合は男女間に差が見られていない。男女の成績，態度の差は社会的風潮があって生じるとは言われてきたことである。男子が将来を実現しようとすることは女子よりも強い思いに支えられていると言われた時代もあったかも知れないが，現在は男子も女子も同等でしょう。改善されると思います。

(4)学校での活動や数学学習において成功している子どものみでなく，成功していない子どもに対する教育は米国，我が国にかかわらず各国における関心事である。勿論，数学学習における成功とは何か，さらに言えば何をもって数学学力と見なすかが論点となる。一応，通常のテストで測定できるような認知的学力と，いわゆる関心，意欲，態度である情意的学力とを学力としておく。すべての子どもに対し或る一定の認知的学力を達成させることは必要なことと考える。現実として分数のスローラーナーの高等生に象徴されるような認知的学力の低い子どもは目の前に存在しているのであり，この場合に適したカリキュラム，教材，指導法を開発することは我々の役目である。

情意的学力もまたすべての子どもが達成すべき学力である。第３回国際数学教育調査の結果では中学校１年生と２年生の数学に対する態度が，第２回の場合と同様に国際的に比較して，我が国の場合，非常に低い。情意的学力は認知的学力と同等に，子どもが高めなければならない学力，数学教育の成果である。経験的なことを言えば，数学の内容としては思い起こせない場合であっても，その内容を学習した際の気分は残っている場合がある。子どもの情意的学力が低いことは，数学に対して良くは感じていないままに子どもが社会に旅立っているかも知れないということである。このことは，生涯学習とも関連する。私自身は，子どもが卒業後も数学とうまく係わっていくことを期待するものであり，どうにかしてすべての子どもの情意的学力を高めたいと願っている。

さて，"mathematics for all"以外の残り四つの理念を簡単に解釈していくことにする。"より一層の数学"とはいわゆる計算技能のみの習得を目指す数学教育から脱却し，数学を考えることを目指すものである。勿論，学習なるものの理論を提供してきた心理学が行動主義的心理学から認知理論，構成主義へと変化したことも背景にある。それに加えて，"より一層の数学"の背景には，数学観の転換があると考えている。今日，数学を人間を超越した唯一絶対の知識とする，いわゆるプラトン主義的数学観は後退し，数学を誤りを含み得る社会的構成物とする見方が優勢である。子どもに自らの数学的知識を学級の中で構成させることが"より一層の数学"を行わせることになる。

"頻繁に様々な数学を"はすべての子どもが代数，幾何，三角法，統計，確率，離散数学，さらには微積分学されをも学習する必要があるということである。このことは，"mathematics for all"を反映している。すなわち，"頻繁に様々な数学を"により，各々の子どもが自分に適した数学の内容を経験する可能性が高くなる。"mathematics for all"だからといってすべての子どもがすべての数学を理解しなければならないのではないわけである。勿論，すべてを理解することは理想であるけれども。また，"頻繁に様々な数学を"は上記の"より一層の数学"とも，あるいは"学習すること"の見方の転換とも関連しよう。数学を人間を超越した唯一絶対の知識と捉えたり，数学学習を計算技能のみの習得を目指すものなどと捉えている限りは，"頻繁に様々な数学を"をする必要はない。数学を誤りを含み得る社会的構成物，人間が互いに係わり合い，

作り上げていくもの，様々に発展し得るものと捉え，子どもがその発展の中に加わっていくような授業を構成する限りにおいて，子どもは"頻繁に様々な数学を"を経験し得るのである。

これまでしばしば触れてきた"学習すること"の見方，学習観の転換は米国と同様，我が国においても，特に，中学校，高校の場合に求められていることである。米国においては，これまで述べてきたように学習は行動主義心理学に基礎付けられ，およそ記憶と反復に依存するものであった。スタンダーズでは認知理論に支えられ，調べること，組織立てること，表すこと，推理すること，問題を解決するために適切な方略を使用すること，如何なる数学が使用されているかを熟考すること，からなる学習観への転換が試みられている。この学習観の転換は，我が国では算数の授業などでは既になされているように見える。中学校，高校においても，子どもに考えさせることを通しての学習を既に行っているとの主張があり，現実にその通りだとも思う。しかし，年間を通して見ると授業時数や，進学への備えなどに制限されて，実際には子どもに考えさせる授業というのはそれ程多くは行うことができないのではないだろうか。これは私の憶測にすぎませんが。

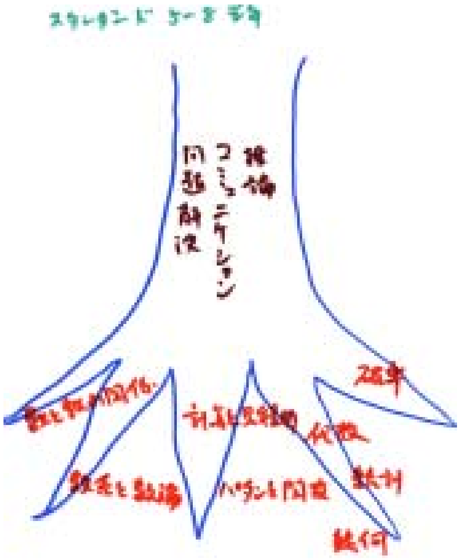
実は，米国においても現代化の際に発見学習などが提唱され，強力に普及が試みられた時期があった。しかしながら，結局のところ米国では記憶と反復への依存に帰着した。我が国においても米国においても学習観の転換はそれ程容易なことではないと考えている。

"改められる"指導とは教師と子どもとが数学の授業を，推量がなされ，議論が提示され，方略が論議されるところである共同体として企画する必要があることを意味する。この共同体では，子どもは受け身的な考え方を通して学習するのではなく，子どもが各々の新しい課題に対し既有の知識から出発し，新しい情報を取り込み，自分に固有の意味を構成する。このような共同体での教師の役割は子どもの役割を補うものとなる。

以上が，スタンダーズの理念の概要である。とは言っても，ここで取り上げた理念の小項目は固定的なものではない。幾つかのまとめかたがあろう。実際，Romberg氏による幾つかの論文でも理念の説明のための小項目は異なっている。けれども，何れの論文でも"mathematics for all"を基幹とした論を展開している。次に，この理念に基づくカリキュラムの構成原理を述べていく。

５．カリキュラム構成原理

ここで述べるカリキュラム構成原理の説明のためにスタンダーズに加えて，Romberg氏が大きく係わるカリキュラム開発研究プロジェクトであるMiC(Mathematics in Context，文脈の中の数学)プロジェクトにおける理念とカリキュラム構成原理，教材を参考とする。MiCプロジェクトとはオランダのユトリヒト大学のフロイデンタール研究所と米国のウェスコンシン大学教育研究センターとが共同で推進しているプロジェクトであり，中等学校，５年生から８年生まで，のカリキュラムを開発している。



MiCプロジェクトのスタッフの一員であるReeuwijk(1995)によれば，MiCプロジェクトは，

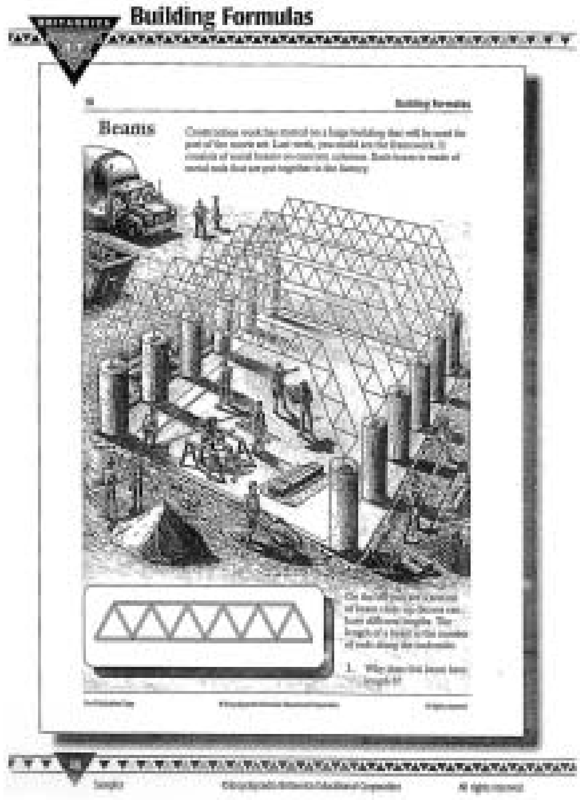
現実的数学の教育 (Realistic Mathematics Education)の理論と呼ばれる理念を支えとする。その理念とは，我々の数学は他の知識と同様に，人間が創造した，誤りをも含みながら進化していくものである，という数学観を基礎とする。この数学観はスタンダーズの場合と同じである。

Romberg(1996)が述べている五つのカリキュラム構成原理を要約，解釈していくことにする。

原理１は，子どもが学習する数学的領域を明細に定めるべきということである。カリキュラムをそれらの数学的領域の上に構築することになる。これらの領域は個々に独立したものと見なされるべきでない。各々の領域に独特の属性(サイン，シンボル，ルール)がある一方で，領域が木の根のように見える。その木の幹は問題解決，コミュニケーション，および推論などから成る。OHPに示したものは，この原理１を，スタンダーズの５－８学年の場合を例にして，図に表したものである。先に述べた，スタンダーズの理念，特に"より一層の数学"，"頻繁に様々な数学を"がこの図には反映している。

原理２は，カリキュラムの各々の単元が，指導に２週間から４週間かかるもので，ストーリーをもったものであること，数学的領域の中で，時には数学的領域間にありながら，少しずつ複雑になっていく問題場面を探求するための機会を子どもに提供するように単元を構成すべきこと，である。このように構成した単元において，子どもには意味や相互に関係する概念および技能を構成することを求め，様々な問題場面においてそれらの意味を使用することを期待することになる。

これはMiCプロジェクトの教科書で７年生の単元，Building Formulas（公式作り）の最初のページである。このようにストーリーをもった問題場面が設定されている。



各々の単元は読者に登場人物が繰り返し紹介されていくような小説のようであるべきである，とされる。ここで，繰り返しということは，同じ登場人物を同じ様に紹介するのではなく，各々の登場人物を様々な面から紹介するということだと考える。この繰り返しというやり方に近いものとして緑表紙教科書の内容がある。さらに，教育の現代化において中心的な役割を果たしたBruner(1960)の提唱する螺旋型カリキュラムも思い起こさせる。Bruner(1960)は，"どの教科でも，知的性格をそのままにたもって，発達のどの段階のどの子どもにも効果的に教えることができる"，と述べる。この言及はすべての子どもに教科の構造を教えることができるという理念に支えられていると考えるが，実は，現代化の際のBruner(1960)の理論では"どの子ども"にもというのは実現が難しかったのである。

Bruner(1960)によれば，人間の認知様式は，行動的様式，映像的様式，記号的様式の順に発達し，大人になってもこれら認知様式が働く。各々の場面で各自に適した認知様式が用

いられることになる。従って，各々の子どもの知的性格に適するように数学的構造を三つの認知様式の何れかで表し，提示すれば，すべての子どもが数学的構造を発見し，創造することが可能となると考えられている。

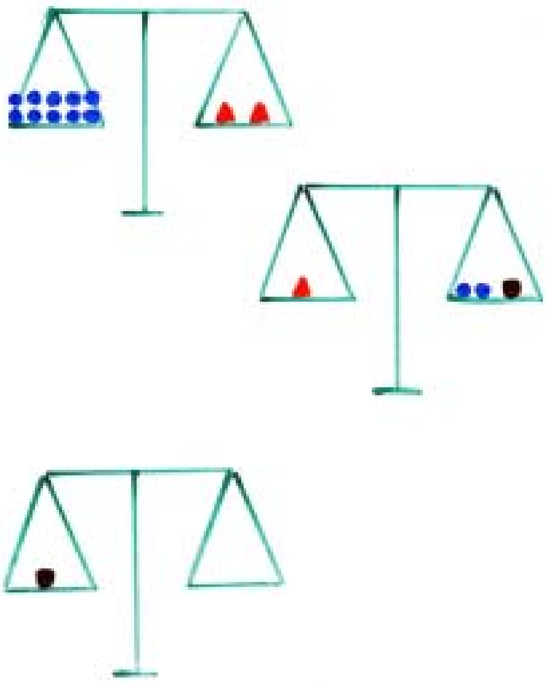
例えば，10x＝２y かつ y＝２x＋z のとき，zをxを用いて表せという問題があったとする。このとき，記号的様式に従えば，次のように解ける。

$$\begin{cases} 10\,x = 2\,y \cdots ① \\ y = 2\,x + z \cdots ② \end{cases}$$

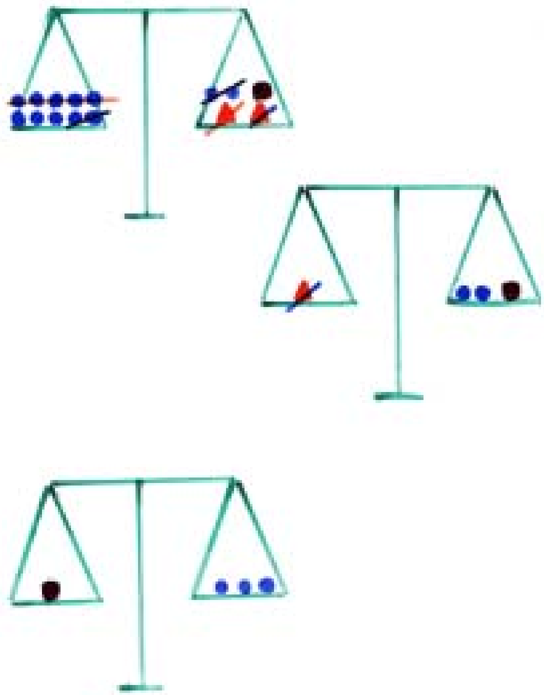
②を①に代入すると

$$10\,x = 2(2\,x + z)$$
$$10\,x = 4\,x + 2\,z$$
$$10\,x - 4\,x = 2\,z$$
$$6\,x = 2\,z$$
$$2\,z = 6\,x$$
$$z = 3\,x$$

映像的様式に従えば，例えば天秤の絵を用いて解くことができる。次のように○と□と△とを乗せた天秤が釣り合っています。□は○何個と釣り合いますか。



という問題であれば，



と解くことができる。

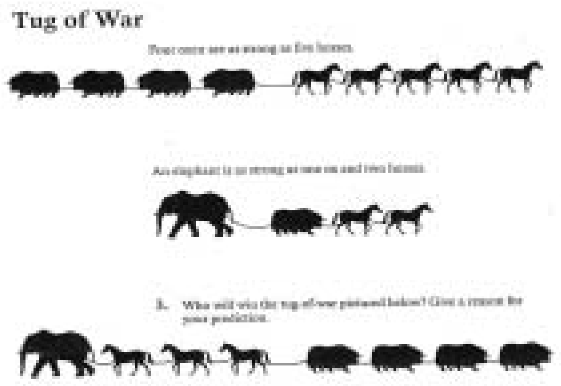
行動的様式に従えば，天秤と○と□と△とを子どもが手にとって操作できるような具体物で表し，問題に適するように○と□と△の重さを設定し，子どもに手操作を行わせればよい。

行動的様式，映像的様式，記号的様式のうち，どの認知様式が強いかを見定め，子どもに適した認知様式で表した問題を提示することにより子どもを数学的概念の発見と創造に導くことができる。この例の場合だと，連立方程式の概念の発見と創造に導くことができる。

しかし，スタンダーズないしはMiCプログラムの場合は，現代化の場合をさらに凌いでいる，と考えている。例えば，これはMiCプログラムの５－８学年の教科書に掲載されているBananaの問題で，バナナ10本とパイナップル２個とが釣り合っている，同時に，パイナップル１個と，バナナ２本とリンゴ１個とを合わせたものが釣り合っている，リンゴ１個とバナナ何本とが釣り合うか，という問題である。

Bananaの問題は，実は，たった今行った，$10x=2y$ かつ $y=2x+z$ のとき，zをxを用いて表せという問題と同じ問題である。ただ，文脈を伴わせただけである。

　この問題は，Bananaの問題のアレンジ，Tug of War (綱引き合戦)という題目のついた連立方程式の問題である。スタンダーズやMiCプロジェクトの問題を確かめて頂きたいので，この問題を解いてみて下さい。



この問題は，文章で表せば，牛４頭と馬５頭とが同じ力で綱を引き，象１頭と牛１頭 馬２頭とが同じ力で綱を引く，象１頭 馬３頭と，牛４頭とでは，どちらが綱引きに勝つか，という問題である。大人であれば，

牛が綱を引く力を　x,

馬が綱を引く力を　y,

象が綱を引く力を　zとおくと

$$\begin{cases} 4x = 5y \cdots ① \\ z = x + 2y \cdots ② \end{cases}$$

①と②とを利用して

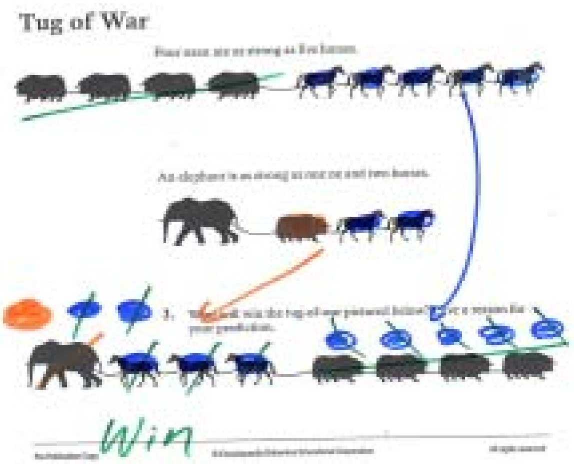
$$\begin{aligned} z + 3y &= x + 2y + 3y \\ &= x + 5y \cdots ③ \end{aligned}$$

①と③から

$$z + 3y > 4x$$

よって，牛４頭が象１　頭と馬３頭に勝つと解く。

子どもの場合で，映像的様式が強いのであれば，



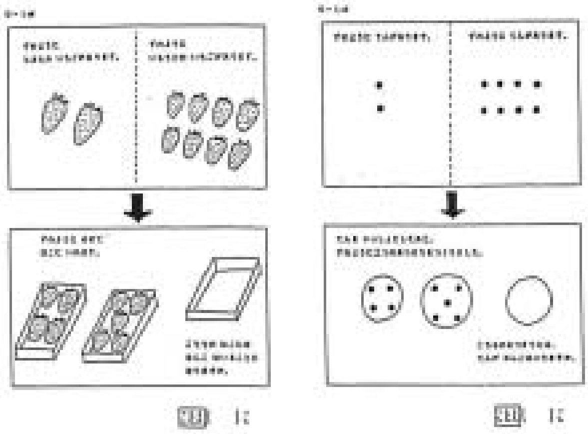
と，解くであろう。

ここで，Bruner の認知様式論に従った場合とスタンダーズやMiCプログラムの場合とでは問題の提示の仕方に大きな差異はない，と言われるかも知れない。しかし，これらの問題の提示の仕方には大きな違いがある。すなわち，スタンダーズやMiCプログラムの問題は子どもにとって身近な現実世界の文脈の中で提示されており，このことが現代化の場合と決定的に異なる。現実世界の文脈の中で数学を学習することが子どもの理解を促すと見なされている。

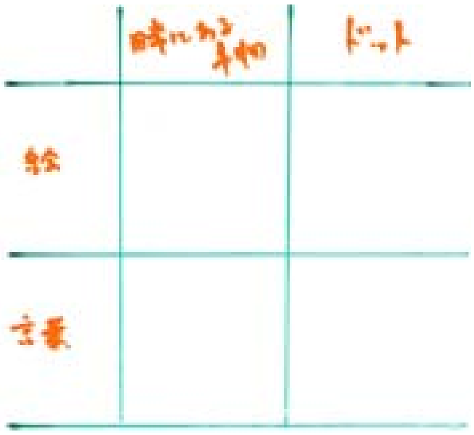
なぜ，現実世界の文脈が数学学習において理解を促すと見なされるのか。実は，このことはそれ程明確には基礎づけられていないと考えている。認知理論などから現実世界の文脈が理解に影響を及ぼすことは言われているし，私もそのような立場であるけれども，実は簡単に割り切ることができるような問題ではない。

これから私の研究(Takahashi, et al., 1993)における知見を紹介しながら，その理由を述べる。Takahashi, et al.(1993) は，小学校２，３，４年生を対象として，数量に関する問題で用いる数や文脈を，子どもにとって親しみのある日常にある事物かドット，および絵か言葉，の組みで表して，彼らの理解

を調べた。これが調査問題例である。



研究方法としては分散分析法を用いた。これは，分析にあたっての設計図のうちの一つである。



考え	場面	学年 2	学年 3	学年 4
絵	日常にある事物	10.07	7.27	8.98
絵	ドット	9.63 **	7.19	8.96
言葉	日常にある事物	9.62	6.42 *	8.68
言葉	ドット	8.92 **	6.03 **	8.43 *

** 1%水準で有意，* 5%水準で有意

分析の結果は幾つかあるが，注目すべき場合として，上の表に示したように，数を日常にある事物の絵で表した場合とドットで表した場合とでは，日常にある事物の場合の方がドットの場合よりも得点が高く，有意差がある。この有意差は，小学校３年生，４年生ではなくなっている，少なくとも分析結果からは読み取れなくなっている。

数量に関する問題を言葉で表した場合にしても，日常にある事物の文脈で表した場合とドットの場合とでは，２年生，３年生，４年生とも日常にある事物の場合の得点が高く，有意差があるが，しかし，２年生，３年生では１％水準で有意である。他方で，４年生では５％水準で有意であるにすぎない。数量に関する問題に用いる数や文脈を，数字や言葉で表した場合，４年生以降になると日常の事物による文脈の影響が小さくなっている。

すなわち，小学校４，５年生になると，少なくとも数量に関する問題について言えば，問題解決において日常にある事物の文脈の影響はなくなる。加えて，実は，絵を用いて表した場合と言葉の場合との有意差も３年生以降ではなくなっている。このことから，直裁的に結論付けるとすれば，子どもの個人差はあるにしても大凡は小学校４，５年生以降では数学の授業を日常から遊離した言葉を用いて形式的に行っても差し支えないことになる。

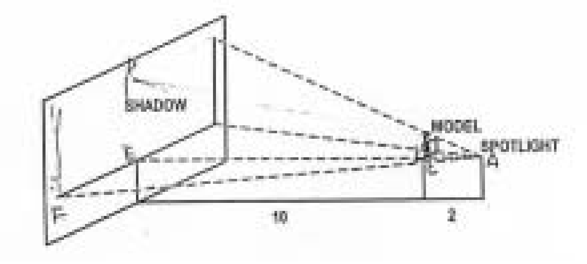
しかし，私の研究の結果はこのような直裁的な読み取りで結論付けられるものではない。有意差がなくなったのか，それとも見えなくなったのか，そこが問題点なのである。このことは大きな違いである。もしも，有意差がなくなったのであるとすれば，実際，統計上なくなっていることは事実であるから，スタンダーズやMiCプロジェクトの立場とは正反対の立場，文脈を無視した立場を支持しなくてはならない。しかし，私は有意差がなくなったのではなく見えなくなったに過ぎないと考え，そのような立場で研究を進行させている。何れにしても，私の研究は数学教育においてこのような位置にあるのであり，またスタンダーズ，MiCプロジェクトの立場は，現代化におけるBruner(1960)の理論を越えたものであると考えている。話しがかなり外れてしまった。次にRomberg(1996)の言うカリキュラム構

成の原理３を述べる。

原理３は，数学的領域の主要な特徴が問題場面において自然に生じたときに，子どもがそのような数学的特徴に出会えるようにすべき，ということである。子どもは数学的特徴を利用することによって学習を進めることになる。

さらに，カリキュラムが統合されていることが，理解が促される条件となる。このとき，子どもがさらされる問題場面は，例えば数学史に関連するかも知れないし，他の数学的領域と関係しているかも知れない。

例えば，MiCプロジェクトの教科書にこのような問題場面がある。



この問題場面には様々な数学的特徴が隠されている。この問題場面の小問として，次のa,b,c,d が設けられている。

映画の初期の頃：映画撮影の初期の頃には特殊効果担当の人々は今日的な洗練された技術はもっておりませんでした。動きのある人影を撮影するために，彼らは厚紙で作った人影のひな型と，壁に影を落とすための照明とを使用しなければなりませんでした。

a) 人影の面積を求めるためにひな型の面積に何を掛けなければならないですか？ 説明しなさい。注意：この一連の問題は，ひな型と照明とを用いて実験すれは，より一層簡単です。

b) 照明からひな型を取り付ける衝立(壁と平行)までの距離が２メートルで，衝立から壁までの距離が10メートルです。人影の高さは３メートルでなければなりません。ひな型をどれくらいの高さにしなければなりませんか。

c) 人影を壁に沿って時速６キロメートルで動かさなければなりません(人間が歩く速さで)。特殊効果担当の人がひな型を動かすことによってこのことを行います。ひな型を動かす速さを求めなさい。

d) ひな型を動かすことが人影の面積に影響を及ぼしますか。

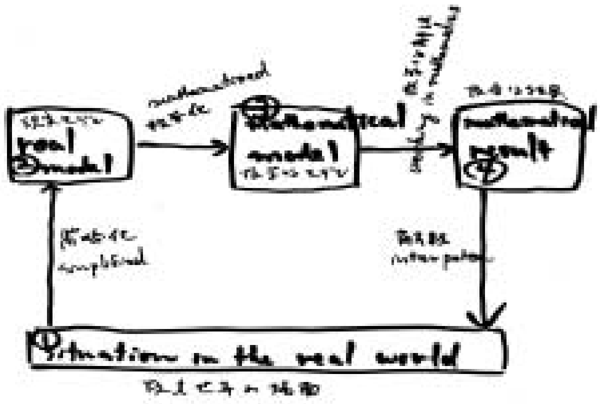
それでは，この小問を解いてみて下さい。

小問 a,b,c,d で問われる知識は，映画の撮影の際に必要な知識である。a，b では照明と衝立，壁とひな型との距離から人影の大きさを導きだすことになる。映画を撮影する以前にひな型を作り，照明と衝立と壁との間の距離を投影した際に適切な大きさになるように設置しなければならないからである。c は，ひな型を壁と平行に動かしたときの人影の実際の速度を求める場合であり，人影が移動するシーンの撮影にあたって必要な知識である。d は，ひな型を壁に平行に動かした場合に面積が変化するとすれば，人影が真横に移動するシーンなどでは何らかの工夫をしなければならないので，知っていなければならない。

小問 a,b,c,d は，何れも図形の相似に関する問題であるが，ｃは速度の問題，ｄは保存の問題などの他の数学的領域と関連している。

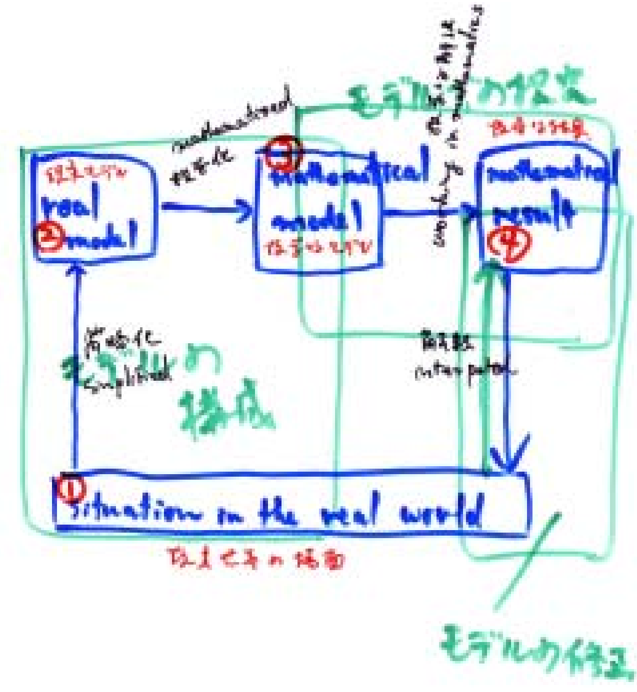
原理４は，各々の単元での活動が，子どもの理解を促すものでなければならないということである。ここで活動とは次の五つを子どもに行わせることである。即ち，関係を構成すること，数学的知識を拡張し応用すること，数学的経験について反省すること，自分の知っていることを伝えること，数学的知識を自分の固有のものとすることである。このような，理解に至るための活動を促し得る五つの要因がある。一つ目は数学的モデリングである。Houston(1997)を参考とすれば，数学的モデリングとは，現実世界から出発し，現実世界を数学によって考察し，数学そのものとして展開し，再び現実世界に戻る過程である。すなわち，数学的モデリングとは次の①から④の順で行い再び①に戻るというサイクルである。

①数学外の現実世界における状況
②現実モデル
③数学的モデル
④数学的結果



①から②に至る過程は簡略化，②から③に至る過程は数学化，③から④に至る過程は数学的解決，④から①に戻る過程は解釈である。

Romberg(1996)が言うには数学的モデリングは，モデルの構成，モデルでの探求，モデルの修正と見ることができる。このことをこの図にあてはめてみると，次のようになる。



二つ目は議論である。議論とは我が国の場合だと練り合いないしは練り上げに相当する。子どもは議論を通して一般化を促進し得る。これは，MiCプロジェクトでの授業の流れをReeuwijk(1995)が図化したものである。

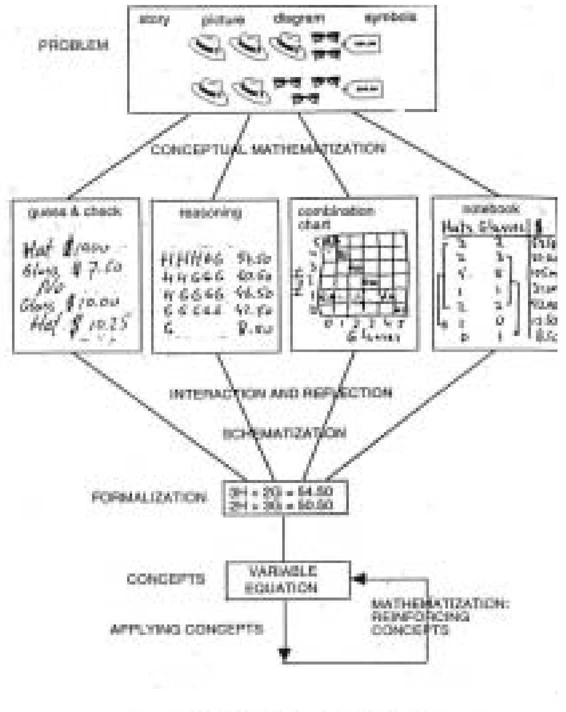


Figure 6. Structure of Comparing Quantities.

我が国の練り合いや練り上げのある授業とそれ程変わらないことにお気きと思います。

三つ目はテクノロジー利用である。スタンダーズやMiCプロジェクトでは計算技能や公式の暗記などではなく，数学的概念あるいは広い意味での数学的知識の学習を中心にしている。そのような概念ないし知識に至る道具としてテクノロジーは有効である。グラフ電卓，パーソナルコンピュータを利用して繰り返しのある計算や手書きでは時間のかかる関数のグラフを描き，数学的概念や数学的知識に触れることができる。

四つ目は平等性である。この見方は数学が個人が各々勝手に行う真理の探求というよりも，社会的文脈の中で互いが係わり合いながら発展するものであること，数学の本性が共同体的にすべての人々の参加により規定されることを示唆する。つまり，この見方は，数学が人間誰もが共同して作り上げることができる社会的構成物であり，人間誰もが数学を作り上げる社会に参加する権利をもつということを示す。数学を行うことは強制ではなく，正に権利なのである。ここでも"mathematics for all"の理念が貫かれている。

最後は評価である。教師，学校，および保護者は，理解を高める授業実践が，実際，子どもの学力を進歩させるかどうかを知り，その後の実践，カリキュラムの修正を行う必要がある。そのことを考えれば，五つの要因の中に評価が入るのは当然であろう。

原理の５はカリキュラムの単元を常にプロブレマティックなもの，問題を含んだ場面，として考えるべきである，ということである。すべてのカリキュラムの配列を，その単元の学習にあたって子どもがどのような知識をもっているかを考慮し，さらに子どもが単元で学習してきたことなどを指導上の文脈に照らして採用し調整する必要がある。計画したことと実行することとの間に相違があってもよい。実際に何が起こるかは各々の学級によって異なる。

我々はカリキュラムの有効性を証明するために子どもを犠牲にするようなことがあってはならない。カリキュラムはあくまで子どものために利用すべきものである，ということになる。

おわりに，スタンダーズ，MiCプロジェクトが我が国の実践における研究に有用な示唆を与えることを述べる。

６．おわりに：スタンダーズ，MiCプロジェクト，および我が国の実践における研究

これまで紹介してきたカリキュラム構成原理は，国家あるいは地区においてのみ有用なものなのではない。学校においても充分に有用である。特に，我が国の実践における，研究協議会を伴うような研究，ここでは学校研究と言うことにする，はカリキュラム開発研究の性格をもつことから，スタンダーズやMiCプロジェクトのような広範囲なカリキュラム開発研究からであってもアイデアを得ることができると考える。

学校研究がカリキュラム開発研究の性格をもつ，と述べたが，これからその理由を示す。数学教育の現代化における成功的なカリキュラムと言われる英国SMP(School Mathematics Project)に係わっていたHowson et al.(1988)によれば，カリキュラム開発は次の六段階を経る。

1)Identification:カリキュラム改革の実現性，必要性の認識

2)Formulation:開発主体の決定と開発手続きの確定

3)Accept:改革を受け入れてもらうための関係方面に対する説得

4)Development:教科書，教材の開発，先導的試行，形成的評価にもとづく改訂，および総括的評価

5)Dissemination(普及):新カリキュラム普及のための説明会，講演会の開催

6)Implementation:履行(施行)と新しく生じた問題への対処，その伝達

これら1)から6)までを，これまで述べてきたスタンダーズの場合も踏襲している。1)についてはスタンダーズの社会的背景，理念として述べた。2)についてはNCTMが開発主体であり，また開発手続きを論じたRomberg(1993)の論文もある。3)については当然行われているであろう。4)についてはこの講演の中でも教材例を幾つか紹介してきた。5)についてはRomberg(1996)の講演が正にその役割を果たしている。6)については，現在進行中ということであろう。

実は，我が国の学校研究は上述の1)から6)を踏襲するのである。たとえ，外的な要請による学校研究であっても，1)，4)，5)，6)を行うであろう。

スタンダーズ，MiCプロジェクトを通して，米国の数学教育改革における社会的背景，理念，カリキュラム構成の原理を述べ，カリキュラム開発研究が我が国の学校研究を行う際に有益な資料を提示し得ることを示してきた。

米国の数学教育改革の社会的背景，工業の

時代から情報の時代への変化は，我が国においても共通するものである。"mathematics for all"というスタンダーズの理念は，我が国の事情を考えれば，共有しなければならない理念である。Apple(1992)によれば，数学教育の現代化の失敗は，理念の中途半端さ，教科の構造と子どもとの間の揺れ動き，にある。改革の成否は理念の強さ，すなわち"mathematics for all"の理念を貫きとおせるかどうかにかかっている。

スタンダーズやMiCプロジェクトにおける授業が我が国の算数の優れた授業に学んでいることを，話しの中で度々示唆することができたと考える。しかし，スタンダーズやMiCプロジェクトでは理念の創造から始めて，彼らの実践を支える基礎理論を誠実に踏襲している。我が国の各々の学校が"mathematics for all"という理念を共有しつつ，独自性の高い理念を創造し，その理念の基で学校研究を行い，数学教育改革を進めていけば，我が国のみならず世界の範となり得ると考えている。

最後は，何やらおおげさな締めくくりとなってしまいました。本日は，私の拙い話しを聞いていただき本当にありがとうございました。

文献

Apple, M. W. (1992). Do the standards go far enough? Power, policy, and practice in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23, 5*, 412-431.

Houston,S.K.,et al.(1997). Teaching & learning mathematical modelling. Coll House: Albion Oublishing.

Howson,A.G. & Kahane, J. P. eds.(1986). School mathematics in the 1990s. Cambridge: Cambridge University Press.(日本数学教育学会翻訳. (1988). 1990年代の数学教育. 聖文社.)

MiC. (1998). Building formulas. USA: Britannica.

文部省中央教育審議会(1996). 21世紀を展望した我が国の教育の在り方について. 文部省.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Reston,VA: Author.(能田伸彦，清水静海，吉川成夫監修.(1997)21世紀への学校数学の創造　米国NCTMによる「学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード」. 筑波出版会.)

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for school mathematics*. Reston,VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston,VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston,VA: Author.(筑波大学数学教育学研究室翻訳・監修. (2001). 新世紀をひらく学校数学ー学校数学のための原則とスタンダード. 筑波大学数学教育学研究室.)

Reeuwijk M. van. (1995). Students' knowledge of algebra. In Luciano Meira and David Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME conference Vol.1* (pp.135-150). Brazol: PME.

Romberg,T.A.(1996). Principles for a school mathematics curriculum for the 21st century. *Prepared for meeting of Japan Society of Mathematics Education, November 4.*

Takahashi,H. et al. (1993). Formats and situations for solving mathematical story problems. In Ichiei Hirabayashi and Nobuhiko Nohda et al. (Eds.) *Proceedings of the 17th PME Conference Vol.2* (pp.191-198). Tsukuba: PME.