上越教育大学研究紀要　第20巻　第1号　平成12年9月
Bull. Joetsu Univ. Educ., Vol. 20, No. 1, Sept. 2000

中等数学における関数概念の指導

―1次関数・2次関数を中心に―

菅　岡　强　司*

(平成12年5月31日受理)

要　　旨

中等数学における関数概念の指導に関して，1次関数および2次関数を中心に，その問題点を検討した。まず日本の中等数学における関数概念の教科内容を抽出した。そのうえで，そのような教科内容を指導するにあたって，どのようなことが問題になるのかを，大学生を対象とした関数の意味についての調査結果や内外の研究から検討した。その結果に基づいて，1次関数はプロトタイプになりやすいので，配慮する必要があること；　関数の定義とイメージは区別する必要があること；　関数概念の習得には，カリキュラムのあり方や，教科書における叙述の順序が大きな影響を与えている可能性があるので，配慮する必要があること；　関数概念を習得させるためには，指導する側の数学全体の知識・理解や数学観を豊かなものにする必要があることを，中等数学における関数概念の指導の視点として提出した。

KEY WORDS

Secondary Mathematics	中等数学	Function	関数
Function Concepts	関数概念	Prototype	プロトタイプ（原型）
Definition	定義	Image	イメージ
Curriculum	カリキュラム		

1　はじめに

日本では，関数の実質的な指導は，中学校以降の数学科の授業においておこなわれている。しかし，生徒に最も理解されていない中等数学（中学校・高等学校の数学）の内容の一つが，関数であると言われている。そこで本稿では，中等数学における関数概念の指導の方法・内容に関して，仮説としての視点を提出することを目的とする。

そのために，まず日本の中等数学における関数概念の教科内容を洗い出す。次に，その教科内容を指導するにあたっての問題点を検討する。具体的には，中学校・高等学校で必履修の1次関数・2次関数についての調査結果を分析する。さらに，これまで関数概念の指導にかかわる問題点とされてきたこと，関数概念の知識・理解と指導の関係等についての先行研究を検討する。それらの結果をふまえて，中等数学における関数概念の指導の視点を明らかにする。

*　学校教育研究センター

2　中等数学における関数の教科内容

2.1　中学校学習指導要領における内容

現行の学習指導要領（1989年３月告示，1993年４月実施，以下，現中学校指導要領と記す）では，関数は全学年の「内容」の領域「数量関係」のなかで扱われている。その教科内容は下記に示すとおりである。

〔第１学年〕

(1)　事象の中から伴って変わる二つの数量を取り出し，それらの間の関係を考察してその特徴を明らかにし，関数関係について理解する。

ア　変化と対応

イ　座標の意味

ウ　関数関係を表，グラフ，式などで表すこと。

(2)　比例，反比例の式とグラフの特徴についての理解を深め，数量の関係を考察したり表現したりする能力を伸ばす。

〔第２学年〕

(2)　関数関係についての理解を一層深めるとともに，一次関数について理解しそれを用いる能力を伸ばす。

ア　事象の中には一次関数を用いてとらえられるものがあること。

イ　一次関数のとる値の変化の割合とグラフの特徴

ウ　二元一次方程式を二つの変数の関数関係を表すものとみること。

〔第３学年〕

(1)　事象の中から関数関係にある二つの数量を取り出し，変化や対応の特徴を調べる能力を伸ばす。

ア　いろいろな事象と関数

イ　関数　$y=ax^2$

ウ　関数のとる値の変化の割合

関数の定義については，明言されていないが，文部省『中学校指導書　数学編』(1989)には，「事象の中から伴って変わる二つの数量に着目し，そのうちの一方の値が決まればそれに対応して他方の値が決まるということを理解できるようにする。そして，その場合の対応の仕方や変化の様子に着目し，『……は……の関数である』ということの意味を理解し，関数関係についての理解を深める」という定義にかかわる叙述がある(p.98)。教科書では，第１学年の(1)ア「変化と対応」に関する叙述において，関数が定義されている。

この前の学習指導要領(1977年７月告示，1981年４月実施，以下，前中学校指導要領と記す)では，「内容」の領域にあった「関数」で，関数が扱われていた。現中学校指導要領との最も大きな相違点は，第３学年が次のような教科内容であったことである。(1)イの「２乗に反比例する関数」および(2)の「集合と関数」「定義域と値域」は，現中学校指導要領では削除されているのである。

〔第3学年〕

(1) 事象の中から，関数関係にある二つの量を取り出し，変化や対応の特徴を調べる能力を伸ばす。

ア　いろいろな事象と関数

イ　2乗に比例する関数及び2乗に反比例する関数

ウ　関数のとる値の変化の割合

(2) 二つの集合について，その要素の間の対応関係を考え，関数の意味についての理解を深める。

ア　集合と関数

イ　定義域と値域

前中学校指導要領では，関数の定義については，第3学年の「関数の意味についての理解を深める」という内容が関連しているが，文部省『中学校指導書　数学編』(1978) には，「これまで学習してきたいろいろな関数を，集合の観点に立って見直すことになる。すなわち，関数というものを，二つの集合について，その要素の間の一意対応としてとらえることによって，関数の意味を一層明確に理解させる。／このことは，ここで関数の定義をするというより，関数についてのこれまでの経験に基づいて，関数のもつ共通な属性を理解させるという趣旨によるものと考えるべきであろう」と書かれている (p.76)。なお，「『関数とは何か』ということについては，いろいろなとらえ方がなされている。相伴って変わる量とか，変数 x の変化に伴って一定の規則に従って変わる量であるとか，また，x の値の変化に伴って y の値も変化し，x の値がきまるとそれに対応して y の値もきまるとき，y は x の関数であるとか，あるいはまた，一次関数 $y=ax+b$ や二次関数 $y=ax^2+bx+c$ のように変数 x の式に表されるものとか，いや式で書けなくてもグラフで表されるものとか，関数の意味についての説明やとらえ方は多種多様である。／このような関数についてのいろいろなとらえ方や考え方は，関数の定義というよりは，関数の内容の把握という観点から，関数についての概念形成の過程として意義のあることである。すなわち，これらのとらえ方や考え方は，関数概念の発達の各段階において，それぞれ意味のあることであり，これらの段階を通って，はじめて，統一的，一般的，抽象的に関数の意味をとらえることが可能になる」という叙述がある (pp.65-66)。

新しい学習指導要領（1998年12月告示，2002年4月実施，以下，新中学校指導要領と記す）によれば，関数は全学年の「数量関係」で扱われるが，全体的には教科内容が軽減されている。すなわち，小学校で扱われていた比例の式が第1学年の内容に入り，第1学年で扱われていた関数の定義が第2学年の内容になり，第1学年で扱われていた $x=h$ が削除され，第1学年で扱われていた「いろいろな事象と関数」（比例，反比例，一次関数，二次関数以外の関数）が高等学校に移行した。このほかの大きな相違点としては，「具体的な事象」「関数関係を見いだし表現し考察する能力」の強調が挙げられる。これは，授業における活動のあり方を示したものとみることもできる。

2.2　高等学校学習指導要領における内容

高等学校数学については，現行の学習指導要領（1989年3月告示，1994年4月から学年進行で実施，以下，現高校指導要領と記す）では，関数は主として「数学Ｉ」「数学II」で扱われて

いる。それぞれの内容は，次のとおりである。

「数学Ⅰ」
(2) 二次関数
ア 二次関数とグラフ
(ア)関数とグラフ (イ)二次関数とそのグラフ
イ 二次関数の値の変化
(ア)二次関数の最大・最小 (イ)二次方程式と二次不等式
「数学Ⅱ」
(1) いろいろな関数
ア 指数関数
(ア)指数の拡張 (イ)指数関数 (ウ)対数関数
イ 三角関数
(ア)角の拡張 (イ)三角関数とその基本的な性質 (ウ)三角関数の加法定理

なお，三次関数は，「数学Ⅱ」の「関数の値の変化」(微分)のなかで，合成関数と逆関数は，「数学Ⅲ」の「関数と極限」で扱われることになっている。

新しい学習指導要領（1999年３月告示，2003年４月から学年進行で実施）でも，関数は主として「数学Ⅰ」「数学Ⅱ」で扱われる。現高校指導要領の内容との相違点は，中学校第３学年で扱われていた「いろいろな事象と関数」が「数学Ⅰ」で取り上げられたこと，「数学Ⅲ」で扱われていた弧度法が「数学Ⅱ」の「三角関数」で扱われるようになったことなど，である。また，必履修科目が「数学Ⅰ」→「数学基礎」か「数学Ⅰ」のいずれか１科目，標準単位数が「数学Ⅰ」：４→３，「数学Ⅱ」：３→４，と変更された。

3 関数の意味についての調査

3.1 問題と方法

上述のことから明らかなように，現在の日本では，高等学校を卒業するまでに全員が履修する関数は，初歩的な連続関数である，１次関数および２次関数である。そこで，1999年に，(1) １次関数，(2) ２次関数に対して，日本の大学生がどのような概念・イメージをもっているかを，その意味を質問紙できくことによって調査した。

質問紙の課題：「次の関数の意味（どのような関数か）を説明せよ。」

被験者：大学生計163名。ただし，(1)103名，(2)60名で，互いに別の被験者である。

大部分の被験者は，1992年に中学校に入学し，1995年に高等学校に入学している。２で述べたことからすれば，これらの被験者は，中学校第１学年では前中学校指導要領，第２学年からは現中学校指導要領に準拠した教科書を使ったと考えられる。したがって，前中学校指導要領の第３学年にあった，「関数を，集合の観点に立って見直す」という内容は学んでいない。また，高等学校数学については，高等学校入学当初から現高校指導要領に準拠した教科書を使った，あるいは少なくとも現高校指導要領のもとでの授業を受けたと考えられる。そうであるとすれば，ほぼ現行の中学校・高等学校の学習指導要領に従った数学を学んだといえよう。

3.2 結果

課題の「関数の意味」を，関数の定義そのものではなく，前述した文部省『中学校指導書　数学編』(1978) の解説にあるように「関数のもつ共通な属性」や「関数についてのいろいろなとらえ方や考え方」として扱った。

そこで，本調査の被験者の回答は，マックレーン（1992）が挙げている関数の記述方法，および Vinner & Dreyfus（1989）によるカテゴリー分けを参考にして，式，グラフ，規則・依存性(規則性または関数的依存性)，および，それらの2個以上のものが組み合わされたもの，その他，というカテゴリーに分類した。

(1) 1次関数, (2) 2次関数に対する全被験者の回答はそれぞれ，次のとおりである。カテゴリー名の後の数字は，回答数を示している。一つ一つの回答は，改行または／によって区別している。ただし，改行後に字下げのあるものは，同じ被験者の回答である。なお，[　]は，その括弧内に記したようなグラフを被験者が描いたということを示している。

(1)　1次関数（被験者数：103）……無回答：29（28.2%）

式　19

文字式において一次の項と数字のみで構成される。

$y=ax$　／　$y=ax+b$（回答3）　／　$y=ax+b$（a, b は整数）　／　$y=ax+b$ の形

$y=ax+b$（$a\neq0$）みたいなもの　／　$y=ax+b$（a, b は定数, $a\neq0$）で表される関数

$y=ax+b$ の式のときに a にあてはめるのを増やしていく関数

x についての関数。$y=ax+b$ のように x が1次の関数。

ある数 x の次元が1で表される，伴って変化する2つの数を式（グラフ）で表したもの。
　　$y=x+1$など。

$y=ax+b$ で表される。y が x の1次式で表されている関数。

x や y などの文字が1つずつしか含まれておらず，かつ，2乗などにもなっていない関数の
　　こと。〈ex〉$y=2x$, $y=(1/3)x$

$y=ax$ のように，x, y が1次である関数のこと　／　式の中の最大次数が1である関数

文字式で，指数のついた文字のない関数

x が2乗，3乗……でなく，1次であるような関数

1つの数字だけがわからなくて，任意の数があてはまる。$ax+b$

式＋グラフ　25

$y=ax+b$（a, b は定数）で表され，直線を示す。

グラフでは直線になる1次式の関数

1次の文字と数字を使った方程式……[$y=ax$ のグラフ]

$y=ax+b$ で表される，変化の割合が一定のもの。直線のグラフで表される。

x の増減に伴い，y の値もそれに伴い増減する。グラフで表すと直線になる関数。
　　式に表すと $y=ax+b$

文字の次数が1次のもの。　$y=ax+b$　グラフは直線になる。

$y=x+1$みたいなもの。グラフが直線。

グラフが直線になる。2乗とかじゃない。(例) $y=x+1$

$y=ax+b$（a, b は自然数）　点（0, b）を通り，直線の傾きが a である関数。(回答2)

傾きが変わらない関数。$y=ax+b$ の形。

$y=ax+b$……[($a>0$のとき)右上がりのグラフ，($b=0$のとき($a>0$のとき，$a<0$のとき))原点を通る，($a<0$のとき）右下がりのグラフ。]

x，y を示すグラフで，直線を描くもの。x，y または a，b などの文字の入った式である。

１次すなわちグラフが直線になる関係。$y=ax+b$

x と y で１次式で表されている関数。$y=ax+b$ で表される。a=傾き，b=切片

$y=ax+b$（a は傾きを表し，b は接点を表す）グラフは直線になる。
……[グラフ（交わる２本の直線)]

$y=ax+b$……グラフ（直線の傾き，切片を図示)

$y=ax+b$　・x を含む項が１つだけのときを１次関数という。　・グラフは，傾きを a として，切片 b によって y 軸を平行に移動する直線で表される。

$y=\bigcirc x+\triangle$　で表わされる。グラフは直線になる。……[グラフ]

$y=ax+b$ の式で表される関数。a は変化の割合，b は切片。

$y=ax+b$ の式で表される。座標上の直線の式で，一定の傾きのある式。

座標上，x 軸，y 軸について直線の式を描く関数

$y=ax+b$ で表すことができ，グラフに表すと，直線となる式。

式の中に（x などの）変数が１つだけ含まれており，変数が指数ではない。
例えば，[$y=2x+1$]　グラフで表すと，直線になる。

$y=2x$ など　　$y=x$，$y=2x$　こういうグラフになる関数……[グラフ]

$y=ax$ と $y=ax+b$ で表すことができ，グラフにすると，$x=0$のとき，前者は必ず原点を通り，後者は b を通る。a が正の数だと右上がりの直線で，負の数だと左上がりの直線で表すことができる。

式＋規則・依存性　3

伴って変わる２つの量。$y=ax+b$ で表され，x が変化すれば y も変化し y が変化すれば x も変化する。

１次式を含んだ，比例，反比例を示す関数。

$y=ax+b$　1つの x の値につき，y の値が1つ定まる関数。

式＋グラフ＋規則・依存性　9

任意の数 x が決まると，それに伴って y の値が1つ決定される関数で，$y=ax+b$（$a\neq 0$，b は定数，a：傾き，b：切片）で表される。直線のグラフになる。

$y=ax+b$ のように表される。グラフに表すと直線になる。y，a，x，b の中で３つの数が決まらないと表すことができない。

a を傾き，b を切片とする，解が１つの方程式。x に対応する y の数は１つ。
……[$y=ax+b$ の式とグラフ]

正比例する傾きと切片を持つ関数。グラフは直線で表される。また式は $y=ax+b$ の形で表される。

１つの x の値に１つの y が定まる。比例定数のある $y=ax+b$ で表せる式……[グラフ]

$y=ax+b$　a を傾き，b を切片とすると，左のような式になる。x に対応する y は１つ。

$y=ax+b$　$a>0$のとき y は右上がりの直線。$a<0$のとき y は右下がりの直線。
x が１つ決まれば，y も１つ決まる。……[グラフ（交わる２本の直線)]

ある2つの数をx，yとおいたとき，その互いの数の値がお互いに関係されてくること。
その際，式を$y=ax+b$とおき，xは必ず1次の数（xの1乗）となる。
グラフにおいてaは傾き，bは切片をそれぞれ示す。
文字の最高次数が1乗であり，1つのxに対して，解となるyの値が1つずつ存在し，1対1写像を満たし，解が連続する関数。　・1つの文字を含んだ関数。
・グラフにすると直線を示す。　・文字は2乗，3乗しない。

グラフ　5

グラフにして直線（または線分）になる関数……[$y=ax+b$のグラフ（交わる2本の直線）]
グラフにしたときに直線で表わせるような関数
グラフにすると直線になり，1つの点を必ず通る。
x軸を横にとり，y/xを傾きにとる。　／　傾きを切片が表している式

グラフ＋規則・依存性等　3

1つの変数xに対して，1つの数yをとる関数……[$y=ax+b$（$a>0$，$b<0$）のグラフ]
一定の割合で増減する関係。グラフの中において直線で表すことができる。
xとy軸において直線になる関数。解は，xとy 1つずつしかもたない。
……[グラフ（3本の直線）]

規則・依存性　9

伴って変わる2つの量。ある1つの値が変わると，それと対になっている値も変わること。
また，その変わる量も一定の割合で動いていく。
xとyが一定に変化し，xの増加量とyの増加量が一定になる。xとyが比例関係になる。
一方の数が増えると，もう一方の数がそれに比例して同じ数ずつ増える関数。
1つの「数」が変化すると相対的にもう一方の「数」が変化する。
一方の数値xが決まると，もう一方の数yも決定される。
一方の変数が決まると，もう一方の変数も1つだけ決定する。
ある任意の数xに対して，ある数yが対比するもの。
1つのxに対してyが1対1で対応する関数
1つ数字を定めると，ただ1つ数字が定まるもの。

その他　1

xまたはyの値が1つの解をもつもの

(2)　2次関数（被験者数：60）……無回答：5（8.3%）

式　13

$y=ax^2+bx+c$　／　$y=ax^2+bx+c$（a，b，cは定数）
$y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）で表される数
一般式$y=ax^2+bx+c$の関数
x，yの座標平面で考えると，一般式$y=ax^2+bx+c$で表される関数
関数に2乗の係数が使われているもの　／　2乗を含んだ式
求める変数が2乗で表されている関数　／　無知の数（x）が2乗されて式に現れる関数
式の最高次数が2次（x^2のように2乗になっている）の場合，2次関数である。
ある数xが2次のx^2となったときの1次のyを表す関数。1次の式を2次で表す。

未知数（x や y など）が 2 次の式で表されている関数。$y=ax^2+b$，$y=ax^2+bx+c$，etc.

任意の文字について 2 乗の式でできているもの。例えば，$y=(a-x)^2+b$ で表されるもの。

式＋グラフ　17

$y=ax^2+bx+c$（a，b，c は任意の数）

……［$y=ax^2+c$（$a>0$，$c>0$；$a<0$，$c<0$）のグラフ］

$y=ax^2+bx+c$ で表せる。放物線のグラフ

……［$y=ax^2+c$（$a>0$，$c>0$；$a<0$，$c<0$）のグラフ］

$y=ax^2+bx+c$ の放物線の関数　／　$y=ax^2+bx+c$　$y=ax^2$のグラフは原点を通る。

一般的にグラフに描くと放物線になる。$ax^2+bx+c=0$の形で表すことになる。

一般に $ax^2+bx+c=0$で表される関数。グラフは放物線になる。

$y=ax^2+bx+c$ のように，ある数 y を表す x が 2 乗になっているものを含む。グラフに絵描くと，左右対称になっている。

$y=ax^2+bx+c$ で表される関数。$a>0$のとき下に凸のグラフになり，$a<0$のとき上に凸のグラフになる。

x の乗数が 2 になった関数。$ax^2+bx+c=d$ と表す関数。グラフが放物線になる関数。

$y=ax^2+b$（$a\neq 0$）を満たす（x，y）の点を結ぶ放物線

$y=ax^2+b$，$y=x^2$……［$y=ax^2+b$（$a>0$，$b<0$）のグラフ］

$y=ax^2+b$ で表され，$a<0$のとき上凸のグラフで，$a>0$のとき下凸のグラフとなる。$a=0$のとき 1 次式となる。

$y=ax^2$……［$a>0$のグラフ］

y に対して x が 2 乗になっているグラフ……［$y=\pm ax^2$　のグラフ］（こういうかんじ）

グラフ上で放物線を描くような形で表される式……［$y=ax^2$　（$a>0$）のグラフ］

式上において x^2や y^2といった形の項が入っているもの。例）x^2-2x+1

2 乗の変数が出てくる関数。グラフが放物線を描く。

値の分からないものが 2 乗されているもので，グラフにすると放物線をえがく。

式＋規則・依存性　5

y が x の 2 乗に比例する関数。$y=ax^2$　$a=$定数　x，$y\neq$定数

式の中に x と y，q と p などというように，定数でない，　しかしその値はお互い関係しあって決まってくる関係にある 2 つの文字を含む計算

文字の次数が 2 つ以上であり，x の値を決めると，y の値がただ 1 つだけ決まる。

（例）$y=x^2$

x にある値を代入したとき，y の値が 2 つ決まるもの。$y=2x^2$など。

1 つの y に対して 2 つの x がある関数。x の次数が最高 2 次の関数。

式＋グラフ＋その他　1

一般に $y=ax^2+bx+c$ という形で表され，グラフは放物線を描く。

a の正負によって上向き，下向きが決まり，$b^2-4ac\geqq 0$のときに解をもつ。

$b^2-4ac\leqq 0$のときに虚数解をもつ。

式＋その他　1

x^2，y^2など文字の 2 乗を使用するもの。解は 2 つできる。

……［$y=ax^2+bx+c$（$a>0$，$c>0$）のグラフ］

グラフ　5

[$y=ax^2+bx+c$ ($a>0$, $c>0$) のグラフ] (こんなやつ)

グラフが∪または∩なる関数。直線ではなく曲線。

グラフに表すと放物線になる。　／　グラフが直線ではなく，放物線となる。

直線ではなく，曲線になる。……[x^2の係数が正の場合，負の場合のグラフ]

規則・依存性　6

xの値が変化するとき，yがxの2乗に対応して変化するもの

ある数を定めたとき，もう一方が2乗によって決まり，その関係が一定である関数。

yの値が1つに対して，xの値が1～2つあるもの。

x，yなど一方が決まると，もう片方も決まる関数。

2つの変数によって決まる関数　／　1つの値に対して，2つの値が定まるもの。

その他　7

2つのわからないxという数がある。　／　x，yの2つのわからない関数があるもの

それを満たす数字が2つ以上存在することのない関数

xの解が2つある。曲線。　／　あるxをおいたとき，その答えを2つもつもの。

x，yが出てくる関数　／　xとyが与えられている関数

3.3 考察

以上の結果から，次のようなことがいえよう。

1．1次関数については，回答した被験者の場合には関数概念がよく獲得されていたといってよいであろう。ところで，注目すべきことには，「一方の数値xが決まると，もう一方の数yも決定される」といった関数の一般的な定義を，1次関数に特有の性質であると考える被験者がいた。単一の「規則・依存性」に属する被験者（9/103=8.7%）がそうであり，決して少ない回答数ではなかった。これらの回答は，次のことを示唆している。

(1) Schwarz & Hershkowitz (1999) のいうように，1次関数は「プロトタイプ」（"prototypes" 原型）になる傾向がある。

(2) Vinner (1983) や，Vinner & Dreyfus (1989) が指摘しているように，関数概念の定義と個人の内面に描かれる関数概念のイメージとは区別する必要がある。

(3) 関数の定義は，最初に中学校第1学年で，特殊な1次関数である正比例関数を学習するなかで与えられ，その後は，高等学校「数学Ｉ」の「二次関数」の冒頭で簡潔に示されているだけという教科書の叙述，したがって日本の中等数学カリキュラムのあり方が大きく影響している。上述したように，「関数を，集合の観点に立って見直す」という関数の現代的な定義に結びつく内容は，少なくとも具体例と結びつけられている文脈では，本調査の被験者は学んでいない。このことも関連している可能性がある。

2．2次関数については，半数以上が2次関数の意味の説明としては不十分な回答である。このなかには，「$ax^2+bx+c=0$で表される関数」「xの解が2つある」のように，2次方程式と混同しているとみなせる回答も多かった（10/60=16.7%）。この回答も，2次関数のグラフ→2次関数の値の変化→2次方程式，と進む高等学校「数学Ｉ」などの教科書の叙述，したがって中等数学カリキュラムのあり方に起因している可能性がある。ただし，2次関数の応用としての性質も，2次「関数についてのいろいろなとらえ方や考え方」に含めることがで

きれば，比較的よく獲得されていたといってもよいことになるが。

4　関数概念の指導にかかわる問題点

毎年，『日本数学教育学会誌』第1号で，日本数学教育学会研究部が基調発表をおこなっている。これは，前年の全国算数・数学教育研究大会（日本数学教育学会主催）における発表をふまえて，その年の大会に向けて研究の方向を提案しているものである。そこで，この10年間（1991～2000年）の基調発表のなかで述べられた，関数指導における「問題点と今後の課題」を中心に，みていこう。

4.1　中学校の場合

関数の指導については，中学校部会のなかの「数量関係」，または「数量関係(1)」（1991～1993年）という分科会で扱われている。

1991年には，「次のような面からの研究が考えられる」として，(1)関数指導の意義や目的について（目的論），(2)関数指導の体系，小・中・高一貫，他教科，他領域との関連（カリキュラム論），(3)関数の認識の様相，発達や心理に関する問題，(4)関数指導のためのよい教材や教具の開発等，指導法に関する問題，(5)数学的な考え方と関数指導について，が列挙された。問題点としては，とくに(5)の研究が不十分であると指摘された。1992年にも実質的に同じ内容の5点が挙げられ，(1)，(3)，(5)の研究をもっと深めるべきことであると指摘された。(5)については，その後も同様の指摘が続くが，1996年になって「数学的な考え方と関数指導に関連する研究が見られるようになった。基調発表での提案に沿うものでよい傾向である」と述べられてからは，今日までそのような指摘はない。したがって，(5)の問題点は解決されたとみなされている。しかし(1)～(4)に関しては，1999年と2000年に，新中学校指導要領との関連で，「これまでの数量関係の質を落とさないためめの，関数教育のあり方，指導のあり方を含めてのカリキュラム論，あるいは目的論の研究を推し進めていくことが重要な課題であろう」と指摘されているので，(1)，(2)は依然として研究の課題になっているか，あるいは新たな課題になっているといえよう。

また，とくに(3)(4)に関係していると考えられるが，1991年から1996年まで「事象に当面させて変数を取り出す指導が一般化してきたが，その変数に着目する必然性や，関数のよさを生徒に感じさせてない指導が多い。もっと生徒自らが真に考える授業を研究する必要があろう」（1991年）といった指摘があった。ここでいわれている「一般化」してきた指導とは，現中学校指導要領における「事象の中から伴って変わる二つの数量を取り出し，……」（第1学年）や「事象の中から関数関係にある二つの数量を取り出し，……」（第3学年）に従った指導をさしていると考えられる。それに代わって，1997年から今日までは，「日常の事象を教材化することを研究の中心にしている発表が多かった。授業において生徒に当面させる事象をどのようにするかということは関数指導にとって大切なことであるから，この研究の方向は歓迎すべきことである。このとき，とくに先行研究と同じ事象を利用した場合にどこが新しい視点か，先行研究のどの部分のよさの確認になっているかなどを明確にすることが研究を深める上でも，関数指導を充実させ発展させる上で大切なことであると思う」という指摘が続いている。(3)(4)に関係しているという点では全く同様であるが，研究の課題の重点が指導法から教材化の方法に移ったとみることもできる。

4.2　高等学校の場合

関数の指導については，現高校指導要領が実施される以前（1991～1994年）は，高等学校部会のなかの「数学Ⅰ・数学Ⅱ」および「基礎解析・微分積分」という分科会で扱われた。研究課題としては，2次関数と2次方程式・不等式との関連，三角比と三角関数の関連（三角比から三角関数への指導展開）などが挙げられていた。

現高校指導要領の実施後（1995年～）は，高等学校部会のなかの「数学Ⅰ·数学A」，および「数学Ⅱ」（1995～1998年）または「数学Ⅱ・数学B」（1999～2000年）という分科会で扱われた。その間継続して研究課題として挙げられていたのは，中学校数学と「数学Ⅰ」「数学A」の整合性を図る教材研究（指導内容の一貫性を図る研究）である。これは，中学校部会で出されたカリキュラム論にほかならない。

1997年と1998年に「数学Ⅰ」の内容に関して，日常の生活に関係した具体的な事象を通して，数学的な見方や考え方のよさが分かるような（学習することの意義を理解させる）教材の開発と指導法の研究が今後の研究課題として挙げられている。このことは，1997年以降の中学校部会における，日常の事象の教材化に関する研究と関係していると考えられる。

また，「数学Ⅱ」については，1996～1999年に，「数学Ⅰ」「数学B」「物理」などの他の教科·科目の内容との関連（例：複素数と三角関数，瞬間の速度と微分係数）と位置づけの研究，が今後の課題として挙げられた。2000年には挙げられていないが，解決されたとはみることはできないであろう。そのほかの今後の研究課題としては，1999年と2000年に，「数学Ⅱ」は「数学Ⅰ」に次いで「準必修」とみなすことができる科目であり，「数学の有用性を示すのにふさわしい内容が多く含まれている」(例：いろいろな自然現象や社会事象の比較的単純なモデルの表現としての三角関数や指数関数）ので，「生徒に数学のよさを知らせ，この教科に対する興味·関心を高めることにも役立たせることができる」から，さらに研究が「累積されることを期待したい」と述べられている。

以上の基調発表で述べられたことが，関数の指導における問題点や課題を示していることは間違いないであろう。とくに今日においても課題とされているカリキュラム論は，重要であろう。というのは，3.3で論じたように，3の被験者の回答は，関数のカリキュラムのあり方にかかわる課題を提起しているからである。

日本数学教育学会研究部の基調発表とは独立に，中学校·高等学校全体の関数指導について，銀林（1994）は次のような問題点を指摘した。

今日の中学校の教科書を見てみると，1年に正比例関数 $y=ax$ が出てきて，2年に1次関数 $y=ax+b$，3年に2次関数 $y=ax^2$ が出てくる。さらに高校へいって数Ⅰで2次関数 $y=ax^2+bx+c$，分数関数，無理関数，基礎解析で指数関数·対数関数·三角関数と順に学ぶようになっている。こうして個別の関数がやさしいものから少しずつ複雑になっていくのでは，まるで《関数の博物学》のようなものであろう。関数というのは際限なくむずかしくなっていくものだという印象と，それぞれの個別関数についての特殊な技法（記号や約束，グラフの形，性質）を学ぶのが関数の学習だという観念を強く植えつけてしまうだろう。わたくしは，関数をわからなくしている大きな原因がこのステップバイステップのカリキュラムにあると思っている。

そして銀林は，「ステップバイステップのカリキュラム」に代わって，「中学1年か2年で，式表示など無視していろいろ多様な関数(式で与えられる場合，グラフのみの場合，物の対応，量的関数 etc)を登場させて，一挙に関数の一般概念をつくってしまった方がよいのではなかろうか」と主張した。この指摘に関して，少なくとも「ステップバイステップのカリキュラム」という点は，その後の学習指導要領の改訂によっても，基本的には変わっていない。たしかに，一挙に関数の「一般概念」をつくってしまうようなカリキュラムを構築するのも，今後の可能性のある一つの方向である。なお，ここでの「一般概念」とは，前述の Vinner らの言い方に従えば，定義というよりは，イメージであろう。

5　中等数学における関数概念の指導の視点

中等学校の数学教師を志望している大学生を被験者とした，実験・調査研究がある。

Even (1993) による調査・面接の結果，多くの被験者は現代の関数の概念をもっていなかった。すなわち，関数の任意性 (arbitrariness) の認識はなく，一意性 (univalence) の要求の重要性と起源を説明できた者はわずかだった。このような関数概念は，被験者の教え方にも影響し，生徒に対して，現代的定義によってではなく，作業している関数の限定された概念イメージを使って関数を記述したり，意味の理解なしで生徒に従うべき手続きを教えたりする傾向があった。また Even (1990) の研究では，「これは関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ のグラフである（上に凸，頂点は第1象限，y 軸との交点は正のグラフ)。a，b，c は正か，負か，0かを説明せよ」という問題に対して，大部分の被験者は，上に凸の2次関数のときは，a は負になると答えるが，なぜそれが成り立つのかを説明できなかった。その被験者は，ごく少数の単純な2次関数を調べることによって，b は，対称軸が正の x を通るときに限り，正であるということを見つけた。こういった結果をふまえて，Even (1990, 1993) は次のように主張した。関数概念の本質的特徴である任意性，一意性を中等学校の教師は知る必要がある。しかし，現代の形式的定義（2つの集合の直積の部分集合）を教師が知るべきであるというわけではない。関数へのアプローチに柔軟になり，利用可能なアプローチの中からよいものを選択するよう生徒を手助けするために，教師自身も形式・表現・記号の知識と理解が必要である。また，数学の本性についての知識は，関数の実質的知識に影響する。

Wilson (1994) は，数学の内容（関数概念の応用）と教授法を統合するコースの影響を中心に事例研究をおこない，次のことを見出した。被験者の最初の関数の理解は，具体的な計算手続きの集まりというものであった。コースのなかで関数の理解は実質的に成長したが，授業の考え方は，狭い数学観によって支配されており，コース活動によってはそれほど影響を受けなかった。授業の単調さを打ち破り，おもしろくするために生徒にゲーム，コンピュータ・シミュレーション，などの活動をさせるというにすぎなかった。数学的手続きの意味を生徒に理解させることは重要ではないと主張したし，それらの活動が数学のより鮮明で意味のあるイメージを生徒に伝えるから使うというのではなかった。

これらの研究は，単に関数の知識（関数概念の理解）の不足が教え方を限定するというだけでなく，数学全体の知識・理解や数学観も関数の指導に影響を与えるということをも示している。なお，同様の研究結果については，大学生だけでなく，経験を積んだ教師の場合でも見いだされている（たとえば，Stein et al., 1990)。

3の被験者の回答が，日本の中等数学における関数教育の成果をよく反映しているとみなすことができれば，以上のことから，中等数学における関数概念の指導に関して，次のような視点が挙げられる。ただし，3は，1次関数・2次関数についての簡単な調査であるから，過剰な一般化はできない。ここで挙げた視点は，あくまでも，今後あらためて実証的な研究が必要とされる仮説である。

第一に，1次関数はプロトタイプになりやすいので，関数を学ぶさいの障害になることのないよう，配慮する必要がある。

第二に，関数の定義とイメージは区別する必要がある。関数の現代的な定義を知っていること自体よりも，むしろその定義に合う関数のイメージをもつこと，任意性・一意性を理解することが重要である。

第三に，関数概念の習得には，カリキュラムのあり方や，教科書における叙述の順序が大きな影響を与えている可能性があるので，配慮する必要がある。とくに，いつ，どのような関数の定義を，どのような文脈で生徒に与えるかを考えなければならない。

第四に，関数概念の習得には，関数のアプローチや計算等の手続きの意味を生徒に教える必要があるが，そのためには，指導する側の数学全体の知識・理解や数学観を豊かなものにする必要がある。

文　　献

Even, R. 1990 Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics,* 21, 521-544.

Even, R. 1993 Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24, 94-116.

銀林浩　1994　関数は科学革命の産物．数学教室，No.516，8-11.

マックレーン，S. 彌永昌吉（監訳）　1992　数学―その形式と機能．森北出版，pp.163-168.

文部省　1978　中学校指導書　数学編．大日本図書．

文部省　1989　中学校指導書　数学編．大阪書籍．

Schwarz, B.B., & Hershkowitz, R. 1999 Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30, 362-389.

Stein, M.K., Baxter, J.A., & Leinhardt, G. 1990 Subject matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Research Journal,* 27, 639-663.

Vinner, S. 1983 Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 14, 295-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. 1989 Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 356-366.

Wilson, M.R. 1994 One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25, 346-370.

Teaching of Function Concepts in Secondary Mathematics:

Focusing on Linear Functions and Quadratic Functions

Tsuyoshi SUGAOKA*

ABSTRACT

Problems connected with teaching of function concepts in secondary mathematics were examined focusing on linear functions and quadratic functions in the present paper. The subject content of function in secondary mathematics of Japan was extracted from the Course of Study now in use. Then the problem in teaching of the subject content was examined by the investigation research with subjects of college students and so on. Based on the result, the following viewpoints were submitted. First, it needs to be considered that linear functions tend to become prototypes. Secondly, the definition of function needs to be distinguished from the image of function. Thirdly, it needs to be considered that the way of curriculum and the order of the description in textbooks may greatly influence the acquisition of function concepts. Fourthly, the knowledge and the understanding of mathematics and the mathematics view of teachers need to be made rich in order to have students acquire function concepts.

* Center for Educational Research and Development