教育実践研究　第21集（2011）　95－100

［算数・数学］

判断力・表現力を育てる授業の工夫

－方程式の指導を通して－

小池　純一*

1　主題設定の理由

最近の数学の授業において，生徒が自分の考えを表現する力が不足していると感じることが多くある。学年や学級の雰囲気による場合もあるが，全体的に表現（言葉にする，説明する，書き表す）することを苦手とする生徒が多いのである。また自分の考えを数学的に表現する力も不足している。例えば自分が選んだ解決方法（考え方，計算方法，方程式の解き方など）をどうして選んだのかの問いに，「簡単だから」「やりやすいから」「何となく…」という返答に終始してしまう生徒が多い。

その要因として次のようなことが推測される。

①言葉にする，説明する，書き表す機会が不十分であった。

②表現した内容が仲間や先生に認められるか心配。また，恥ずかしい。

③既習事項の定着が不十分で，知識理解が不足し，表現に使えるツールが少ない。

④これまで，不十分な表現に対して教師が支援で先回りしてきた。あるいは判断や表現が不十分でも学習が進むような指導であった（学習プリントが誘導的　教師の教え込みが強い）。

私自身のこれまでの指導を振り返っても，生徒が確かな自己の判断をもとに，自信を持って表現する力を育てるという視点が不十分であったと反省している。

方程式の指導を例に挙げると，方程式を活用して課題解決するための基礎である解き方を正しく習得させることが大切であると考えてきた。しかし，方程式の解き方に重点が置かれがちな指導に対して，単に解けるだけでは十分ではないということが指摘されている。方程式とその解の意味，解に至る過程の意味，なぜこのように解くのかといった概念的なことが十分に理解されていないという指摘である。私のこれまでの方程式指導にもあてはまる気がした。

全国学力・学習状況調査においても方程式をつくったり，方程式の解を求めたりすることについて，単に手続きとしてではなく，その意味や根拠を明確にして，理解を深めることが大切であるという考えに基づき，次のような出題がされている。

（表１）

平成19年度Ａ問題$\boxed{3}$	全国正答率
⑴　一次方程式 $7x=5x+6$ を解くとき，移項の意味を選ぶ	61.7％
⑵　一元一次方程式 $4(x+5)=80$　を解く	83.6％
⑷　連立方程式 $\begin{cases}5x+7y=3\\2x+3y=1\end{cases}$　を解く	72.7％
平成20年度Ａ問題$\boxed{3}$	
⑴　一次方程式 $-5x+7=-x+31$　を解く	78.4％
⑶　二元一次方程式 $x-y=-1$　の解を選ぶ	59.1％
⑷　連立方程式 $\begin{cases}y=3x-1\\3x+2y=16\end{cases}$　を解く	77.4％
平成21年度Ａ問題$\boxed{3}$	
⑴　一次方程式 $4x+7=15$　を解くとき，移項の意味を選ぶ	69.1％
⑵　一次方程式 $\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x-7$　を解く（係数に分数を含む）	53.3％

＊長岡市立越路中学校

⑷　連立方程式 $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ を解く	73.5%
平成22年度Ａ問題$\boxed{3}$	
⑴　一次方程式を解くとき，解の意味を選ぶ。	57.2%
⑵　一次方程式 $\dfrac{x+1}{5}=2$ を解く	60.6%
⑶　連立方程式 $\begin{cases} 3x+2y=9 \\ x+y=4 \end{cases}$ を解く	79.6%

この結果からも，「方程式を解く」ことはできるのに，「解の意味」や「方程式を解く手続きの意味」についてはきちんと理解されていない生徒が多いということがうかがえる。

新学習指導要領には２年生「数と式」領域の目標について次のように示されている。

> ⑴　文字を用いた式について，目的に応じて計算したり変形したりする能力を養うとともに，連立二元一次方程式について理解し用いる能力を培う。

私はこの「目的に応じて」「連立二元一次方程式について理解し用いる」は“方程式を「利用して」課題解決する”場面と，“解法を学ぶ”場面に分けるものではなく，単元を通して意識すべきものであると解釈した。生徒が積み重ねていく知識・理解，表現・処理の力を生かして適切な判断力・表現力を育てていくことが，この単元の大きなねらいであると考え，本主題を設定した。

２　研究仮説

> 方程式を解く過程や，方程式を利用して課題を解決しようとする場面で，方法や工夫を選択したり，判断したりすることを大切にした授業を展開することで，場面に応じた判断力・表現力を育て，その結果として課題解決力を身につけることができるであろう。

３　研究の方法とその内容

「方程式」の学習において仮説を検証するため，次の点に重点を置いた授業を構想した。

生徒の判断と表現を大切にした授業

これまで，方程式を解く操作を，数学的性質を理解したうえで，単純化，形式化しツールとして利用できるようにすることが目的であると考えてきた。しかし，技法の定着・習熟に偏った指導は教え込みとなる危険性も持ち，生徒は自分が行っている操作が適切なのか？どうしてそのような操作をしているのか？を理解しないまま，ブラックボックス的に方程式を解いていることがあると考える。教えられ，身に付けた方法に当てはめるだけでなく，どうしてその方法を選んだのか，どうしてその方法が適当であると判断したのかを表現し合う（指摘し合う，共有し合う）ことを通して，生徒の判断力・表現力を育てたいと考えた。

４　研究の実際と考察

⑴　教科書の分析

例えば，学校図書「中学校数学２」の例題にそって学習を進めるとき，生徒に期待する判断は次のことが考えられる。（表２）

①	$\begin{cases} 3x+y=750 \\ x+y=340 \end{cases}$ と $\begin{cases} 2x+y=13 \\ x-y=5 \end{cases}$ の比較 ・yの係数の絶対値がそろっていて，同符号の場合と異符号の場合。 →同符号だから２つの式の両辺をひけばyの項を消去できる。 →異符号だから２つの式の両辺をたせばyの項を消去できる。

②	$\begin{cases} x+3y=9 \\ 2x+y=8 \end{cases}$ と $\begin{cases} 2x-3y=-7 \\ 3x+2y=-4 \end{cases}$ の比較 ・x，yの係数の絶対値がそろっていない場合。 →一方の方程式の両辺を○倍し，両辺をたすかひくかすると文字を消去できる。 →一方の方程式の両辺を□倍，他方の方程式の両辺を△倍し，両辺をたすかひくと文字を消去できる。（係数の公倍数にそろえる。）
③	$\begin{cases} y=x-1 \\ x+2y=7 \end{cases}$ （加減法と代入法の比較） ・一方の方程式が $ax+by=c$ となっていない場合。 →一方の方程式が一つの文字の中身を説明している。他方の方程式に代入することで，文字を消去できる。 →一方の方程式を $ax+by=c$ の形に変形して，加減法で解く。（①との比較）

教師は，生徒がどのような判断（～のために～する，～だから～する）をしながら学習を進めていくのかを予想し対応を準備し，教材（教科書）の学習の流れの中で求められる判断を把握しておかなければならない。

上記のように問題を比較しながら，学習を進めていくとき，そこに生じる判断の違いに注目していくことが大切である。生徒にその判断を意識させるための工夫として次のことを行った。

⑵　「判断カード」

連立方程式を解く過程で，生徒は上記のことを判断していくが，教師や生徒が解き方を板書するとき，その判断や工夫を「カード」に記入し，黒板に貼付していく。このことにより，板書上でその判断や工夫は強調され，他の生徒もその判断が適切かどうか評価したり，『カード』の判断をヒントに課題に取り組むことができる。解く過程での判断を説明する際にも役立つと考えた。

『判断カード』の例

y の係数が同じだから，（上の方程式の両辺から下の方程式の両辺を）ひく。

x の係数をそろえるために上の方程式を 2 倍する。

上の方程式が y の中身を説明しているので代入する。

x に○を代入すると方程式が成り立つので，○は解になっている。

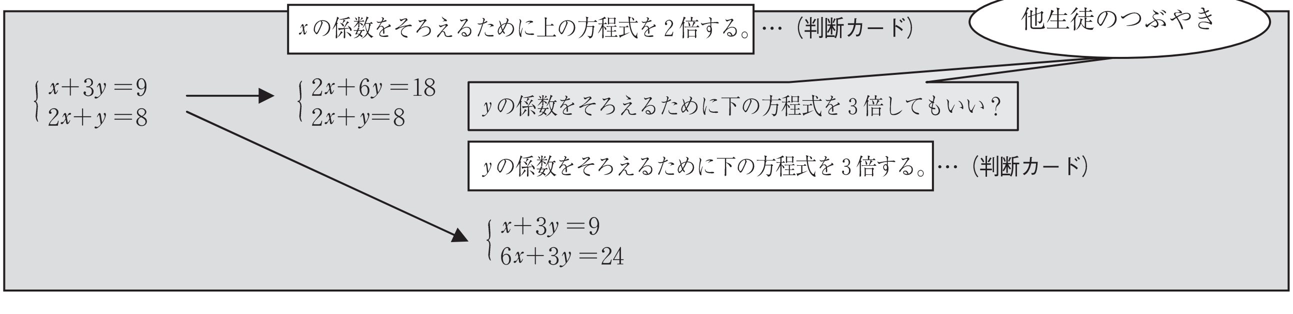
カードの記入方法については，とくに細かく指示はしなかった。生徒が記入する場合は上記のようにきちんと書けないことも多い。言葉の不足やあいまいな表現で他の生徒に理解が得られない場合もあるが，説明を付け加えたり，記入内容を修正したりした。また，授業の流れの中では生徒の発表やつぶやきをひろいながら教師がカードに記入することもたびたびあった。

前時までに使用した「判断カード」も黒板の隅に貼り出しておき，生徒の判断や説明の手助けとなるように利用した。

⑶　生徒どうしの「判断」や「工夫」の比較

たとえば，上記②の比較場面で，x の係数，y の係数をそれぞれそろえようとした生徒の「判断」を比較した。復習のための小テストでは「x の係数（y の係数）をそろえて，加減法で解きなさい。」のように指示をして比較させた。

（図１）（板書例１）



また③では，$y=x-1$→$-x+y=-1$と変形して，加減法で解く生徒も見られたが，そのまま代入法で解くことと比較し，両方の判断を評価した。

（図２）（板書例２）

$\begin{cases} y=x-1 \\ x+2y=7 \end{cases}$

加減法ができるように
左辺にxの項，yの項，右辺に数の項 …(判断カード)

$\begin{cases} -x+y=-1 \\ x+2y=7 \end{cases}$

上の方程式がyの中身を説明しているので代入する

$x+2(x-1)=7$ …(判断カード)
$x+2x-2=7$
$3x-2=7$
$3x=7+2$
$3x=9$
$x=3$

$y=3-1$
$y=2$

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

（代入法）

xの係数が（絶対値が）そろっているので，たす。

$\begin{cases} -x+y=-1 \\ x+2y=7 \end{cases}$ …(判断カード)

$$\begin{array}{rr} & -x+y=-1 \\ +) & x+2y=7 \\ \hline & 3y=6 \\ & y=2 \end{array}$$

（加減法）

$-x+2=-1$
$-x=-1-2$
$-x=-3$
$x=3$

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

当校の生徒に限らず，自分の考えをきちんと表現することがうまくできない生徒が多くいる。「○○だから□□である。」「◇◇のために△△する。」のように理由や目的を述べて説明することが苦手である。習得の段階では説明の手本を示す意味でも「判断カード」を活用して，生徒が説明できるようにすることが効果的と考える。

３年生「２次方程式の解き方」（因数分解を利用した解き方）の復習問題に取り組む場面で，⑴の方程式を解き，判断カードを貼付しながら解き方を確認した後，⑵の方程式を解いたとき，図３の左下のような考え方で解いた生徒Ａがいた。

（図３）（板書例３）

⑴ $x^2-9x+20=0$　右辺が０に整理されているから，因数分解をする …(判断カード)
$(x-4)(x-5)=0$　…（乗法公式を利用した因数分解）“かけて＋20，たして－9” …(判断カード)
$x=4$，$x=5$　$x-4=0$，$x-5=0$だから …(判断カード)

⑵ $x^2+8x=0$　右辺が０に整理されているから，因数分解をする …(判断カード)
$x^2+8x+0=0$　$x^2+\triangle x+\square=0$の形にするために，左辺に＋0をつける …(判断カード)
$(x+0)(x+8)=0$
…（乗法公式を利用した因数分解）“かけて0，たして8”
$x+0=0$，$x+8=0$だから …(判断カード)
$x=0$，$x=-8$

生徒のつぶやき
乗法公式を利用して
因数分解したかったので

他生徒のつぶやき
あっ，そっか！
かけて0，たして8か！

（別解）　$x^2+8x=0$
左辺が０に整理されているから，因数分解をする
…（共通因数をくくり出す因数分解） …(判断カード)
$x(x+8)=0$
$x=0$，$x=-8$
$x=0$，$x+8=0$だから

（授業中の会話）

教師　：みんな，どうしてＡさんが$x^2+8x=0$の左辺に０を足したのかわかる？Ａさん説明できる？
他の生徒　：・・・。
生徒Ａ　：因数分解したいんだけど，$x^2+\triangle x+\square=0$ の形じゃなくてできないから，０を足して$x^2+\triangle x+\square=0$にして，たして△，かけて□の因数分解ができるようにした。
他の生徒　：あー，それでもいいんだー。かけて０，たして８ってことか。

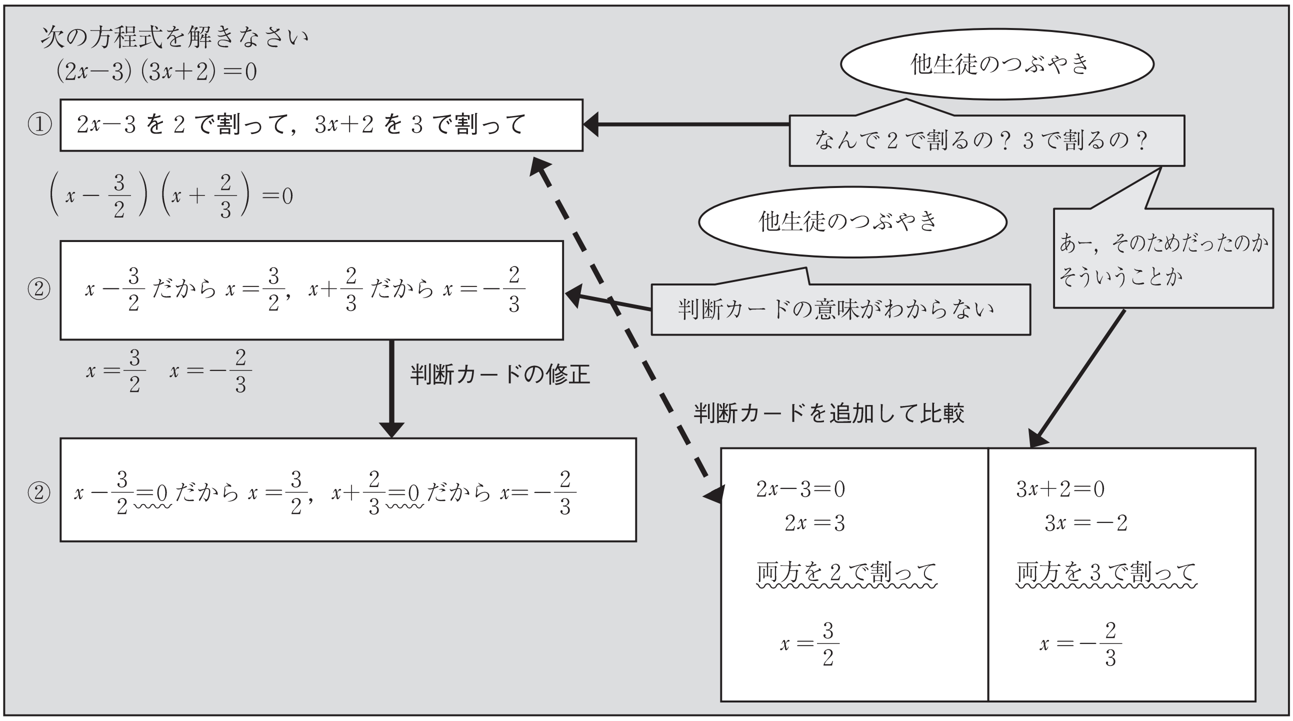
⑵の出題のねらいは“乗法公式を利用した因数分解”と“共通因数をくくり出す因数分解”の比較と“$x=0$も方程式の解になりえる”ことの確認であった。この生徒は⑴の判断カードを参考にして⑵についても乗法公式を利用した

因数分解を行い，解を求めた。「まず，共通因数のくくり出しができないか調べる」という基本事項が定着していないことが考えられたので，そのこと別解として確認したが，「乗法公式を利用するために左辺に$+0$を付け加える」という既習事項を活用できた点について評価した。同じように共通因数のくくり出しができなかった他の生徒もこの判断カードに納得している様子だった。

また，方程式 $(2x-3)(3x+2)=0$ を解いたとき，下の図４のように解いた生徒の判断カードに，他の生徒は「どうして$2x-3$を２で割り，$3x+2$を３で割る必要があるのか？」という疑問を抱いた。この生徒に理由を聞くと「$(x-a)(x+b)=0$の形にすれば解が分かるから」と説明したが，それでも他の生徒は納得のいかない様子だった。

この生徒の理解が「$(x-a)(x+b)=0$の形ならば，解が$x=a$，$x=-b$になる」というように形式的である可能性があったので②の判断カードを修正し，さらに判断カードを追加して比較させると，①の判断カードに対する他の生徒の疑問も解消され，最初に解いた生徒も自身の操作の意味が確認でき，他の生徒の理解も得られ安心した様子であった。

（図４）（板書例４）



これまで，方程式の解き方を学ぶとき，方程式の変形とそれを言葉（声）で説明することが主であったが，判断カードを用いることによって，教師の説明や生徒の考えを視覚に残すことができるようになった。生徒は判断カードに書き表すことによって判断理由や目的を整理したり確認したりすることができる。他の生徒の考えや既習事項との比較もしやすくなった。教師も判断カードの内容の良さや不十分さを評価しながら，生徒の意味理解を深めることができた。

５　成果と課題

生徒の判断を生かし授業を展開しようとした結果，生徒の発言（つぶやきも含めて）を増やすことができた。教師からの一方的な講義になりがちだった方程式の解法の説明や指導について，生徒の声・つぶやき（判断）で授業を進めることができるようになったと感じている。「判断カード」により，ポイントが板書に残ることで生徒は自信を持ち，他の生徒はそれを参考にしながら自分の「判断」を決定し，説明することもできる生徒が増えた。また，前時までの学びの履歴として効果的に活用することもできた。

これまで生徒の言葉（話すこと）によって判断の表現や説明が行われたときに，その言葉の不足や不十分な表現を教師が補って授業を進めてしまっていた場合がある。生徒は自分の説明が十分であったと勘違いしてしまったり，あるいは生徒の意味することを教師が都合よく微妙に変えてしまったりすることがあったかもしれない。「判断カード」によりその不十分さも表現され，それを指摘し合うことでさらに理解を深めたり，適切な表現方法を学ぶことに有効であっ

たと考える。「判断カード」には“ねらい”がないと，他の生徒の理解をえることができない。言葉の不足や不十分な表現についても同じである。伝えるためには何が必要か？を考えることで，生徒の表現力を育てるという意味でも効果があったと考えられる。

今後は生徒の判断が「～なので」のように根拠を判断理由としているのか，「～するために」のように目的を判断理由としているのかなどを整理する方法を研究していきたい。「判断カード」を色分けするなどの工夫が考えられる。

この実践を通して方程式の解き方の学習が，形式計算を身につけることだけに終わることなく，「各計算の意味の理解とそれに基づいた演算決定の力」はもちろん「判断力・表現力」を育てることにも大変重要で有効な学習であると認識した。

定期テストにおいて下記のように設問し，「方程式を解く手続きの理解と説明」と「方程式を解く」について比較した。正答率を比較すると，「方程式を解く手続きの理解と説明」の正答率が，「方程式を解く」の正答率を８ポイント程度大きく上回った。「方程式を解く」については前述の全国学力・学習状況調査と同程度の正答率であるが，「方程式を解く手続きの理解と説明」については，出題内容は異なるが全国学力・学習状況調査と比較しても正答率をかなり超えることができた。また，これまで，このような設問に対して解答しない生徒が半数近く見られたが，説明（表現）することに抵抗を感じなくなってきたことが正答率83％から見て取れた。生徒は方程式の解き方の概念的な理解が深まった上で，方程式を解くことができるようになり，その説明もできるようになったと考えることができる。

生徒が考えを比較しあうことが授業の中に定着し，問題を解決する場面で相談や学び合いの様子が見られるようになった。全体で比較する場面でも自分と違う考えを得てさらに理解を深める生徒が増えた。教師は複数の考えが登場した場合，それぞれの考え方の「よさ」を評価する準備を教材研究の中でしておくことが必要である。生徒は，「より効率的に」や「よりよい方法」を自分のものにしたいという欲求があるようだった。それぞれの「判断」「表現」を認めることと，評価していくバランスについて今後も研究が必要である。

（表３）（定期テストでの出題）

方程式を解く手続きの理解と説明

・次の連立方程式を下のように解いた。次の問いに答えなさい。

$$\begin{cases} x+2y=5\ldots① \\ 2x+3y=8\ldots② \end{cases}$$

⑴　□に入る数や記号，式を書きなさい。

加減法を使って解くために，

①の両辺を２倍しました。

①×2－②より

$$\begin{array}{rl} & \boxed{\quad ア \quad} \\ -) & 2x+3y=8 \\ \hline & y=\boxed{イ} \end{array}$$

$y=\boxed{イ}$を①に代入すると

$x+2\times2=5$

$x=\boxed{ウ}$

⑵　なぜ～～にあるように①を２倍したの理由を説明しなさい。

（①を２倍にした理由の説明）正答率83％

方程式を解く

・次の連立方程式を解きなさい。

(2) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ 4x+3y=5 \end{cases}$　正答率75％

(3) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-5y=6 \end{cases}$　正答率67％

参考文献

・片桐重男『数学的な考え方の具体化と指導－算数・数学科の真の学力向上を目指して』，明治図書，2004.
・臼田要介「中学校数学における連立方程式のつまずきに関する研究」(『筑波数学教育研究』　第21号 2002，pp.105-106. 修士論文要約)
・文部科学省　国立教育政策研究所『平成19年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』，平成20年，pp.152-156
・文部科学省　国立教育政策研究所『平成20年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』，平成20年，pp.206-211
・文部科学省　国立教育政策研究所『平成21年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』，平成21年，pp.239-246
・文部科学省　国立教育政策研究所『平成22年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書』，平成22年，pp.190-199
・全国学力調査【中学校数学】結果の読み解き 研究会『全国学力調査【中学校数学】結果を読み解く』，平成20年，pp.30-40