上越数学教育研究，第26号，上越教育大学数学教室，2011年，pp.1-12.

関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成

布川　和彦
学校教育学系

１．はじめに

小中学校における関数的な内容の学習では、共変性(covariation)に焦点を当てた見方と２つの量の関係把握に焦点を当てた見方とが組み合わさった捉え方となっていくことが必要と考えられる (布川, 2010b)。しかし、子どもたちの授業での様子を見ると、統合されているかどうかはともかく、前述の２つの見方の両方に言及がなされるとともに、いずれにも当てはまらない“きまり”により当該の現象を捉えようとしている様子が見られることがある。そこで本稿では、先行研究で取りあげられてきた上の２つの見方とは異なる“きまり”を包摂して考えるための視点を提案し、あわせてその視点から児童の学習過程を捉えることを試みる。

本稿ではまず、小学校４年生の伴って変わる量の授業における抽出児の学習について記述した後、それを考察するための視点を関連する研究の検討を通して設定し、最後にその視点をもとに抽出児の学習について考察を行う。

２．授業における抽出児の学習

ここではまず、考察の対象とする授業およびそこでの抽出児の学習について述べる。授業は教室の前後からのカメラに加え、抽出児４名に１台ずつ配置されたカメラにより記録を行った。

2.1 授業全体の様子

本稿で取り上げる授業は、小学校４年生１クラスにおいて行われたもので、65 分授業 4 回からなっている。教科書の内容を基本としながらも担当教師が配列などを工夫・変更しており、また授業に際しては教科書を用いずに実施された。なお、子どもたちはきまりを文字式で表現はしなかったが、以下では記述のわかりやすさから文字式で表現をする。その際、表の上段にあたる量を n で、下段の量を $f(n)$等で表す。

第１時はふしぎな時計の課題を扱った。この時計では表面と裏面の双方に針があるが、ただし表と裏で針がずれており、同じ時間にならない。両者のきまりを考え、表の時間が決まると裏の時間が決まるという場面から、伴って変わる量の学習に進めようという授業であった。なおここでのきまりは、表の時間と裏の時間をたすと 14 になるというものであった。

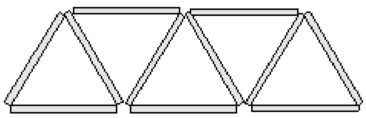
図１

第２時はストローで正三角形を並べて作っていくときの、正三角形の個数(n)とストローの本数($f(n)$)の表を作り、気づいたことを全体で話し合った。$f(n+1)-f(n)=2$、$f(n)$は奇数、$n\times2+1= f(n)$という考えが出された。また本数が 10 増えているところでは個数は 5 増えていることが出されたが、$f(n+1)-f(n)=2$ から導かれることが教師と児童とのやりとりにより示された。$n\times2+1=f(n)$について 2 や 1 が何を意味するかを教師が尋ねたが、説明できる児童はいなかった。

この説明を促すことを意図しながら、ストローで正方形を作るときの個数と本数($g(n)$)の表が扱われた。$g(n+1)-g(n)=3$、$g(n)$は偶数、奇数

を繰り返す、$n\times3+1=g(n)$という考えが出された。ここで教師は三角形のときの $n\times2+1=f(n)$、正方形のときの $n\times3+1=g(n)$の式が似ていることに注意を向け、式の意味を説明できないか再度問いかけた。ある子が三角形を 1 個追加する際に 2 本必要なので、それが「×2」であると発表した。教師が「×2 なら何かの 2 倍ではないか」と問うと何人かが説明したが、いずれも 1 個追加すると 2 本増えるので「×2」になるという説明であった。教師がクラス全体に個数が 1 から 3 のときに $n\times2$ を計算させ、図中の増加数との一致を確認することで式の妥当性が確かめられた。その後、三角形の場合について $f(1000)$を式を使って求めた。最後に、正方形の $n\times3+1=g(n)$についても各自が同様に説明し、$g(1000)$と $g(45625)$を求めた。

第３時は正方形のブロックによる階段(図２左)が取りあげられた。教師が 3 段の場合までをブロックで提示した後、順番に変わっているものを尋ねた。段数、正方形の個数、高さ、増える数が出された。児童とのやりとりを通して表が作られ、上段は段数(n)とすぐ決まったが、下段は階段の形とする意見があり、話し合いの後で正方形の個数($f(n)$)に決まった。表を先まで作らせてからきまりを問うと、$f(n+1)-f(n)$が+2、+3、…と 1 ずつ増える、$f(n)+(n+1)=f(n+1)$、$n+(n-1)+\cdots+1=f(n)$、$n+f(n)+1=f(n+1)$というきまりが出された。$f(n)+(n+1)=f(n+1)$については、前の階段の右あるいは下に次の段数分の正方形を付けると次の階段になることで確認された。$n+f(n)+1=f(n+1)$については、$f(n)+(n+1)$と同じではないかと教師が指摘したが、発表した児童は納得せず、課題として残された。

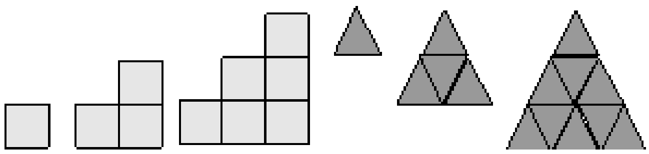

図２

前時で三角形と正方形で同じようなきまりがあったことから、階段の場面でも正三角形で考えられないかとして、ピラミッド(図２右)が導入された。教師がブロックを用いて 2 段目までを提示した後、各自にブロックを配布して続きを考えさせた。5 段の場合まで個数($g(n)$)を発表させ、表にまとめた。気づいたことを問うと $n+g(n)+(n+1)=g(n+1)$、$n\times n=g(n)$が発表された。前者の発表では、それを利用して $g(6)$を求めた。また後者に関わっては $g(1000)$も求められることが全体で確認された。さらに後者について児童から説明がなされた。その子の説明は、3 段の場合であれば、ピラミッドを 3 個ずつ 3 つの部分に分けるものであった(図３(a))。2 段と 4 段をその子が説明した後、5 段を 5×5 とわかるように並べることを教師が全体に問うた。指名された子は、5 段のピラミッドを適宜並べ替えて、図３(b)のような形を 5 つ作った。これにより $n\times n=g(n)$が認められた。他に“方式”がある人を問うと、挙手をして指名された児童が、$(n-1)\times n+n=g(n)$という考えを発表した。

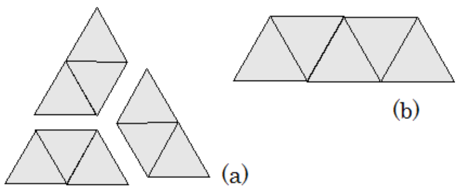

図３

第４時の最初に前時の続きが行われた。正方形の階段について、2 段の右側に縦に 3 個の正方形を加えると 3 段になるから個数が 3 増えるといった説明を教師が行った。三角形のピラミッドについて出されたきまりを、教師がなぜそうなるのかに触れながら振り返った。$n+g(n)+(n+1)=g(n+1)$については、$n+(n+1)$が個数の増加分 $g(n+1)-g(n)$に等しくなることを教師が説明した。$n\times n=g(n)$については、四角数の並べ方による説明を教師が行った。$(n-1)\times n+n=g(n)$については、$n\times n$ と同じになるという考えを児童が発表した。その後、正方形の階段について $f(n-2)+(n-1)+n=f(n)$というきまりが発表されたが、他の児童が前時に出した $n+(n-1)+\cdots+1=f(n)$と同じとの指摘があり、クラスもこれに納得したため新しいきまりとしては認められなかった。

第4時の続く部分では、風呂に水を入れる時間と水の量が扱われた。2分ごとに3Lずつ増える表が0分から14分まで提示された。児童からグラフにした方がよいとの意見が出たが、教師はまず場面に関わる話をした。児童から折れ線グラフにしたらよい、間はわからない、水が増えるのでグラフはあがっていくだけ、といった意見が自然に出された。それを受け各自がグラフをかいた。その後、教師がある子の2〜14分までをプロットし、それらを結んだグラフを示したところ、0分のところも結ぶべき、1分のところもあるはずとの意見が出された。さらに14分で止めるかその先も含めるかが話題になったが、縦に3、横に2いくことで次の点がとれること、それが表で3ずつ増えることに対応することが確認され、簡潔に先を考える方法として線を延長することも全体で確認された。棒グラフにした子がいることを教師が知らせ、折れ線グラフがいいか、棒グラフがいいか、どちらでもいいかを尋ね、それぞれの理由を述べさせた。変化がわかりやすいこと、また間の部分もわかることから、折れ線グラフの方がわかりやすいとまとまった。最後に間の部分を求めることが問題とされ、計算する、グラフをよむ方法が出された。具体的に3分の求め方を全体で考えた後、19分、25分のときを各自で考えてから、全体で確認した。3分や19分のときを計算する際に1分で増える1.5Lを2分や18分のときの量にたしていたが、25分のときは24分がグラフや表にないことから、1.5×25という考えが出された。この考えをもとに1000分のときの量を求めて授業を終えた。

2.2 抽出児の様子

本稿では、抽出児のうち授業でも発言が多く、積極的に授業に参加している様子が見えた一人の児童・久美(仮名)をとりあげる。

第1時の最初の予想では、3時の裏は5時とした。5時の裏を考えているときに、2時間かと思ったら3時では急に11時が出てきてわからなくなったと教師に話した。この問題については自分の予想を出せなかった。個人用の時計が配られて少し考えた後、教師が自分で問題を作るよう問うたが、作る様子は見られなかった。教師に向かい首を横に振り、どうなってるというのを発見できないと問題もできないと発言した。数値対を表のように並べ直して確認している途中で「わかった」と発言し、これ以降は表の時間に対する裏の時間を皆と一緒に発話した。確認後に自分から「表が1ずつ増え、裏が1ずつ減っているから、1は最後に来るのではないか」と発言した。また「表が3増えたら裏は3減るのか」と質問した。教師が一緒に表を確認したが、「なんでそうなるのか」との疑問を述べた。他の子のたすと 14 になるとの発言にも、なぜ14になるのかと発言した。時計を見て考える際には、あまり時計を操作する様子は見えなかった。また他の子が時計で表が1時間進むと裏が１時間戻るという考えを発表したが、特に納得したという反応は見えなかった。最後の6時半の裏については7時半とすぐに書いた。授業後に教師にどうして14になるかを質問し、時計での説明を受けた。

第２時で三角形の課題を最初に考えるときには、+2と書きながら本数を49本まで書き、その後、個数を24まで書いた。教師が気づいたことを尋ねるとすぐに挙手をした。1個と6個で3本から13本に増え、そのとき個数は6倍になっているという意見が出た際は、6倍に賛成していたが、教師が2個と7個で検討した際には「それ+5」「それかけたらあまり出ちゃう」「3と8とすると、全部5たすだからそうかなと思った」と発話した。教師が+2を5回するので本数が10増えることを説明し、納得するかとクラスに尋ねると久美は小さく頷いた。また教師が個数が 6 個増えたら本数はどうなるか尋ねると「20」と呟いた。$n\times2+1=f(n)$が発表されると「はあ？」と発話した。「×2 ってどういうこと」と言うが、直後に「わかった」と言い挙手した。

正方形の問題について考えた際には、最初 4, 8, …と 4 の倍数を 32 まで書き、さらに 52 まで伸ばした。全体で表を埋めた際にこれらを消し、正しい本数を 4 から 19 まで書いた。16 や 19 は教師が黒板に書くよりも前に書いた。また教師が 7 個と 8 個の本数を誤って 23, 26 と書いた際には「えっ？」と発話した。誤りに気づいた理由を教師が問うと「3 ずつ」と発話した。気づいたこととして $n\times3+1=g(n)$を他の子が発表すると、残念だという様子をし、またその子が再度きまりを発表する際に式を一緒に発話した。三角形の式の成り立つ理由を説明した児童が次の三角形を作るのに必要な本数が 2 でそれが×2 だと説明すると、久美は頷き、教師がどうしてと問うとすぐに挙手をした。教師が 2 本増えるなら+2 ではないかと問うと「1 つ作っていくごとに 2 本ずつ増える」と発話した。前に出て同様の説明をした際に、教師が黒板の式の「×2」を指し、これが増えていく本数なのかと問うと、久美は「本数っていうかなんていうか」と言い口ごもった。別の児童も前に出てきて、1 番目と 2 番目の三角形の共通の部分の重複を指摘し、だから 2 本で足りると説明するとそれに賛同する発言をした。さらに表の 1 個のときの 3 本を指し、それが最初の三角形を作るのに必要な 3 本であること、しかし次を作るには重複があるので 3 本というわけではないことを説明した。教師が+1 は重複した分かと尋ねると、最初は反応しなかったが、再度尋ねると頷いた。$f(1000)$を問うとすぐにノートに 2001 と書いた。$f(343)$についても 686+1=687 と書いた。正方形のときの式の説明を考えた際には、正方形 4 個のときの図をかき、「1 つつくるごとに　×3　そして、かさなりあうもう一本が+1、それで、正方形」と書いた。図では、2 番目の正方形のコの字の部分を太くかき上に「×3」と書き、1 番目と 2 番目に共通な辺も太くかき、そこに矢印をつけて「+1」と書いた。ある子が左端の 1 本を「+1」の分と言うと、最初は「なんで」と言うが、その後「そこでもできるんだ」と発話した。ただその子が 1 番目の残りのコの字を含めコの字が増えるから「×3」とする考えを説明しているときは、特に反応しなかった。別の考えを教師が問うと挙手して指名され、ノートに書いた考えを説明した。$g(45625)$を問われると、すぐに 45625×3 を筆算で計算し、答えを求めた。

第 3 時で正方形の階段について自分で考える場面では、表を既にノートに書いていた隣の児童といろいろと話をした。途中で、その表を用いて、正方形について $f(n-1)+n=f(n)$を隣の子に説明し、表の中に右上向きの矢印と下向きの矢印を書き込んでいた。最初の子が増える個数が 1 ずつ増えることを発表し、教師がこれに気づいた人を尋ねると挙手をした。次の子が前の個数に次の段数をたすというきまりを発表すると、「もっと詳しく言えます」と言い挙手をした。なぜそうなるかをある子が説明している際に、「わかった」と言い挙手をした。説明の途中で、「その形はもとの形ではないから、一番下の 3 つがあるから」と発言した。教師が図 4 (a)のような部分を指して「これが増えたということ？」と尋ねると、「違う」と首を横に振った。「2 番目の形があるでしょ、その形が、下の 3 つがあるでしょ、その上が 2 番目の形だから、その下の 3

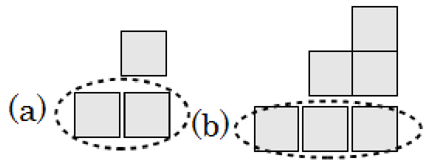

図 4

つが増えてるから+3」と説明した。教師が図 4 (b)の部分を指して「ここが増えてるって言いたいわけね」と言うと今度は頷いた。教師が 1 段と 2 段を押さえて「こっちの場合は？」と尋ねると、「そっちの場合は」と言って止まり、近くの子が「まかせろ」と言って挙手をすると、その子にまかせようとした。さらに続けるが「その 1 番は、なんて言うんだろうな」として止まってしまった。教師が久美のは下が増えるが前の子のは横が増えると関係づけると、納得した様子を見せた。$n+f(n)+1=f(n+1)$というきまりが発表されている途中で「わかった」と何度か大

きな声で発話したが、以前に出されたきまりとの関係に気づいた様子は見えなかった。

三角形ピラミッドの問題では、ブロックで 2 段を作っている途中で、隣の子の作った表を見て話をした。その表では 1 段は 1 、2 段は 4、3 段は 8、4 段は 13 となっていた。さらに隣の子が 19, 26, 34, 43, 53, 64 と続けた。その後ブロックで 2 段を完成させ、それとは別に 3 段を作り始めた。その際には、まず正六角形を作り、その周囲に 3 つのブロックをつけることで 3 段を作った。それを数えて 9 となり、隣の子と少し話をした後、改めて 3 段を作るが、その際も正六角形を最初に作った。この後ではピラミッドを作ることもなく、また自分で表などを書く様子も見えなかった。全体での確認で、3 段のときが 8 という意見が出た際には「ちがう」と発話し、また 4 段のときが 16 という意見が出ると、急に隣の子のノートをのぞきこんだ。そのとき、隣の子は自分の表を消していた。さらに隣の子が、個数の間に+3、+5、+7、…と書いていくのを見ていた。教師が発見したきまりがある人を尋ねると久美も挙手をした。二人の子がきまりを発表した際には、特に先に言われたといった反応は見せなかった。また $n \times n=g(n)$のきまりが分かるかと教師が問うと、小さく手を挙げようとした。ブロックを 3 個ずつ 3 グループに分けた説明に接した際には、特に納得したといった反応は見せなかった。ただ最後に教師がそのきまりを認めてよいかと尋ねると、よいとして挙手をした。最後の子が$(n-1) \times n+n=g(n)$を 3×4 に 4 を足すとして発表すると「どこから 4 が出てきた」と何度も発話した。また「まだある」と言って挙手をした。教師がそれをノートに書いておくよう言うと、隣の子と「いっしょ」と書いた。隣の子の観察者に対する説明では、$(n-2)+n+g(n-1)+1=g(n)$（4 段目について、2+4+9 は 15 でそれに 1 をたすと 16 になると説明した）というものであった。それに対し久美は「でも、プラス 1 がどこから出てきたかが話せないんだよね、思いついただけだからね」と話した。

第 4 時で前時のきまりを考えた部分で、$(n-1) \times n+n=g(n)$が $n \times n$ と同じとする発表があり、教師がどうかと問うと「思います」、意味が分かるかと問うと「はい」と発話した。最後に隣の子と一緒に指名され、正方形について$f(n-2)+(n-1)+n=f(n)$を発表した。教師は後半の課題に移るが、席に戻った久美は段数とブロックの個数の表を段数が 1～7 まで作り、正方形の階段の場合の個数を記入した。その表で、2 段の個数 3 から段数 3 に向かう矢印と 1 段の個数 1 から段数 2 に向かう矢印を書き入れた。その後は後半の課題の表を写した。水の量の表で、自分から 0 と 2、4 と 6、8 と 10、12 と 14 の間に弧状の線をつけ、それぞれに「+2」と書いた。またそれらに対応する水の量(0 と 3、6 と 9 等)の間にも弧状の線をつけ、それぞれに「+3」と書いた。

グラフをかく際には、1～4 分まではそれぞれの水の量を数えてプロットをした。2 分については数え間違えて 5L をプロットした。また 9L や 12L については、10L の太い横線を基準にプロットの位置を見出していた。5 分-15L については、12L から 3L 増やす形でプロットした。18L、21L も前から 3L 増やすことでプロットする位置を決めた。ここで原点にもプロットし、隣り合う点どうしを定規で結んだ。2 分の部分を特に修正することなく、グラフの紙をノートにのり付けした。教師ができた人を尋ねた際にも挙手をし、「できました」と発話した。隣の子のノートを見てから、グラフの 2 分の部分を指で押さえ、2 分の点を消し、定規を当てるが、その後、全部の点や線を消した。原点と 7 分–21L の点を結ぶように直線を引き、その線上に各分の点をプロットした。14 分以降も線を引くことが全体で話題になり、教師が納得した人は延長するよう言うが、久美は特に線を延ばさなかった。折れ線グラフと棒グラフのどちらがいいかを尋ねられた際には折れ線グラフに挙手をし、両方ありに回りの子の多くが挙手をした際には久美は挙手をしなかった。折れ線グラフは変わ

り方を表すという意見が出ると、久美は「差がどれだけあるかわかりやすい、[左手と右手を順に出し]これとこれの差がどれだけあるかが」と発言した。教師が差なら棒グラフもわかると指摘すると、「まあね」と言い、軽く頷いた。教師が 3 分のときの量を求めるよう言うが、久美は特に何も作業をせず、前方を見ていた。しばらくして答えが出た人を教師が訪ねた際には挙手をせず、まだの人を訪ねると小さく挙手をした。グラフから 3 分の水の量をよむ考え方を全体で確認した際になってノートに「Q 3 分の時の水の量をもとめる／A 4.5*l*」と書いた。19 分のときの量を求める際には、グラフ横軸の 19 分のところから右手の指を垂直に上方に滑らせ、グラフとの交点をその指でおさえ、そのときの縦軸の位置を左手の指でおさえ、「できた」と発話した。教師がグラフでできた人と尋ねると挙手をし、皆で答えを言うときには一緒に声を出した。25 分の量を求める際になって、19 分のときに関わって出されていた 3÷2=1.5 の式を写し、発表にあわせて「1.5×25＝」と書いた。さらに自分で 1.5×25 の筆算を行い、答えを 37.5 と求めた。1000 分のときを教師が問うたときには、ノートに何も書かなかった。

３．数学的対象としての関数

3.1 対象の構成の問題

Font ほか (2010)は、数学の授業で教師や教科書によって対象のメタファーが用いられること、すなわち数学的存在物(mathematical entities)を物理的な対象のように考える語り方がされることに着目している。そして、教師や教科書が、数学的対象をある表現と同一視することがある一方で、対象と表現を区別することもあり、そうした数学の授業でのディスコースが数学的対象の存在をその表現とは独立な何かとして考えることにつながると述べている。例えば、「関数 $f(x)=1/x$ が与えられたとき…」という教科書の記述を彼らは同一視する例としてあげている(p. 17)。また、関数は式や表、グラフなど多様な仕方で表現できると説明することは、区別していることとして考えられている。

こうした側面は我が国の教科書においても見ることができる。例えばある中学校 1 年生用の教科書では、「この直線が、関数 $y=2x$ のグラフである」と関数を $y=2x$ という式と同一視するかのような言い方がされる一方で、「次の式で表すことができる関数のうち…」と式はあくまでも関数の表現方法の 1 つとする言い方も見られる。さらに、こうした言い方においては、関数はグラフや式で表現できる何物か、数学的対象として捉えられている。しかし、その直前でなされている関数の定義は「ともなって変わる 2 つの変数 x, y があって、x の値を決めると、それに対応する y の値がただ 1 つ決まるとき、y は x の関数であるという」となっており、ある量の特性として関数が導入されている。

このように関数が数学的対象として確立していない影響はその後の学年に現れる。中学校 2 年生では「y が x の関数で、$y＝3x+10$ のように、y が x の 1 次式で表されるとき、y は x の 1 次関数であるという」という説明がなされている。これは、二等辺三角形を 2 つの辺が等しい「三角形」と定義し、1 次式を次数が 1 の「式」と定義するのとは異なり、1 次式で表される「関数」という言い方にはなっていない。上田(2009)は自身の中学校教師としての経験から次のように述べている:「生徒は関数の学習に対して『訳が分からない』『何をしているのか、何のためにしているのか分からない』『得体のしれないもの』などの感覚を持っていることが少なくない」(p. 41)。こうした「訳の分からなさ」「得体のしれなさ」の 1 つの原因が、関数が思考や探究の対象として確立していないことにある可能性も考えられる(*cf.* 布川, 2010a)。

関数が 1 つの集合から数の集合への写像であり (一松, 1979, p. 432)、写像は集合 A から集合 B への一意対応であり(p. 62)、そして対応が「A の各元 a に対して B の部分集合がそれぞれ 1 つずつきまるある規則」(p. 61)だとすれば、関数

は一定の条件を満たす規則だということになる。また遠山 (1972)は関数がある種の働きや機能であるとして、この側面を強調するために例えば $y=x^2$ について$(\quad)^2$ という書き方をしている。確かに教科書でもコラムなどの用語の由来で、関数は function の訳であり、function には機能や働きという意味があること、関にはかかわるという意味があるので、関数は「数量の関係を表すことばと解釈することができる」との説明を行っている。「y は x の関数」という言い方には、こうした規則や働きから「関数概念を対象化する(objectify)」(Slavit, 1994, p. 4)ところまで含まれているようには見えない。

数学的対象として関数を捉えることは、関数のグラフから全体的な傾向や傾きなどの特徴を考察することで促されると考えられることが多い (Slavit (1997)の先行研究のまとめを参照)。生徒が点ごとの対応に注意を向け、グラフの変化や連続性、全体性に関わる情報が用いられることが少ないという傾向があること (Yavuz, 2010)、また現実的な場面との関連づけがグラフの解釈を促すこと (Mahir, 2010) を考慮すると、場面と関連づけながら、グラフの特徴を考察することが、対象としての関数の構成を促すとも考えられる。さらに、Hewitt (2008) がいくつかの数から後続の数を効果的に求めさせる課題は危険を孕み、もととなった文脈を分析することが重要だと指摘していることを考えると、より一般的に、場面と関連させた特徴の考察が重要とも考えられる。これは関数の学習に関わる先行研究を検討した布川 (2010b)の指摘とも整合している。

しかし、グラフに関わっては、場面とではなく、式や表といった他の表現との間で翻訳をすることも重視されている。このとき、表現間の翻訳で単に表現の変更に注意を向けるのではなく、表現が変更されても表現されるものは変わらないという理解がなされることにより、そこで表現されるものとしての数学的対象を捉える、という側面に注意を向ける立場が見られる。例えば Duval (2006)は、数学的対象は直接知覚されたり観察されたりするものではなく、「それにアクセスしたりそれを扱ったりする唯一の方法は記号や記号的表現を用いることである」(p. 107)との基本的立場から、「様々な表現体系の中で生成される記号的表現を通じて、学習者はいかにして同一の表現された対象を認めることができるのか」(p. 108)を問うている。表とグラフの間の変換において、点ごとの対応にのみ注意が向けられた場合、そうした変換だけでは関数概念の初期の学習にとって不十分であるという Yavuz (2010)の指摘を想起するならば、表現間の翻訳から自動的に数学的対象が生起するとは限らず、Duval (2006)の問いかけは意味あるものと言えよう。

さらに Schwarz & Dreyfus (1995)は関数の各表現が曖昧さを持つことを指摘し、表現間の関係に留まらず、いくつかのグラフの間の関連性に目を向けている。グラフでは軸のとり方を変えるとその見た目は変化するが、この見た目の異なるものの間で不変なものが関数の性質であり、見た目の異なるものを結びつけて「関数の統一的(unified)統合的(integrated)なイメージ」(p. 275)を作ることが大切であること、そうした不変なものが「同一の抽象的な関数から生じているかどうかを判断すること」(p. 289)が必要となることを指摘している。

Slavit (1994, 1997)は関数の構造的見方の 1 つとして性質志向的な見方を提唱しているが、それによれば、関数に関わるさまざまな性質を認識することで、その性質のもとになったであろう数学的な実体として関数の構造的な捉え方が可能になるとされる。Slavit (1994)は「関数と様々な表現における関数の諸性質を関連づけ」られるようになることが、性質志向的な捉え方の形成を示すとしている(p. 35)。

Slavit (1994)はグラフ電卓の効果を調べていることもあり、グラフがこうした捉え方を強化する要因であるとも述べている。しかし、性質志向的な捉え方は、いくつかの性質を「持つ、

あるいは持たない数学的対象として関数の観念を物象化できる」(Slavit, 1997, p. 266)ことを意味しているとすれば、グラフに限らず、ある種の性質のもとになるものとして、いわば「性質の運搬者」 (van Hiele, 1984, p. 245) として関数を捉えることが求められていると考えられる。ある表現が可能となることも含め、いくつかの性質が数学的対象から生起したとする捉え方とも言えよう。

こうした数学的対象は、場面で生じている現象とは異なると考えられる。Lagrange (2010)による関数学習のためのソフトウェアでは、関数の式やグラフを扱うシンボル的ウィンドウと、作図ツールのウィンドウを備えており、両者は関連するが異なる setting を提供するとされる。Lagrange(2010)は作図ツールでの図形の要素や測定値の間の依存関係をシンボル的ウィンドウに転送 (export) する際にモデル化と呼んでおり、関数やその表現を図形的な現象のモデルと捉えていると考えられる。図形ウィンドウで生じている現象としては、Falcade *et al*. (2007)のように図形的要素の共変的関係だけではなく、測定値間の依存関係に注意を向けている。しかし、図形ウィンドウでの現象からシンボル的ウィンドウへの転送をモデル化と考えることから、両者で扱われている対象は異なると考えられる。つまり、場面での数量的な現象とは異なる数学的対象としての関数を想定する可能性を示唆している。

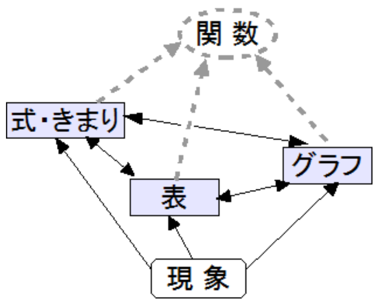

図５

以上で述べてきたことを総合し、模式的に表現すると図５のようになる。場面における数量的現象を自然言語(きまり)を含む多様な表現により表し、それらが適宜関連づくことにより、場面から抽象された数学的対象としての関数が推定されるようになることを示している。また、こうした学習初期の状態を、数学的対象としての関数が確立した場合の以下のような状態と区別をすることも意味している。図６では、記号や表現を通してのみアクセスされる(Duval, 2006)数学的対象としての関数が上部の円盤であり、そうした関数により現象をモデル化し、またモデル化を通して現象に関わる新たな情報を提供していくことを示している。

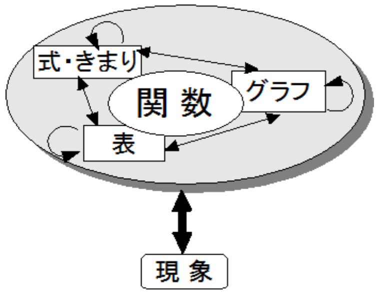

図６

3.2　きまりと対象の構成

前項のような立場に立つと、中学校で行われる表現間の翻訳を行う活動には、「多様な表現に存在する関数の特定の性質についての気づき」(Slavit, 1994, p. 3)を促し、「生徒が関数概念を対象化する(objectify)」(p. 4)という側面もあると考えられる。しかし、前節でとりあげた小学校４年生の学習では、表から式を作る活動は第２時から見られたが、表からグラフを作ることは第４時になって行われ、またグラフから式を作ることは外挿で値を求めるためになされただけであった。この点では図５のような関連づけはあまり生じないと考えられる。ただし、表から見出されたきまりを式と同様、数量的現象の性質を表現したものとみなすならば、複数の表現に加えて、授業で出されたきまりを関連づける中で、そうした性質の運搬者を認めていく側面は考えることができる。

図形に関わる van Hiele の思考水準の第２水準では「性質や他の図形との関係の集まりとして」(van Hiele, 1986, p. 62) 特定の図形を捉える

が、それらの性質はその図形の「特徴(characteristics)から生じたもので」、「図形は性質で認識され、これによりイメージは背景に退く」(p. 62)とされる(図７)。ここで特徴は中心的

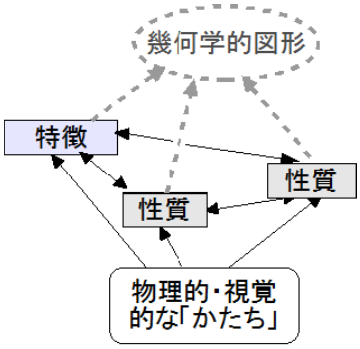

図７

な性質とされる(p. 64)。これを参考にすると、場面の数量的現象の特徴的なきまりと他のきまりを関連づけることが、現象が背景に退き、数学的対象としての関数が生じることを促すと期待されよう(図８)。

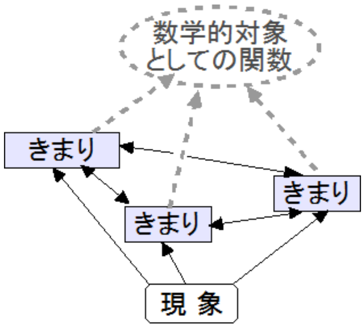

図８

４．数学的対象の構成ときまりの関連づけ

本節においては、前節で述べてきた数学的対象の構成に関わる活動という観点から、第２節で取り上げた小学校４年生の学習を考察する。

久美は全般的に伴って変わる２量についてのきまりを考えることに積極的に関わり、第１時で「どうなってるというのを発見できないと問題もできない」と発言するなど、きまりを考えようとする傾向が見られ、発言も多かった。また第１時で「なんでそうなるのか」との疑問を述べ、なぜ 14 になるのかと発言し、第２時前半で「×2 ってどういうこと」と発話し、さらには第３時の最後では自分が隣の子と考えたきまりに関わり「+1 がどこから出てきたか話せない」と補足をするなど、きまりに現れる数の意味についても注意を向けて学習をしていた。

共変的な見方と関数的な見方という点では、第２時の三角形の問題では+2 のきまりにより表を埋めていたが､第２時後半では $n\times3+1=g(n)$ を他の子に言われて残念そうにしたり、$n\times2+1=f(n)$の理由に関わり挙手をして発表するなど、２つの見方をすることができていたと考えられる。第４時のグラフの作成では、最初は各時間に対する水の量をプロットするという関数的な見方に基づいているが、途中から増え方を利用した共変的な見方に基づくかき方になっており、２つの見方を組み合わせることで１つのグラフを作成している。また水の量の表で久美が自ら+2 や+3 を記入していたことや、折れ線グラフは変わり方を表すという意見が出た際に、左手と右手を順に出して時間的に生じる差を表現しながら｢差がどれだけあるかわかりやすい｣と発言したことは、久美が変化の観点からも表やグラフを捉えていたことを示している。

他方で、前節で見てきた特徴的なきまりと他のきまりとの関連づけという視点からは、久美の学習には次の２つの側面で不十分な点が見られる。

第一の側面として、きまりの間の関連づけにあまり注意を向けていないことがある。第４時前半でピラミッドについての２つのきまり $(n-1)\times n+n=g(n)$と $n\times n$ が同じかを検討した場面で、ある子の説明に対して教師がどうかと問うと「思います｣、意味が分かるかと問うと「はい」と発話した部分では、きまりの間の関連づけがなされたと考えることができる。しかしその直後には､正方形について $f(n-2)+(n-1)+n=f(n)$ というきまりを発表している。これは第３時で自ら見出した $f(n-1)+n=f(n)$を用いれば、$f(n-2)+(n-1)=f(n-1)$から $f(n-2)+(n-1)+n=f(n-1)+n$ となり、両者は関連づくきまりである [1]。しかし久美はこうした点には注意を向けずに、新しいきまりとして挙手をし発表していた。

また第３時の最後にピラミッドに関わり、$(n-2)+n+g(n-1)+1=g(n)$というきまりを見つけ、観察者に説明していた。しかしこれも、$(n-2)+1=n-1$ であることに注意をすれば、$(n-1)+n+g(n-1)=g(n)$ということになり [2)]、それ以前に出されていた $n+g(n)+(n+1)=g(n+1)$ と関連づくきまりであるが、「まだある」として挙手をしていたことから、久美と隣の子は新しいきまりとしてこれを捉えていたと考えられる。さらに、第３時で正方形の問題に関わり最後に出された $n+f(n)+1=f(n+1)$ については、久美が自分で見出し、表中に矢印でも表現していた $f(n)+(n+1)=f(n+1)$ と関連づけられるものであるが、教師の指摘があったにも関わらず、久美は特に関連づけに気づいた様子を見せなかった。

久美が提案したこれらのきまりは、漸化式のような形になっており、共変的な見方や関数的な見方に単純に類別されるものではない。しかし、3.2 で述べてきた視点から考えた場合には、そうしたきまりが、共変的な見方によるきまりや関数的な見方によるきまりを含め、他のきまりと関連づけられることも学習における重要な側面となる。久美の学習過程からは、自分がそのとき考えているきまりが、同じ場面で見出された他のきまりと関連づくかということに、十分意識が向けられていないことが示唆される。こうした意識が不十分であるということは、それらのきまりが同一の数量的な現象の現れであるとの感覚が得にくくなる可能性を生み出す。

実際、きまりが関連づけられ、同じ数量的現象の現れと捉えることで、理解を深められた可能性のある場面が見られた。第２時の三角形の課題について、久美は $n\times2+1=f(n)$ の $\times2$ の意味について三角形を作ると 2 本ずつ増えるとして説明した。ここでは、第２時の最初に自分で見つけたきまりと今のきまりを関連づけようとする様子が見える。ただしこの関連性をより意識化するためには、第２時前半の話し合いで取りあげられた“+2 を 5 回するので本数が 10 増える”といった、+2 を何倍かして増え方のきまりを説明することが必要である。このきまりも関連づけ、$n\times2$ よりも $2\times n$ と捉えなおすことで、場面についてのより整合的な理解が得られ、それらのきまりの背後にある一つの数量的現象の把握や、そこから派生する性質の運搬者の推定につながる可能性があったと考えられる。

第二の側面として、場面の特徴的なきまりに注意を向けるという意識が低いことがある。上で述べたように、久美はきまりに現れる数の意味を問題にする傾向があり、きまりと場面との関連については注意を向けていたと考えられる。他方で、第２時や第３時では、最初の課題で見出されたきまりを、当該の場面の探求をすることなく、新しい場面に適用していた(*cf.* 布川, 2008)。第２時では、三角形の問題で見出した、本数が 2 ずつ増えるというきまりを、すぐに正方形の問題に適用して表を作成した。このとき、正方形の場面を探求することなく行っているために、重複を考慮せず、四角形の「4」を単純に使用し、4 ずつ増えるというきまりに基づいて表を作成した。しかも、クラス全体で表を確認するまで、この表の誤りに気づかなかった。また三角形ピラミッドの問題では、正方形の階段で見つけた増える個数が 1 ずつ増えるというきまりに基づき隣の子が表を作成していた際に、久美はブロックでピラミッドを作っていたが、表の誤りを指摘することはなかった。久美と隣の子が表の誤りに気づいたのは、やはりクラス全体での表の確認においてであった。

さらに場面を探求するにあたっても、きまりとの関連に注意を向けない様子が見られた。今のピラミッドの問題では、前述のようにブロックでピラミッドを作っていたが、2 段の状態を作った後に 3 段の状態を作る際に、2 段の状態に 3 段目を追加して作るということはなく、2 段の状態とは別に 3 段を作り、しかも最初にブロック 6 個で正六角形を作り、その 3 つの辺にブロックを 1 個ずつ追加することで 3 段のピラミッドを構成した。つまり、隣の子が増加分に関わるきまりをもとに表を作り、久美もこの子

と作業の前後に話をしているにも関わらず、増加分に注意を向けた作り方にはなっていなかった。第３時前半の正方形の階段では、久美は 2 段の下に増加分を追加すると 3 段の場合になることを発表したが、ただしこの場合も、1 段から 2 段に増える場合を教師が尋ねると、発言が止まり、他の児童に発言を譲ってしまうなど、他の段にも共通な構造としては意識をしていなかった。正方形の個数についてのきまりとしては常に次の段数の分だけ増えることを見出していながら、場面の構造化については 2 段から 3 段への変化のみに注意が向けられ、一連の現象を特徴づける変化として、下の段の増加を捉えていなかったことになる [3)]。

場面の構造化におけるきまりとの関連性について意識が不十分であることは、第２時の問題における重複の扱いにも見られる。三角形の問題で $n\times2+1=f(n)$の式の意味を他の児童と一緒に黒板の前で説明した際に、1 番目と 2 番目の三角形の共通部分の重複に言及したことを受け、教師に式中の「+1」が重複した分かと問われて頷いた。その後、正方形の場合の説明を各自で考えた際にも、「かさなりあうもの一本が+1」と書いた。確かに、1 番目と 2 番目の重複はコの字に含まれない辺であり、これを加えることで+1 がなされるが、しかし 2 番目と 3 番目の重複、3 番目と 4 番目の重複、…を考えて+1 はしないことから、今の場面で生じている現象全体としては重複自体が+1 の意味ではない。つまり、久美は、正方形の階段のときと同様、正方形 45625 個のときの本数を同じきまりで求めているように、きまりは一連の現象を表していると考えていながら、場面の構造化については一連の現象を特徴づける構造としては十分意識していなかったことになる [4)]。

なお、ピラミッドについての $n\times n=g(n)$という きまりの成り立つ理由を図３のような並べ替えで確認をした際に、久美がその説明に特に納得した様子も見せなかったものの、きまりを認めてよいか教師が尋ねた際によいとして挙手をしたことは、場面の構造化が任意の n について同様に行えるかが十分意識されてはいないことを、したがって、現象の特徴的なきまりに注意を向けない傾向を、間接的に示すものと言えよう。

上の２つのことから、久美の学習過程においては、式中の数の意味に注意を向けることは行われつつも、場面の特徴的なきまりに注意を向けることや、きまりを関連づけることはあまり行われていなかった。3.2 の視点からは、多様なきまりの背後にある同一の数量的現象を把握することや、そこから派生すると期待される性質の運搬者を推定することには、つながりにくかったと考えられる。

５．おわりに

Hershkowitz *et al.* (2001) は、1つの場面を表す多様な式が同値なものであることを吟味する活動を、文字式の学習において重要なものとして提唱している。そこから表現を越えた数量関係が構成されるとすれば、本稿で述べてきたように、場面を表現したり、記述したりするものを関連づけることも、場面に含まれる数量的現象の把握につながることが期待されよう。こうした、関数の学習における学ぶべき対象、探究すべき対象を構成する、という点からその学習や指導のあり方を検討することも、必要ではないかと考えられる。

謝辞：授業の参観を許可下さるとともに、本稿の考えに関わるいろいろなヒントを頂きました青木弘明先生にお礼申し上げます。

註および引用文献

1) $f(n)=n+f(n-1)=n+(n-1)+f(n-2)=\cdots$ と、$f(1)=1$ とから、クラスでの話し合いで認められたように、$f(n)=n+(n-1)+\cdots+1$ でもある。
2) つまり、1 つ前の段数を加える代わりに、2 つ前の段数を加えて、後から 1 を加えている。
3) 特定の n に対する場面の構造化だけに注意が向き、一連の現象全体を特徴づける構造化に注意が向きにくいことは、前述した“点ごとの

対応に注意を向け、全体性に関わる情報が用いられることが少ない”という Yavuz (2010) の指摘の一つの現れとも見える。

4) 一方で、1 番目の正方形の本数 4 本をそのまま残した上で、2 番目の増加を考えることは、正方形の個数と本数の表には合致した場面の構造化ともなっている。

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 317-333.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, *30* (1), 15-19.

Hershkowitz, R., Arcavi, A. & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning: The case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32* (2), 255-265.

Hewitt, D. (2008). A function machine. *Mathematics Teaching*, *211*, 3-6.

一松信. (1979). 新数学事典. 大阪書籍.

Lagrange, J.-B. (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: Designing and experimenting the software environment Casyopée. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41* (2), 243-255.

Mahir, N. (2010). Students’ interpretation of a function associated with a real-life problem from its graph. *PRIMUS*, *20* (5), 392-404.

布川和彦. (2008). 算数の授業における小学校６年生の問題解決過程についての一考察：初期の意味づけから離れる過程に着目して. 数学教育学論究, *90*, 19-39.

布川和彦. (2010a). 解決過程の研究とその展開：理解の対象と漸進的理解という視点. 日本数学教育学会第 43 回数学教育論文発表会課題別分科会発表収録, 31-36.

布川和彦. (2010b). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, *25*, 1-10.

Schwarz, B. & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics* *29*, 259-291.

Slavit, D. (1994). *The effect of graphing calculators on students’ conception of function*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.

遠山　啓. (1972). 関数を考える. 岩波書店.

上田貴之. (2009). 関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて：中学２年「一次関数」の単元における影響についての一考察. 上越数学教育研究, *24*, 41-52.

van Hiele, P. M. (1984). A child’s thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn, NY: Brooklyn College, C.U.N.Y. (Original work published in 1957).

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orland, FL: Academic Press.

Yavuz, I. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41* (4), 467-485.