上越教育大学研究紀要　第18巻　第1号　平成10年9月
Bull. Joetsu Univ. Educ., Vol. 18, No. 1, Sept. 1998

中学校数学における確率概念の指導

菅　岡　强　司*

(平成10年4月30日受理)

要　　旨

中学校数学における確率概念の指導に関して，とりわけ確率の意味の指導に関して，主として教材の側面から考察した。まず日本の中学校における確率概念の教科内容を，現行の学習指導要領などから抽出した。そのうえで，そのような教科内容を指導するにあたって，どのようなことが問題になるのかを，確率の推論・判断に関する心理学的研究，および，日本の中学生を対象とした調査研究などから検討した。その結果，確率は，他の数学とは異なる，独特の教えにくさ・学びにくさをもっていること；確率を教えるためには，生徒のもっている誤った概念を考慮に入れて，適切な直観を発達させたり，新しい直観をつくらせたりしなければならないこと；確率未習の日本の中学生は大数の法則に関しても誤った確率概念をもっており，実験を取り入れた授業が必要であることなどが明らかになった。そこで，現在の中学校数学の教科書における確率概念の扱い方を分析した結果，教材面からみても叙述があまりに簡潔で，指導時数が少なく，実験が重要視されていないこと，などが明らかになった。

KEY WORDS

Lower Secondary Mathematics	中学校数学	Probability	確率
Intuition	直観	Misconception	誤概念
Experiment	実験	Textbook	教科書

1　は　じ　め　に

本稿では，中学校の数学において確率概念の指導がどのようにおこなわれているか，どのようにおこなわれなければならないか，を教材面から明らかにすることを目的とする。

そこで，まず日本の中学校では，確率概念の教科内容はどのようなものかを，現行の学習指導要領および文部省の指導書から洗い出すことにする。

次に，そのような教科内容を指導するにあたって，どのようなことが問題になるのかを検討する。とくに確率の推論・判断に関する心理学的研究から問題点を抽出する。また，中学校の確率概念に直接かかわる調査研究等を検討し，他の問題点を明らかにする。

その結果をふまえて，現行の学習指導要領に基づく中学校数学の教科書において，確率概念がどのように扱われているかを分析し，教材面からみて今後の指導のあり方を検討する。

*　学校教育研究センター

2　中学校数学における確率概念の教科内容

従前の学習指導要領には，小学校第6学年の算数に「不確定の事象」という，ごく初歩的な確率にかかわる単元があった。しかし，現行の学習指導要領（1989年3月改訂，1993年4月から実施）では，小・中学校を通じて確率が教科内容として初めて扱われるのは，中学校第3学年の数学においてである。数学の学習指導要領には，第3学年の目標として「確率の意味や標本調査の基本になる事柄を理解し、統計に対する見方や考え方を深める」とある。

中学校における確率の教科内容は，学習指導要領の第3学年の内容「C 数量関係」によれば，次のとおりである。

(2)　多数の観察や多数回の試行によって得られる頻度に着目し、確率について理解する。
　ア　不確定な事象と確率
　イ　簡単な場合について確率を求めること。

そして，この内容の取扱いに関して，「内容のCの(2)のイについては、樹形図などを利用して起こり得るすべての場合を簡単に求めることができる程度の事象を取り上げるものとする」とある。

また，「指導計画の作成と内容の取扱い」では，次のように書かれている。

4　各領域の指導に当たっては、必要に応じ、コンピュータ等を効果的に活用するよう配慮するものとする。特に、「数量関係」において実験や観測などにより指導を行う際にはこのことに配慮する必要がある。

この学習指導要領の内容を解説した『中学校指導書　数学編』(1989) においては，「確率の意味」と「簡単な場合について確率を求めること」が見出しになっている。

「確率の意味」では，「実験の回数や観察する資料の度数を限りなく大きくしていくとき，その着目している事象の相対度数が近づいていくであろう値」，そのような事象の起こる程度を表す「ある安定した値」をその事象の確率と呼ぶ。ただし，「実際には実験や観測を無限に行うことはできないので，有限回で打ち切ってその値を想定することになる」。また，「ある事象の確率pのとり得る範囲が，$0 \leqq p \leqq 1$」であり，「その事柄が起こらない確率をqとするとき，$p+q=1$である」。ところで，「実験や観測の結果から，起こり得るすべての場合の相対度数がほぼ等しく，どの場合に対しても等しい確率を与えてよいと考えられる事柄がある」。したがって，「そのような事柄の一，二の例を知ることにより，他の事例についても起こり得るすべての場合が等確率とみてよいことを推測できるようにしたい」と述べられている。

次に，「簡単な場合について確率を求めること」では，「順列，組合せの考えを必要としない程度の簡単な事象について確率を求めることが，ここでのねらいである」から，「樹形図などを利用して起こり得るすべての場合を簡単に求めることができる程度の事象を取り上げることにする」とされている。例として，「2個の硬貨を投げて2個とも表になる確率」が取り上げられ，樹形図などを用いて，「同様に確からしい4通りの場合のうちの一つであるから，その確率は

1／4になる」；その意味は，「2個の硬貨を4回投げれば，いつもそのうちの1回は必ず2つとも表が出るという確定的な数でないことに注意する必要がある」；「硬貨を投げる回数 n を多くし，2個とも表が出る場合の数 r を求めて，相対度数 r/n を計算し，n をしだいに大きくしていくと，それに伴って r も大きくなるが，r/n の値はしだいに上で求めた確率に近づいていくことを見いだすことができよう」；「このことから，確率を求める方法としては，同様に確からしいということに基づいて求める方法と，多数回の試行によって求める方法とが考えられる」；「この二つの方法について，後者の方法で求めた確率が前者の方法で求めた確率と比べて差が大きいときは，同様に確からしいとしたことに誤りがあるか，試行の仕方に偏りがあるかのいずれかであることに気付かせることも必要である」と述べられている。

3　確率概念の指導にかかわる問題——確率の推論・判断

前章で述べた確率の教科内容を指導するにあたって，どのようなことが問題になるのだろうか。まず，確率を学習する前に偶然性のある事象に対して生徒がどのように推論し，どのような判断をするかが問題である。そして，その教科内容の核になっていると考えられる「確率の意味」を生徒が理解したといえるためには，中学校の教科内容に属する問題に対して正答が出せるだけでなく，その教科内容に対応する現実の問題，あるいは学校数学の範囲内にない問題に対しても正しく推論し判断できるようにしなければならない。そこで，確率の推論・判断に関する心理学的研究，および，その成果に基づく教育への示唆・提言を中心にレヴューしながら検討も加えることにする。

3.1　確率の推論・判断をめぐって

確率の推論・判断に関する心理学的研究としては，古くはJ.Piagetら（Piaget et al., 1951）の4～13歳の子どもを対象とした研究がある。このPiagetらの研究によれば，前操作期から形式的操作期まで発達段階に対応して確率に関する推論・判断も発達し，形式的操作期に達した子どもは正しく確率を判断できるようになる。しかし，その後の心理学的研究では，D. Kahneman, P.Slovic, A. Tverskyの編集した論文集（Kahneman et al., 1982）にもあるように，子どもではなく大学生等の大人を被験者にし，その大人が誤った直観や発見法を使うことによって，誤った判断をすることが多いということが明らかになってきている。ただし，Piagetらの研究では，「確率の量化」（la quantification des probabilités）において，いわゆる数学的確率（Laplace流の確率）が簡単に求められる問題，とりわけ「起こりうるすべての場合の数」は異なるが確率は等しいものの比較（Piagetらは「比例性」（proportionnalité）と呼んだ）の問題が用いられたのに対して，その後の研究では，計算が困難または不可能で直観的判断だけに頼るしかないような問題が用いられることが多かった。また，後者は人のもっている誤概念（misconception）を明らかにすることに研究の主目的があった。

3.2　確率の直観に関するE.Fischbeinらの研究

Piagetらの研究を発展させたものとして，E.Fischbeinら（Fischbein et al., 1970）は，形式的操作段階に達していないルーマニアの3年生（9～10歳）に，確率の計算法ではなく，「確率の量化」の考え方を少し教えただけで，箱からビー玉を抽出するという状況の問題（Piaget

らのいう「比例性」の問題を含む）を正しく解決できるようになったことを報告していた。

この研究では確率の直観や発見法は扱われなかった。しかし，その後，Fischbein(Fischbein, 1975）は，確率の直観について研究した。その結果，就学前の子どもにも正しい確率の直観はあるが，社会の影響と学校のカリキュラムによって，決定論的側面だけが発達するために，年長になるにつれて確率論に合った行動は減少していくことを見いだした。

ついで，Fischbein ら（Fischbein et al., 1984）は，確率を教えると，直観的な確率判断がどう変化するかを調べた。Fischbein らによれば，直観とは，基本的には，大局的，総合的で，明確には正当化されない評価や予測であり，自明で首尾一貫していて，疑問の余地がないと感じられる認知的信念である。何かを教えるさいには，直観は無視できない。もし直観が正しければ科学的概念の獲得に役立つ。しかし，直観が誤っていれば除去し，適切な直観を発達させなければならない。誤った直観に留意しない教授プログラムでは，学習者は誤り続けることになる。新しい直観は，学習者がひとりひとり実際の活動をすることによってのみ発達しうる。直観は言語による説明だけでは修正できないのである。それゆえ教授プログラムでは，数学の形式的な知識とともに，確率的な状況を活動的に，感情にまで訴えて，体験する機会を頻繁に与えなければならない。こうして学習者は，自分なりのもっともらしい期待と体験した結果とを突き合わせることになる。

Fischbein らの教授プログラムは，12時間で，その内容は，①確実に起こる事象，起こりうる事象，決して起こりえない事象； ②確率の実験における結果と事象； ③偶然の概念と偶然を量化（数値化）する概念； ④確率と相対度数の概念，それらの間の関係； ⑤結果を数え上げること； ⑥単純事象，複合事象，それらの確率，であった。被験者は，5～7年生(10～13歳）で，確率を教えられる実験群285人と教えられない統制群305人とに分けられた。直観に基づく誤概念への間接的な影響を調べるために，学習者がどの程度教えられた内容を理解したかを調べる必要があった。後者のための質問紙Aをまず実験群に与え，前者のための質問紙Bを両方の群に与えた。その結果，5年生の生徒には教授プログラムに含まれる大部分の確率概念は難しいことがわかった。6年生の60～70％，7年生の80～90％は，大部分の確率概念を理解できていた。直観に基づく誤った諸概念に対しても，教授プログラムは有効であることもわかった。

さらに，Fischbein ら（Fischbein et al., 1991）は，確率の直観的判断に影響を及ぼす要因を調べた。そのため，イタリアの小・中学校に在学中の子どもたち（9～14歳）619人を2群に分け，6対の問題（表現形の異なるAとBの対）の一方を各群に解かせた。

その結果，多くの子どもたちにとって，確実に起こる事象（1個のサイコロをふるとき，7より小さい目が出ること；1～90の数字を1つずつ書いたクジを1本ひくとき，91より小さい数字のクジが出ること）は起こりうる事象よりも理解しにくいこと，大きい数にかかわる事象のほうが小さい数にかかわる事象よりも起こりやすい（2個のサイコロを1回ふるとき，目の和が6になるほうが3になるよりも起こりやすい；10になるほうが7になるよりも起こりやすい等）と判断しがちであること，「偶然」はそれだけで確率を均等化する要因となり（2個のサイコロを1回ふるとき，同じ目が出るのと違う目が出るのは同じように起こりやすい；2枚のコインを1回投げるとき，同じ面が出るのと違う面が出るのは同じように起こりやすい等），適切な標本空間を考えることができないため，確率の問題の解決が困難になること，複合事象に関する問題は特殊な形（2個のサイコロを1回ふるとき，1個が5の目で1個が6の目が出るの

と，２個とも６の目が出るのとでは，どちらが起こりやすいか）よりも一般的な形（２個のサイコロを１回ふるとき，同じ目が出るのと，違う目が出るのとでは，どちらが起こりやすいか）のほうが正しく解決されることが多いことなどが明らかになった。

最近，Fischbein ら（Fischbein et al., 1997）は，５年生（10～11歳），７年生（12～13歳），９年生（14～15歳），11年生（16～17歳），大学生を対象として，直観に基づく誤概念が年齢とともにどう変化するかを調べた。その結果，複合事象・単純事象に関するものだけは年齢を越えて安定していたが，Kahneman らのいう代表性（representativeness），負および正の最近効果（negative and positive recency effects）（賭博者の誤信－引用者注），連接誤謬（conjunction fallacy）は年齢とともに減少し，標本の大きさの効果（effect of sample size），利用可能性の発見法（heuristics of availability）は年齢とともに増加していた。Fischbein らは，確率の授業では，このような誤概念を生む問題を取り上げて議論すること，問題と解答を提示するだけでなく，対応する誤概念の構造を心理学的に分析することが有用だろうという。確率は単に解に至る技術情報と手続きから成っているわけではない。大部分の学校数学で必要とされるものとは全く異なった思考法が必要になる。確率を学ぶさいには，新しい直観をつくらなくてはならない。授業では，生徒がもともともっている直観のスキーマと確率状況に固有の特別なタイプの推論との葛藤を積極的に経験させるようにできる。生徒がこの葛藤や間違いを分析できるようになったら，それを克服し，真に確率論的な思考法を身につけることができると Fischbein らはいう。

筆者（菅岡，1983）はかつて，後者の確率判断に関する心理学的研究，授業書を用いておこなわれた実践研究，などに基づいて，確率の教材化の方法を検討した。その結論として，数学の他の分野とは異なった特徴として「直観に焦点を合わせた教材化をすすめていく必要がある」，そのような教材化によって「直観の克服と直観の数学化が連動すれば，より高度な確率概念を，現実の確率現象を解析するための道具として習得することが容易になると考えられる」と述べた。その教材化については，「直観を克服するために，意外性のある問題を見つけていき，同時に直観を質的に変化させ数学化するために，実験と数学的な発見法を開発していく」という方法を提案した。Fischbein らの研究は，確率における直観の克服や直観の数学化に関係しており，直観に焦点を合わせた教材化に結びついているという点で，筆者の問題意識と符合するものである。

3.3　C. Konold らの研究

C. Konold（Konold, 1989）は，不確実性をもった問題（降水確率の問題等）に対する推論の仕方を調べるために，16人の大学生を対象として面接法によって実験した。その結果，多くの被験者が，確率論のアプローチ（相対度数に基づくアプローチ）とは矛盾し，それまでに見いだされていた発見法とも異なる「アウトカム（結果）・アプローチ」（outcome approach）を使って推論していた。この「アウトカム・アプローチ」は，確率の問題に対して１回の試行のアウトカムを予測する，そのような予測として確率を解釈し，１回の生起後正しかったか否かで確率を評価する，確率を分布の情報よりも因果的な特徴によって推定する，という特徴をもったモデルである。次に，同じ被験者のうちの12人を対象として，５か月後に別の問題（Kahneman らのタクシーの問題等）を用いて面接し，「アウトカム・アプローチ」の性質を調べた。その結果，「アウトカム・アプローチ」を使う者はどの問題に対しても一貫して使う傾向があることな

どが明らかになった。

Konoldによれば，この「アウトカム・アプローチ」ではいわゆる賭博者の誤信を受け入れにくい。頻度のデータよりも，関心のある事象に決定論的に結びついたデータに基づいて予測する。不確実な事象に対してブラックボックスのモデルよりも因果的なモデルを適用する。これが，「アウトカム・アプローチ」を使う素人と確率の熟達者との相違点である。また，確率モデルよりも因果的なモデルを好むということは，標本の結果を予測するよりもただ1回の試行のアウトカムを予測するほうを好むということと結びついている。

人々は確率・統計の概念と調和しない強い前概念（あるいは誤概念）をもっている。この点は物理の場合と同様である。物理の教育ではさまざまな誤概念に取り組むように特別につくられたアプローチが有効であることがわかってきた。確率・統計の教育においても同様のアプローチが必要である。「アウトカム・アプローチ」は，確率の概念を理解するためのカリキュラムや道具を設計するさいに考慮に入れるべき誤概念であるとKonoldはいう。

その後，Konoldら（Konold et al., 1993）は，高校生・大学生を被験者として2つの実験をおこなった。その結果，確率・統計の問題に対する回答とその正当化との関係は複雑なものであることを見いだした。最初の答えは直接の直観を表していたが，正当化は答えの論拠を反映しているとは限らず，回答後に新たにつくられることもあった。

Konoldらによれば，確率の教えにくさの主な理由は，生徒が確率について学習前にさまざまな信念や観点をもっていることである。確率を教えようとする者は，確率のいろいろな代用になる概念に精通することが大切であり，最初は不可解にみえる生徒の発言を解釈する力をつけることで，より効果的に教えられるようになる。また，正しくない直観に基づいた答が認知的葛藤を生み出すような状況をつくることによって概念の変化を引き起こそうとしても，生徒が矛盾に気づかないために何ら葛藤を引き起こさないので，この方法には限界がある。したがって，授業で認知的葛藤を作り出すことは最小限に押さえたり後に延ばしたりしておいて，異文化の言語や習慣を理解しようとする民族誌学者の枠組みを取り入れるほうがよいとKonoldらはいう。

これらの二つの研究における教育への提言は，きわめて重要である。筆者の知る限りでは，日本の確率教育で考慮に入れられたことはなかった。なお，授業における認知的葛藤の評価については，Konoldらと Fischbeinらとは完全に対立している。

4 大数の法則と確率の実験

半田（半田，1997）は，確率未習の中学校2年生・3年生78人に，まず，「十円硬貨を投げたとき表のでる確率を求めなさい」という問題を与えたところ，78.2%の者が1/2または約1/2と答えた。残りの21.8%の者は他の数値を答えるか，答えなかった。この後に，次の問題を与えた。

「A君が十円硬貨を投げて，表の出る回数を調べました。次の図は100回，200回，300回，……1500回投げたときの，表の出た回数と硬貨を投げた回数との割合を計算してその値をグラフに表したものです。もし，A君が1500回以上多くの回数を投げて調べたときの結果をこのグラフに続けてかき込んだとしたら，どのようなグラフになると予想されますか。あなたが，想像したグラフを次のグラフのなかにかき込みなさい。」

その結果，次のタイプa～eのグラフが出された。括弧内の数値は回答者の割合（%）を表している。

a：0.5に収束するグラフ（34.6%），b：0.5と異なる値に収束するグラフ（6.4%），
c：0.5に近いところを上下させ，収束しないグラフ（23.1%），
d；0.5より大きく離れるグラフ（18.0%），
e：0.5に収束したあとで発散させるグラフ（5.1%），　無答（12.8%）

半田は分析していないが，十円硬貨を投げたとき表の出る確率を1/2または約1/2と答えた78.2%の者がどのようなタイプのグラフをかいたかが問題である。たとえば，タイプbとdの回答者数を合計したときの割合は21.8%を越えるからである。しかも，この21.8%の者のなかには，Konoldのいう「アウトカム・アプローチ」を使った者がいる可能性がある。その場合はタイプaのグラフをかいているかもしれない。確率の導入の方法に関して考慮すべき重要な課題を示しているといえよう。

なお，十円硬貨を投げたとき表の出る確率を1/2または約1/2と答えたうえで，タイプcのグラフをかいた者がいることは明らかである。半田は，「タイプcは，実験を多くするほど割合が0.5に近い値になるという意味を，相対度数の平均値が0.5になるという意識であって，0.5に収束するという意識ではないと判断できる」と述べている。しかし，半田もその可能性を指摘しているが，試行回数の増加に伴い，試行結果の変動が相対度数の数値に及ぼす影響は小さくなるという性質をもった「相対度数のグラフについての理解が不十分のために正しいグラフがかけなかった」ことも原因の一つであろう。この可能性はタイプeのグラフをかいた者にもあるが，他方で，このような「大数の強法則」的表現としてのグラフにおいて，いったん0.5に収束したあとで再び0.5から離れていくことも現実に起こりうることである。この点を半田は考慮に入れていないようである。

次に半田が，5人が別々に十円硬貨を投げて，表の出る回数を調べるという実験について，上の問題と同じように，5人のグラフを想像させてかかせたところ，次のタイプf～lのグラフが出された。

f：5つのグラフとも0.5に収束するグラフ（25.7%），
g：5つとも0.5と異なる同じ値に収束させているグラフ（5.1%），
h：5つのグラフとも0.5の値をクロスさせ収束させないグラフ（10.3%），
i：5つのグラフ別々で0.5と離れており，収束させないグラフ（34.6%），
j：5つのグラフをそれぞれ別の値に収束するグラフ（5.1%），
k：1つにまとめたグラフで，0.5の値に収束させている（10.3%），
l：1つにまとめたグラフで，収束させない（3.8%）

半田は，タイプi, jのようなグラフをかいた者がいることについて，次のように述べている。

「タイプi, jの者は硬貨を投げるということがらを確率を考える一般的な事象と意識していないと予想できる．5つのグラフがまったく別々ということは，それぞれの硬貨によって表の出方が違うのであるから『硬貨を投げる』というように一般的に表現することは意味を失う．この調査では生徒の意識の深層まではわからないし，確率指導以前であって相対度数の値をグラフにかくことの意味の理解も十分ではないから，これらの者が40%いたという数値を過大評価することは危険である．しかし，『硬貨を投げるときの表のでる確率』等というとき，教師がとらえているほどに生徒はそれを確率を考える事象として明確に意識しているとはいえないと

いうことの警告になっていることは確かであろう.」

半田のあげた図ではi，jとも5つのグラフは相対度数0.40～0.59の範囲内におさまっている。また，グラフについての理解が不十分である可能性がある。しかし「5つのグラフがまったく別々」とみなしてよいとすれば，これは確率の教材のあり方を左右する重要な指摘である。タイプi，jのグラフをかいた者に，その考え方をきくことが不可欠であろう。これまでの体験や生活経験に基づいている場合には，新たな体験をさせることが必要である。Fischbeinらのいうように，新しい直観をつくらなくてはならないのである。数学の授業でおこなうことができるのは，確率の実験である。半田は別の文脈で，「確率の意味の指導において，この多数回試行したときの相対度数の近づくということを，言葉の上だけの指導ではなくグラフを通して正しく理解させることが指導の重点となるといえる」と述べているが，「グラフを通して」の指導は実験した後でおこなわれなければならない。天下りの実験のデータやグラフを用いるのであれば，「言葉の上だけの指導」と同様になってしまう。このグラフは実験結果の相対度数を表現するための手段であり，実験をおこなうことが前提になっているからである。これまたFischbeinらのいっていることだが，直観は言語による説明だけでは修正できないのである。もっとも半田も実験の必要性は認めていて，「実験を生徒にやらせるとき，そのねらいを理解して厳密に実験しようとするか，安定した値が求まるほどの多数の試行を教室の中でできるものであろうか等々，実際の指導を通して研究すべきことが多いが，いずれも今後の課題である」と述べている。しかし実際には，確率の実験を取り入れた先行実践は少なくない。

筆者（菅岡，1983）は，それまでの実践研究で取り入れられた実験を参考にして，確率の実験について，次のような分類をおこなった。

生徒にとっての確率計算の可能性という観点からは，

①　実際に実験してみなければ確率がわからない場合

②　生徒の知っている計算法によって確率計算は可能であるが，多くの生徒にとっては実験してみなければ確率がわからない場合

③　生徒にとっても実験してみなくても確率がわかる場合

また，確率の実験で教師が達成しようとする目標からは，

α　大数の法則における規則性（バラツキの減少）の発見

β　大数の法則を利用しての確率の発見

γ　大数の法則による，統計的確率と数学的確率との橋渡しの発見

以上の①，②，③とα，β，γの組合せで確率の実験はおこなわれるのである。

筆者は，この分類に基づいて，実験の教材が重要なポイントをおさえつつ（生徒の認識を大きく変化させて確率概念を意識化させるほどに）十分に意外性をもっているためには，最低限，

①α→①β，②α→②β→③γ

を含んでいることが必要である，と主張した。

そのときはふれられなかったが，このほかに確率概念が導入される事例としては，多数回観察してバラツキの減少を発見し（α），相対度数が一定の値に近づいていくことから確率を発見する（β）という場合がある。これは，実験ではなく，観察による確率の導入であり，①に対応しているので，①'と記すことにする。この場合の確率は，①'αを前提とした①'βである。この場合は，①'αが成立するとは限らない。観察によって①'αの成立が確認できたときはじめて，①'βになるのである。

5　中学校数学の教科書における確率概念の指導

現在，中学校数学の検定教科書は，6社から発行されている。このうち，確率に関する叙述のページ数が最も多いのは，東京書籍発行の教科書である。そこで，ページ数という見かけの量からみて最も充実していると予想される東京書籍の教科書『新編新しい数学3』(1997) を主に取り上げて，教科書における確率指導の叙述を分析することにする。また必要に応じて，この教科書の叙述に対応する東京書籍の『教師用指導書　指導編』(1997) の内容も検討する。

この東京書籍の教科書は，本文の叙述に14ページを費やしている。『教師用指導書　指導編』によれば，その「編集上の考え方」は，「確率・統計の分野は，数量関数(ママ)の領域に入っているが，関数とは異なる扱い方をする場合が多いので，教科書では，最後の章においている」，「確率の意味の導入にあたっては，わかりやすいさいころや硬貨投げから起こりやすさを数値化し，その裏づけとして，相対度数が安定することを扱い，数学的確率と統計的確率を一体として理解させるようにしている」(p.12) というものである。

では，順を追って，その教科書の叙述をみていこう。

最初に3コマのマンガがある。吹きだしは順に，「どちらがキックオフかコイントスで決めよう。」，「いけない!　コインを忘れてしまった。」，「この王冠で決めればいいよ。」「本当にいいのかな?」，となっている。ついで，「次の2つのことがらア，イのうち，どちらが起こりやすいと考えられるでしょうか」と問いかけがあり，「(1)20人の男子と15人の女子のいるクラスで，1人の代表をくじびきで決めるときーア　男子が代表になる　／イ　女子が代表になる　／(2)さいころを投げるときーア　1の目が出る　／イ　偶数の目が出る　／(3)100円硬貨を投げるときーア　表が出る　／イ　裏が出る」とある。これらは，起こりやすさが同じになる場合と違う場合とを感覚的に区別させる，すなわち起こりやすさの量感をもたせることを意図している。生徒からは，単に確率に関する素朴な意見が出てくることを期待している。生徒にあらかじめ学習内容にかかわる素朴な体験を喚起し，学習への動機づけを与えるためのものであるようにみえる。

2ページ目は，「あることがらの起こりやすさを数で表すことを考えてみよう」と学習目標が提示され，「さいころを投げる実験では，もし，さいころが正しく作られていれば，どの目が出ることも同じ程度に期待できる。したがって，たとえば，1の目が出るのは6回に1回の割合であると考えられる。すなわち，くり返し何回もさいころを投げれば，1の目が出る相対度数は1／6に近づいていくと考えられる」と説明があって，数値化のための式

(1の目が出る相対度数)＝(1の目が出た回数)／(さいころを投げた回数)

が示される。

次の「例1」で，さいころを投げる実験が取り上げられている。しかし，2000回までの結果の表とグラフが天下りに示され，「投げた回数が多ければ，相対度数は1／6に近い値になることがわかる」と結論が出されている。そして3ページ目で，「さいころを投げて1の目が出る，ということがらのように，結果が偶然に左右される実験や観察において，ある1つの結果に着目したとき，着目したことがらが起こると期待される割合を，そのことがらの起こる確率という」と，確率が定義されている。そのうえで，「たとえば，さいころを投げるとき，1の目が出る確率は1／6である」と確認のための説明があり，「このように，確率が p であるということ

は，同じ実験や観察を多数回くり返すとき，そのことがらの起こる相対度数が p に近づくという意味をもっている」と文字 p を使って一般化されている。

続いて，「問１　さいころを投げるとき，３の目が出る確率はいくらですか。また，６の目が出る確率はいくらですか」と「問２　10円硬貨を投げる実験を多数回くり返すとき，表が出る相対度数はどのような値に近づくと考えられますか。また，表の出る確率と裏の出る確率を求めなさい」がある。

このあとに，「その項の学習内容に関連する問題のうち，生徒の数学的考え方を育成するのに有効と思われる問題」「とくに指導時数はあてていませんが，できれば生徒に考えさせたい問題」(『教師用指導書　指導編』, p.9)として，「さいころや硬貨を実際に多数回くり返し投げて，例１や問２のことがらを確かめてみよう」と書かれている。しかし，この矛盾した叙述からすれば，実質的には実験をおこなうことを指示していないと考えられる。したがって実際には，「言葉の上だけの指導」がおこなわれている可能性が大きい。なお，実験がおこなわれる場合は，上述の③ γ に相当する。これは，③ α，③ β を前提にしている。

以上のような確率の導入は，次のような判断によるものである。(『教師用指導書　指導編』, p.278)

中学生に，「確率とは何か」,「統計的確率と数学的確率はどうちがうか」などという理論を指導するのは無理がある。数学的確率と統計的確率とを一体として理解させたい。(中略)本書では，数学的確率と統計的確率を区別せず，一体として「確率は１つ」であるという立場をとっている。これに対し，数学的確率が求められない例から導入すべきだという意見もある。しかし，さいころを投げる実験を行って１の目が出る確率が１／６であることを示すことは不可能に近い。たとえば，６万回投げたとき，ちょうど１万回１の目が出たからといって，問題の確率が１／６であると示したことにはならない。

このように，多数回の実験から１つの数値を決定することは，この段階では難しい。それより，数学的確率を求められる例を用い，素朴に「確率は１つ」と理解させたほうがよい。

このような判断が妥当であるか否かは，最初の「中学生に，……という理論を指導するのは無理がある」という判断が妥当であるか否かに依存している。しかし，後者の判断の論拠は，明らかではない。また，この立場では，確率の実験がおこなわれたとしても，前提になる③ α，③ β と乖離した③ γ になってしまっている。それでも実験がおこなわれた場合には，生徒から「小学生でもできることだ。バカにして」といった感想が出てくることもありうる(菅岡，1983参照)。そうなった場合には，その生徒の学習意欲が減退してくることになろう。だからこそ生徒に実験させないで，実験結果の表やグラフを天下りに与えるほうがよいという考え方もあろう。いずれにせよ，「素朴に『確率は１つ』と理解させたほうがよい」かどうかは，綿密な検討を要する問題である。

４ページ目は，「子どもが生まれるとき，その子どもが女子である確率は１／２といってよいだろうか」という問から始まっている。これは，上述の①'α を前提とした①'β に相当している。続く「例２」で，日本の昭和61年から平成６年までの出生児数の表が示され，「この表からわかるように，女子の生まれる相対度数はほぼ一定していて，およそ0.486である。／したがって，わが国で，女子が生まれる確率は0.486であるといってよいであろう」と結論が出されている。

そして,「例2の場合の確率は,問2で求めた確率とちがって,実際に行った多数回の観察の結果にもとづいて求めたものである」と説明が加えられている。これと同様の求め方をする問題として,「問3　11月3日の文化の日は,晴天が多いといわれている。ある地方の過去の記録では,この30年間に晴れた日は21日だった。この地方の次の文化の日が晴天になる確率を求めなさい」が取り上げられている。

『教師用指導書　指導編』によれば,確率の単元に入ってからここまで,すなわち「確率の意味」を3時間で教えることになっている。前述の Fischbein らの教授プログラムと比較すると,対応する内容に関して,より簡潔で指導時数が少ないことがわかる。

5ページ目からは,学習指導要領の「簡単な場合について確率を求めること」に対応して,「確率の求め方」の項に入っている。

最後に,他社の教科書における「確率の意味」の扱いについてもふれておこう。全体的には,当然ながら,確率に関する叙述のページ数がより少なくなっているために,よりいっそう簡潔な叙述になっている。

しかし,その叙述のページ数が東京書籍の教科書についで多い大日本図書の教科書には,1つの大きな特色がある。まず,「あることがらの起こりやすさの度合いを調べる方法について考えよう」と学習目標を提示したあと,東京書籍の教科書と同様に,男女別出生数の表を載せている(例1)。続く問1,2で男女別出生の相対度数を求めさせたうえで「それらのことから,どんなことがいえそうですか」ときいている。こうして①'α を確認してから①'β を導いている(しかし,この例は①'α の成立する数少ない事例であり,冒頭にあるのは不自然であろう)。例2では,画鋲投げの結果に関する未完成の表が与えられている。問3で表を完成させるように指示されているが,ここでは単に相対度数を計算することが求められている。次の学習目標として,「実験や観察の回数を多くするにしたがって,相対度数はどのように変化するか,そのようすを調べよう」が掲げられ,例3で,さいころ投げで3の目が出る場合についてのグラフが与えられている。問5で,その相対度数の変化のようすをきいている。注目すべきは,続く問6である。「実際に例3の実験を行い,相対度数の変化を調べなさい」と実験をおこなうことを指示しているのである。これが,日本で使われているすべての教科書のなかで,実際に実験をおこなうことを明確に指示している唯一の叙述である。しかし,このような順序で叙述されているために,指導時数等の都合によって省略されてしまうことが多いと考えられる。そうなると,他社の教科書の場合と同様に,実験結果の表やグラフが天下りに与えられただけということになり,前述の問題点は共通しているといえる。

6 おわりに

J.M.Shaughnessy(Shaughnessy, 1992)は,数学の教師としては,判断に関する発見法が人々の決定に悪い影響を与えうる状況を指摘し,そのような発見法が役立つ状況から区別することが必要である,という。また,偶然事象に対する人々の概念は,部分的には,自分自身の経験によって決められるが(第1直観),教育によってもまた影響されうる(第2直観)として,1.非統計的(non-statistical),2.素朴統計的(naive-statistical),3.新生統計的(emergent-statistical),4.実用統計的(pragmatic-statistical),という人々の確率・統計概念のタイプ

を挙げている。この1～4のタイプはそのまま1から4までの確率概念の獲得に関するレベルまたは段階といってもよい。4に達するための教材構成をおこなっていく必要がある。

J. Garfield ら（Garfield et al., 1988）は，確率・統計の教育に関係した文献をレヴューし，確率・統計の基本的な概念を学ぶさいの困難を克服するために勧められる教え方として，次の8点を挙げている。

(1) 抽象的なものではなく，活動やシミュレーションによって導入する。

(2) 数学は単なる記号，ルール，慣例ではなく，現実に結びついていて役立つものだという感情を生徒に生じさせるようにする。

(3) 視覚に訴える説明を使い，調査データに関する方法を強調する。

(4) 確率と関連づけないで，記述統計だけを教える。

(5) よくある統計の誤用を指摘する。

(6) 比例の推論にはいる前に，生徒のもっている有理数の概念を改善するための方略を使う。

(7) 確率に対する生徒の考え方に共通してある誤りを認めて対処する。

(8) 生徒の世界観に対応する確率の推論を必要とするような状況をつくる。

また，確率・統計を学ぶさいの困難は，簡単な救済策によって改善できるような簡単な問題ではない，誤概念は大部分の人々の心に深く根づいている考え方であるようにみえる，人々がどのようにして確率・統計の概念を学ぶかを理解してはじめて，有効な学習経験を適切に処方することができるだろう，と Garfield らは指摘している。

上述のように，この Garfield らと同様の趣旨の指摘は，Fischbein, Konold らもおこなっている。しかし日本の教科書では，その「改善」のための叙述・指導時数が少なく，統計的確率を中心に確率が定義されているにもかかわらず，実験は重要視されていない。「アウトカム・アプローチ」等の誤概念も叙述の上では考慮されていない。前章で取り上げた「確率の意味」を生徒に教える場合だけについても，Garfield らの(1), (2), (7), (8)は重要な視点である。これを実行するためには，ある程度時間をかけて，ていねいに指導すること，前述の① α →① β，② α →② β →③ γ を含む実験をおこなうことなどが必要であろう。

「必要に応じ、コンピュータ等を効果的に活用するよう配慮するものとする」と学習指導要領に記されているが，今後は確率の実験をコンピュータでシミュレートして確率概念を指導することは，ごく当然のこととなろう。これに伴い，教科書も含めて，教材がつくられていくことになる。そのさいのコンピュータ・シミュレーション扱い方については以前に述べたが（菅岡, 1992），コンピュータには別の可能性もある。U.Wilensky（Wilensky, 1995, 1997）は，コンピュータ・モデルを作るための言語と結びついた連結数学（Connected Mathematics）を提唱している。その事例研究の結果，コンピュータ・モデルを作ることによって，確率の概念上・認識論上の障害，つまり確率概念の性質を認識するさいの不安を克服し，ひいては確率の直観を発達させることができる，と結論を導き出した。この Wilensky の方法がそのまま中学生に適用できるとは考えられないが，コンピュータを活用して確率概念を指導していく1つの方法を示唆している。

以上，確率概念にかかわる教科内容のうち，主として「確率の意味」に関する内容について論じてきた。「確率の求め方」に関する内容については，今後，稿をあらためて検討すべき課題である。

文　　献

Fischbein,E. 1975 *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Fischbein,E., and Gazit,A. 1984 Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?: An exploratory research study. *Educational Studies in Mathematics,* 15, 1-24.

Fischbein,E., Nello,M.S., and Marino,M.S. 1991 Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 523-549.

Fischbein,E., Pampu,I., and Manzat,I. 1970 Comparison of ratios and the chance concept in children. *Child Development,* 41, 377-389.

Fischbein,E., and Schnarch,D. 1997 The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, 96-105.

藤田宏他　1997　新編新しい数学３．東京書籍（平成９年度版教科書）．

Garfield,J., and Ahlgren,A. 1988 Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19, 44-63.

半田進　1997　中学校における確率指導についての一考察——大数の法則に対する生徒の意識を中心に．日本数学教育学会誌，79，271-279.

Kahneman,D., Slovic,P., and Tversky,A.(Eds.) 1982 *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* Cambridge: Cambridge University Press.

Konold,C. 1989 Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction,* 6, 59-98.

Konold,C., Pollatsek,A., Well,A., Lohmeier,J., and Lipson,A. 1993 Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24, 392-414.

文部省　1989　中学校指導書　数学編．大阪書籍．113-116.

Piaget,J., et Inhelder,B. 1951 *La genèse de l'idèe de hazard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaires de France.

赤攝也他　1997　新版　中学校数学３．大日本図書（平成９年度版教科書）．

Shaughnessy,J.M. 1992 Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D.A.Grouws(Ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning,* NewYork: Macmillan. 465-494.

新編新しい数学編集委員会・東京書籍編集部編　1997　新編新しい数学３　教師用指導書指導編．東京書籍．

菅岡強司　1983　確率概念の教授＝学習——教材化に関する理論的考察．東京大学教育学部紀要，23，367-376.

菅岡強司　1992　教材の現実性について．上越教育大学　教科教育に関するプロジェクト研究現代「教科教育学」の理論的・実践的研究．247-250.

Wilensky,U. 1995 Paradox, programming, and learning probability: A case study in a connected mathematics framework. *Journal of Mathematical Behavior,* 14, 171-202.

Wilensky,U. 1997 What is normal anyway?: Therapy for epistemological anxiety. *Educational Studies in Mathematics,* 33, 171-202.

Teaching of Probabilistic Concepts in Lower Secondary Mathematics

Tsuyoshi SUGAOKA*

ABSTRACT

Problems connected with teaching of probabilistic concepts, particularly meanings of probability, in lower secondary mathematics were examined in the present paper. The subject content of probability was picked out from the Course of Study now in use. Then several important points were extracted from psychological studies on probabilistic reasoning and judgment and from research with subjects of lower secondary school pupils. First, probability has unique difficulty to teach or to learn. Secondly, misconceptions of pupils ought to be taken into account, and adequate intuitions ought to be developed, or new intuitions ought to be created. Thirdly, lower secondary school pupils without prior instruction in probabilities have misconceptions about the law of large numbers, so that lessons of probability experiments are required to get rid of misconceptions. Then the textbooks of mathematics were analyzed. As a result, it is clear that their description is too concise, school hours for teaching probability with them are too short, and probability experiments are not regarded as important in those textbooks.

* Center for Educational Research and Development