上越数学教育研究, 第 21 号, 上越教育大学数学教室, 2006 年, pp.13-20.

数学的知識の実在性と知ること

高　橋　　等

算数・数学教育において算数や数学の本性がどの様なものであるかを論ずることは避けては通れない。算数や数学の見方，いわゆる数学観が学習活動の形態にまで影響を及ぼすし（湊＆浜田，1994），数学観そのものを算数・数学の学力の一側面と見なし得るからである。

数学観に係る論点は，数学の実在性に係る論点でもある。プラトン思想以来，数学の存在をイデアの世界のものと見る数学観は今もって強く，例えば最近話題となっている小説，博士の愛した数式(小川，2005)，では，数学がイデアの世界に存在し，発見すべき知識であるという設定となっている。この小説(小川，2005)では，語り手にとっては数学が人間の活動の所産であり親しみ得るものとしても扱われている。即ち数学が人間の存在に係わらず実在性をもつものと見なされながら，その実在性が語り手の認識活動に強く係わっている。

今日，算数・数学教育の幾つかの理論では，数学的知識を人間の活動の産物と見なし，子どもが自ら数学的知識を構成するものと論じている。それらの理論は，例えば構成主義，RME 理論，及び Lakoff(1993)， Lakoff ＆Johnson (1980)， Johnson(1987) および Lakoff ＆ Núñez(2000)の認知論などである。他方で，数学の存在論と関連する実在性を考察することは，依然として算数・数学教育における今日的な問題である。数学的知識が人間にとって外在的と見なされる場合は勿論，内在的と見なされる場合であっても心的に獲得された数学的知識が実在性をもつかどうか，もしもつとすればどのような様態かは，大きな関心事である。

本研究の目的は，算数・数学教育における数学的知識の実在性がどの様なものであるかに対する一つの見解を示すことである。

本研究では，最初に Polanyi(1958，1966)の理論を概観し，実在性について論ずる。次いで，認識論と関連した実在性の位置付けを行い，事例を考察する。

1．存在論的接近による Polanyi(1958，1966) のう知識の実在性

Polanyi(1958，1966)による実在性の捉えは，存在論的な方向からと認識論的な方向からとでなされている。存在論的な方向からとは，研究者の社会が維持する知識体系に着目することであり，認識論的な方向からとは知ることにおいて働く心的枠組みに着目することである。

Polanyi(1958，1966)は，普遍的で静的，客観的な知識の存在はあり得ず，知識体系は研究者間の鎖状の繋がりが支えているものと見なしている。人間世界から超越した知識体系は存在せず，個々の研究者のもつ知識が互いに関連し，研究者の社会全体によって知識体系が維持されていると Polanyi(1958，1966)は言うのである。一人の研究者が特定の知識体系のすべてを語ることは難しく，研究領域の近い者同士が互いの知識の幾らかを共有し，鎖状に結びつく

ことによって，全体として知識体系を支えていることは，容易に想像できる。

Polanyi(1958，1966)の言うとおりに知識体系が研究者の社会において維持されるとすれば，知識体系の実在性もまた，研究者の社会の中にあり，維持されている。個々の研究者にとって知識は断片的なものであったとしても，研究者が鎖状に結び付くことによって，大きな知識体系が出現し，知識体系の実在性がこの社会によって支えられるのである。Polanyi(1958, 1966)の理論では知識体系の実在性が，研究者達の社会によって活動的に維持され，その社会への参加者である個人によって維持されることになる。

研究者の社会を支える個々の研究者の知識には暗黙性が含まれ，それ故に知識体系もまた暗黙性を含む。個々の研究者がもっているこの暗黙性の働きによって，全体としての知識体系は活動的になる。この活動は暗黙性に含まれる信念や知的情熱によって促されるものである。

２．認識論的接近による Polanyi(1958, 1966)の言う知識の実在性

知識の実在性が研究者の社会における鎖状の結び付きの中にあるとして，Polanyi (1958, 1966)は認識論的な方向から実在性を捉えてもいる。Polanyi(1958)は，知ることは概念枠組みの働きによるとし，次のように述べている。

･･･― whether tacit or articulate ― we rely jointly on two faculties, namely (1) on the power of our conceptual framework, based on reality, to assimilate new experiences and (2) on our capacity to adapt this framework in the very act of applying it, so that it may increase its hold on reality.(Polanyi，1958, p.317)

訳出すると次になる。

･･･― 暗黙的であれ分画的であれ ―我々は二つの能力に連動的に依存する, 即ち(1)実在性に基づいて，新しい経験を同化するための概念枠組みの力であり, (2)実在性に関してその把持を増大させるように，正にそれを適応させる行為においてこの枠組みを調節する能力である。

Polanyi(1958)が言う概念枠組みは，暗黙的にも分画的にも同化と調節という働きをする。知ることにおけるこの働きは暗黙性を伴うため，知ることの結果としての個人のもつ知識を暗黙性が支えることになる。同化と調節とは，周知の通り, Piaget(例えば Piaget,1960, 1967, 1974)が示したシェマの働きである。しかし，Piaget(例えば Piaget, 1960，1967，1974)では Polanyi (1958，1966)が言うように暗黙的にシェマが働くとは論じていない。Polanyi(1958, 1966) が暗黙性の働きに着目したことに Piaget(例えば Piaget, 1960，1967，1974)の立場との決定的な違いがある。

Polanyi(1958，1966)はこの同化と調節という働きにおいて実在性という視点を持ち出している。この実在性は Polanyi(1958，1966)では同化と調節における基準となっている。数学的知識に関しては，その知識体系が研究者の社会において共同で支えられ，実在性をなしている。この実在性は研究者の社会において維持されている知識体系の実在性であると同時に，個々の研究者が知ることにおいて内在させている実在性でもある。

３．心的構成物としての数学的構造

Polanyi(1958，1966)の言う暗黙性は身体性を鍵として含む。Polanyi(1958，1966)は詳記不能のもの，暗黙性をもつものとして論の初期に手のひらの感覚などが暗黙的に働いていることを取り上げている。さらに, Polanyi(1958, 1966)は技能を取り上げ，形式的な知識と技能とが不分離であることを示している。技能は身体性に由来する。知識には暗黙性が感覚を伴う

技能的性格として含まれているのである。

身体性が知ることに用いられていることは，具体物を動かすこととして Piaget（1960，1967，1974)の論からも読み取れる。数の発達(Piaget,1974)あるいは量の発達(Piaget，1967)の調査では，子どもは具体物を手で扱う機会をもつのであり，身体性を駆使している。Piaget(1967,1974)は子どもと会話をしつつ,具体物を扱う活動の中に群性体の発達を見出す。子どもが構成する知識は数学的構造を反映するものの，具体的操作段階では子どもの操作の表象には具体物が相当する。

Polanyi(1958，1966)の立場に立てば，Piaget(1967，1974)の実験による具体物の扱いは手による技能的性格に支えられているが故に，心的に構成した数学的構造に身体性を通して暗黙性が介入している。数学的構造を心的に構成させることを目指した Bruner(1963)や Dienes(1977)とによる理論と実験とに対しても，同様の見地から考察できる。Bruner(1963)は，どの教科でも，知的性格をそのままにたもって，発達のどの段階のどの子どもにも効果的に教えることができるという仮説からはじめることにしよう，と言い，数学などの教科の構造を保ったまま表象を子どもに適したものに変えることによって，教科の構造と同様の構造を子どもが心的に構成できるとしたのである。

Dienes(1977)は小学生程の年齢の子どもに，ブロックや天秤，色板などの教具を用いて活動的表象を通して数学的構造を心的に構成させようと実験した。Dienes (1977)による実験の一つを取り上げる。教材はベクトル空間の部分空間，教具は向きや形状の逆転により正と逆とを区別できるカップなどの具体物，学習者は公立学校４年生６名(男３名，女３名)である。Dienes(1977)は，上向きのカップ，下向きのカップ，閉じた箱，および開いた箱とを組み合わせ，火のついたマッチ棒か火の消えたマッチ棒かの何れかに至ることを子どもに求める。予め，上向きのカップと閉じた箱とに火のついたマッチ棒を，下向きのカップと開いた箱とに火の消えたマッチ棒を対応させることを子どもに知らせる。この活動には互いに逆向きのカップが打ち消し合い，開いた箱と閉じた箱とが打ち消し合うというルールを作っておく。子どもは複数の，向きが異なるカップや形状が対となる箱を加法的，乗法的に操作し，その結果を数本の火のついたマッチ棒か消えたマッチ棒かに帰結させることで，方向をもたせたカップと箱とにより部分空間を構成する。学習者は活動的表象によりベクトル空間の部分空間という数学的構造を構成するのである。

Dienes(1977)が設定した学習は活動を通して数学を心的に構成させるものである。学習は実験者が予め設定した表象での数学的構造を子どもが心的に構成していく過程である。この過程において教材の数学的構造と同じ構造を，子どもは心的枠組みにおいても構成するに至る。

Piaget(1960，1967，1974)による群性体や束－群構造を取り上げよう。Piaget （1960)は具体的操作における心的枠組みとして群性体を，形式的操作の場合には束－群構造を取り上げた。群性体や束－群構造とは同化と調節といったシェマによる一連の均衡化過程のなかで比較的安定した，しかも柔軟に次の均衡化を待っている心的枠組みである(Piaget,1960)。Piaget(1960)によれば群性体や束－群構造は群と束との性質から成り，代数学に基づく数学的構造を心的に構成することが，いわゆる認識をすることなのである。

心的構成物としての数学的構造はシェマの働きにより構成されるものである。Polanyi(1958)による知ることでは，暗黙的にでも分画的にでも概念枠組みにおける同化と調節とが行われ，その際の基準が内在的であれ外在的であれ実在性にある。Polanyi(1958，1966)の知識を一元論的に見なし，心的枠組みの働きが実在性を基準とするという視点から見れば，心的に構成された数学的構造は実在性

をもつ。この実在性は数学的知識を存在論的方向から論じると同時に，認識論的方向から論じた場合の実在性である。

４．数学的構造を捉える視点の転回

Dienes(1977)が設定した学習は数学的構造を心的に構成させることを目指したものであった。Piaget(1960)の理論も大筋では彼らの理論に矛盾しない。ところが，数学的構造を彼らの理論とは異なる視点から捉え直した理論がある。Lakoff(1993)，Lakoff ＆Johnson(1980)，Johnson(1987)および Lakoff ＆Núñez(2000)は，あらゆる概念は身体性に基づく構成物であり，数学的知識であっても人間固有の身体性を基底として構成していることを理論研究と豊富な事例研究とから明らかとした。

Lakoff(1993)，Lakoff ＆Johnson （1980)，Johnson(1987)および Lakoff ＆Núñez(2000)における身体性は空間認知の経験によって構成された心的枠組みであるイメージ・スキーマの基礎となる。Lakoff （1993)，Lakoff ＆ Johnson （1980)，Johnson （1987)および Lakoff ＆Núñez (2000)によれば数学的知識の構成はイメージ・スキーマの構造に基づく隠喩による。隠喩とは，起点領域から目標領域に向かう射影であり，イメージ・スキーマという原初的な心的枠組みが起点領域と目標領域とに共通の構造を与えるのである。例えば，境界と内部，外部という位置関係からなる容器のイメージ・スキーマは容器と物体との位置関係がイメージ・スキーマとなったもので，数学的に図示すれば集合と要素とを表すベン図に相当し，集合の考えの土台となる。

Lakoff(1993)，Lakoff ＆Johnson （1980)，Johnson(1987)および Lakoff ＆Núñez(2000)は知識の実在性を論ぜず，イメージ・スキーマが数学を構成する基底をなすとする。心的に構成される数学的知識の基準を既成の数学的知識の体系にとるか否かという点で違いはあっても，数学的知識を心的構成物としてのみ捉えるという点では Piaget（1960,1967,1974)，Bruner （1966)あるいは Dienes(1977)も同様である。彼らは Polanyi(1958，1966)が研究者達の社会を取り上げて論じたようには数学的知識の体系の実在性を明言してはいない。専ら，人間の認知を対象とし論じている。何れにしても数学的知識の実在性と言うからには，その体系に代わる，我々にとっての何らかの共通性が含まれていなければならない。Lakoff(1993)，Lakoff ＆Johnson （1980)，Johnson(1987)および Lakoff ＆Núñez(2000)の理論では，人間にとっての共通性は身体性にある。身体性は人間にとって固有であると同時に共通の特長をもつ。三次元空間における経験を通し，我々は身体性に基づくイメージ・スキーマを構成し，イメージ・スキーマが数学に構造を与える。数学に構造を与えるイメージ・スキーマが数学の実在性となるのである。

５．事例に見る身体性と数学の実在性

5.1 大学生の事例

次のプロトコルは 1995 年２月に関東にある大学の理系に所属する１年生が述べた部分で，正の数，負の数の計算について尋ねたところからの会話である。この学生をＧと呼ぶ。Ｉ は聞き手で，本研究の研究者である。ＧやＩの前にある番号はプロトコルの番号である。

1001Ｉ：例えば，マイナスとマイナスをかけるとプラスになっちゃうじゃない。それはどうなの，いいの？

1002Ｇ：んん，僕はいいんですよね，なんでかっていうと美しいから。マイナスかけるマイナスでマイナスにした場合は，世の中どんどんマイナスっぽくなってきますよね。プラスかけるマイナスがマイナスだってのは実に素直に分かると，プラスかけるプラスがプラスになるのは当たり前と，もしマイナスかけるマイナスがマイナスだとしたら，プラスが一に対してマイナスが三だから世の中どん

どんマイナスに行きますよ。それは不安定だと。しょうがないからマイナスかけるマイナスをプラスにするのはごく当たり前の措置じゃないですかって。もう，なんか，イメージ以前にそういう感じで捉えてますよね。でなきゃ釣り合いがとれないじゃないですかと。

1003Ｉ：釣り合いねえ。

1004Ｇ：だから，０から始まって，プラス無限大になるってのも僕は最初，大分疑問に思ってて，どうも釣り合いがとれないな，気持ち悪いなあと思ってたんですよね，直観的に。だから，マイナスが出てきたときにやっぱりそうかっていう感じです，殆ど。

1005Ｉ：釣り合い。

1006Ｇ：んん，天秤座ですから。釣り合い大事にします。

1007Ｉ：そうかあ。んん，やっぱりあれかね。０とか１はどう思う？　じゃあ。数の中でも結構特殊じゃないの？

1008Ｇ：前，かなり特殊に考えてましたね，あれ。

1009Ｉ：ん，どんなことが頭に浮かぶ？

1010Ｇ：んん，だから，あの，それ中学のときだけど，対称性っていうもんに気付いちゃって，こって，で，０を中心としてプラスとマイナスが対称だって人はだいたい分かんだと，世の中みんな受け入れてくれるんだと。僕がその頃言ってたのは，１を中心として０から１までと，１から無限大までが対称なんだと，て言ったんですよ。であの，今，思い出せませんけど，これはまあ，言ってしまえば，もう，点の濃度が同じだってことに行き着きます。ただ，あの，そういうふうに言わないで，どうやるかっつと，あの，幾何学ですよね。要するに，対応がつくっていうことですけど結局は。それで僕は全然，あの１を中心として，０と１と１から無限大は対称だってことを言ってたんですよ。で，数学の先生は，実に素直に認める，と。友達は認めない，と。だからだって範囲が全然違うだろって。

上記プロトコルの1001から1006は正の数，負の数の乗法に係る話題である。Ｇはマイナスかけるマイナスがプラスになる理由として，美しいから(1002)，と述べている。この美しさは，Ｇによれば正の数と負の数との乗法による結果が正の数になるのが二つ，負の数になるのが二つになるから生ずる。Ｇはこの結果がプラスが一つでマイナスが三つになれば，世の中どんどんマイナスにいきますよ，それは不安定だと，と述べ，釣り合いをとることを強調している。この，釣り合い，という言葉を聞き手のＩが反復したこともあって，Ｇは無限大について述べていく。Ｇが言うには，正の無限大を学んだときに，負の無限大がないと，気持ちが悪い，のである。Ｇは，負の無限大の存在を予期していたことも示唆している。Ｇは自分が天秤座であることを，釣り合い，を大事にする理由として述べてもいる。

０や１について，どう思うか，と尋ねたとき，Ｇは０を中心としてプラスとマイナスが対称であることを取り上げ，この対称性を，世の中が受け入れてくれる，と述べている。さらに，濃度について，１を中心として０から１までと１から無限大までが対称である，と述べている。

この事例において，Ｇのもつ数学的知識が数学的構造ではなく，身体性に基くことが解釈できる。Ｇにとって負の数と負の数をかけると正の数になることは，計算の結果が正の数と負の数の場合が同じになって釣り合いがとれるからである。この数学的知識は方向や存在(高橋，1995)のイメージ・スキーマに支えられている。これらのイメージ・スキーマは Lakoff(1993)が示した数学を支える幾つかのイメージ・スキーマにあり，高橋(1995)が数直線を用いた正の数，負の数の計算を支えるイメージ・スキーマとして論じたものである。高橋(1995)はまた，複数のイメージ・スキーマの働きを解釈した際

にも主だった働きをもつとしてこれらのイメージ・スキーマを取り上げた。もっとも，G は数直線は用いておらず，計算の結果をプラスとマイナスとして二ずつとなるようにすることでもって釣り合いがとれる，としている。

方向や存在のイメージ・スキーマは正の数，負の数の計算における関係を G にとって実在性のあるものとして支えている。この実在性により身体性に基くイメージ・スキーマが G にとって実感のあるものとして確かな数学的知識を創っているのである。負の数かける負の数が正の数になることを代数学的に証明しなくとも，身体性に基づくイメージ・スキーマが数学的知識を支えることに十分に威力をもつのである。

この方向や存在のイメージ・スキーマは G が実感としてもつ審美性とも関連する。審美性とは概して数学的構造の美しさをもって言うのかも知れないけれども，身体性に基く単純なイメージ・スキーマをもっても感じ得るものである。

さて，方向や存在のイメージ・スキーマは正の数，負の数の乗法のみでなく，G にとっては幾つかの数学的知識を支えるものとなっている。一つは，0 を中心として数直線上で正の数と負の数とが対称になっていること，もう一つは 1 を中心として 0 から 1 までと 1 から無限大までとが対称であることである。0 を中心とした数直線は人間が左右の腕を地面と平行に広げた場合にも似て，身体性が反映するものである。G はまた，1 を中心とした 0 から 1 までと，1 から無限大とをも対称であると見なしている。

5.2 中学生の事例

次は 1995 年 9 月に中学一年生へのインタビューの一部であり，正の数，負の数の乗法について尋ねたところである。この中学生を J と呼ぶ。

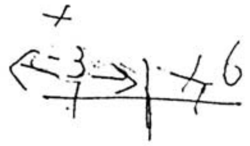

図 1　正の数，負の数の乗法の説明のために J の描いた図

2001I：どう，どうだったの？

2002J：(数直線を描きながら)数直線で，マイナス 3 がマイナス 2 あれば，マイナス 3 がプラスあれば，こっち(数直線の 0 を中心として左)に行くだろうけど，マイナス 3 がマイナス 2 あるんだから，こっち(数直線の 0 を中心として左)の反対になる。なって，こっち(数直線の 0 を中心として右)に来て，プラスになるんだよっていうふうに教えてもらって納得しました。

2003I：納得した。よくわかった。本当に？

2004J：うん。数直線でやって，マイナスかけるマイナスは，うん，こっち(数直線の 0 を中心として右)にくるって言われたら，マイナスかけるプラスだったらこっち(数直線の 0 を中心として左)にくるけど，マイナスかけるマイナスはこっち(数直線の 0 を中心として右)にくるんだなっつうふうに言ったら，うん，そういうふうになるんだって言ったら，それでわかりました。

この場面で J は正の数，負の数の乗法を数直線上で説明している。$-3\times(-2)$の計算を，マイナス 3 は左方向で，そのマイナス 3 にマイナス 2 をかけると，方向が逆になって右方向であるプラスに転ずると J は説明するのである。

この説明の過程は幾つかのイメージ・スキーマに支えられている。数直線は，方向や存在のイメージ・スキーマが主には土台となる。その他にも幾つかのイメージ・スキーマが関連し合い，正の数，負の数の乗法についての実在性を支えている。さらに言うのであれば，イメー

ジ・スキーマが実在性そのものとなっている。

数学的構造というものを重要視するのであれば，負の数と負の数との乗法は代数学的に，環の考えをもとに扱われることになる。環の考えによって説明する負の数と負の数との乗法もまた，幾つかのイメージ・スキーマが土台となっている。ただし，環の考えからの説明は数直線を用いた説明より難しい(高橋，印刷中)。この難しさの背景には，複数のイメージ・スキーマ同士の関連の複雑さがあるのだろう。

実在性について言えば，数直線を支える主要なイメージ・スキーマである存在や方向のイメージ・スキーマは，認識論的な見方をすれば，正の数・負の数の計算の知識に実在性を与える。この実在性は大学生の場合も中学生の場合も同様に，子どもに確かな数学的知識を獲得させる。勿論，数直線を利用した説明は数学的には正しいとはいえない。複数の数学的知識にわたって強く影響を与える存在や方向のイメージ・スキーマが鍵となっているのである。

存在論的な接近をすれば，Polanyi (1958,1966)の言う研究者の社会の鎖状の結び付きは，イメージ・スキーマによって補強されている。このイメージ・スキーマは人類に共通な身体性に基くものであり，集団のなかで共有されている。しかし，この中学生Jの事例に示されるように，正の数，負の数の計算を数直線を用いて行える一方で，代数的な考えに拠っては行うことができないことを考慮すれば，集団のなかで皆，同一のイメージ・スキーマを用いているとは限らず，イメージ・スキーマの形成と働きには，学習や発達などの他の要因が係わっているのだろう。

認識論的な接近をすれば，人間に内在する幾つかのイメージ・スキーマが方向や存在のイメージ・スキーマと関連して数学の実在性をもたらしている。この実在性は身体性を基に心的に構成されたイメージ・スキーマ同士の関係がもたらすものである。例えば，数直線上で０を中心として右方向と左方向に各々正の無限大と負の無限大を考えることには，方向や存在のイメージ・スキーマの他に，Lakoff(1993)で示されているような，運動の道筋のイメージ・スキーマ，連結のイメージ・スキーマなどが関連している。数学が身体性に基づいて心的に構成されたイメージ・スキーマ同士の関連が数学の実在性をもたらし，さらに審美性や実感をももたらす。

６．結語

本研究の目的は，算数・数学教育における数学的知識の実在性がどの様なものであるかに対する一つの見解を示すことであった。最初にPolanyi(1958，1966)の理論を鍵として存在論的な見地からと認識論的な見地とから実在性とは如何なるものかを論じた。次いで，心的に構成した数学的構造と身体性を基に数学的知識の実在性の有り様を述べた。最後に，事例の解釈と考察とを行い，数学的知識の実在性の実際を論じた。

本研究の結果，Polanyi(1958, 1966)が知識の実在性を研究者達の社会が創る知識体系と個人の知識との双方に見出したことを示した。さらに，身体性に着目することにより，Lakoff(1993)，Lakoff ＆Johnson (1980)，Johnson(1987)および Lakoff ＆Núñez(2000)の言うイメージ・スキーマが数学的知識の実在性をもつと論じた。正の数，負の数の計算を説明する大学生と中学生の事例をとりあげ，イメージ・スキーマが正の数，負の数の釣り合いや数直線を利用した解決の土台となり，実在性と言い得るものになることを解釈，考察した。

さて，Polanyi(1958，1966)の研究者の社会を捉える視点は我が国の授業を捉える際の視点を提供することに触れておくことにする。授業の対象となる学級を研究者の社会として見なした場合，学級は数学的知識に関して子どもたちが知識が近い者同士で鎖状に結び付いていると見なすことができはしないか。授業における子どもの知識の様態は，一人ひとりで異な

ったりするものである。子どもが獲得する知識は授業で扱った教材を視点としたとしても差異のあるものである。数学観や情意などを含む様々な視点から見たとしても子どものもつ知識は極めて個性的である。我が国の授業において学級の子どもたちが一旦同意したとしても，その同意がそのままに維持されることは考えにくい。授業では教師の活動が子どもたちに強く影響を及ぼすことを考慮したとしても，学級が子どもたちが鎖状に結び付いている集団であると見ることは一つの視点になる。

文献

Bruner,J.S.，鈴木祥蔵＆佐藤三郎訳(1963).教育の過程．岩波．

Dienes,Z.P.，沢村昂一訳(1977)．算数・数学学習の実験的研究.新数社.

Johnson,M.（1987）. *The Body in the Mind*. Chicago: The University Chicago press.

Lakoff,G.，池上嘉彦＆河上誓作他訳（1993）. 認知意味論．紀伊國屋書店.

Lakoff,G. & Núñez,R. (2000). *Where Mathematics Comes From How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books: New York.

Lakoff,G.& Johnson,M. (1980). *Metaphors we live by*. The University Chicago Press, Chicago and London.

湊三郎＆浜田真(1994).プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するかー数学観と数学カリキュラム論との接点の存在ー．日本数学教育学会誌，76，３，2－8.

小川洋子(2005)．博士の愛した数式．新潮社.

Piaget,J.，波多野完治&滝沢武久訳(1960).知能の心理学.みすず書房.

Piaget,J. 滝沢武久他訳(1967).量の発達心理学. 国土社.

Piaget,J. 遠山啓他訳(1974)．数の発達心理学. 国土社.

Polanyi，M.（1958）. *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago: The University Chicago press.

Polanyi，M.（1966）. *The tacit dimension*. Gloucester: Peter Smith Pub.

高橋等(1965)．算数，数学に関する子どもの持つ比喩の様相．第 28 回数学教育論文発表会論文集．155－160.

高橋等（1996)．数学的知識の獲得を促す比喩の役割．筑波大学教育学研究科，中間論文.

高橋等（印刷中)．数学的知識の比喩性に着目した算数・数学学習への接近．能田伸彦，清水静海&礒田正美(編)，算数・数学教育の新世紀，東洋館.