上越数学教育研究，第 15 号，上越教育大学数学教室，2000 年，pp.1-8

授業にみられる数学的なリアリティと数学的対象

熊谷　光一

1　はじめに

算数・数学の授業で「算数・数学をつくる」，「算数的活動，数学的活動」ということが強調されている。また数学との日常性とのかかわりを強調した問題についても語られたりすることが増えているように感じる。これらの背景には，子どもたちが数学に対してリアリティを感じているのかどうかという問題が潜んでいるように思われる。そこで，本稿では，算数・数学授業にみられる数学的なまたは算数的なリアリティについて考察してみる。本稿ではとくに，数学的なリアリティのひとつの側面である数学的対象について考察することを試みる。

2　小学校の授業場面にみる数学的なリアリティ

まず，小学校３年生の重さの授業[1)]でのグループ活動における子どもたちの様子をみてみよう。

４人の子どもがそれぞれ粘土のかたまりと串をもち 30 グラムのだんごを粘土で作る活動をしていた。そこには，秤が１台用意されていた。串で３つのだんごをつなげたりしていた。そこへ通りかかった教師が，串でさした３つのだんごの重さをはかろうとしていた。その子どもも，まわりにいた子どもも 90 グラムだろうと予想し，秤の目盛に注目した。秤の針は 90 付近をさしていた。子どもたちは安心した表情をした。教師は本当に 90 グラムと言いながら串を指さした。そして，串の重さはどうしたのかを尋ねてみた。教師が秤に串をのせてみようとしたら，子どもたちは一斉に秤の針の動きに注目した。しかし，針はほとんど動かなかった。子どもたちはそれをみて重さがないの？などと言いながら，また 30 グラムのだんごを作る活動を続けた。

重さは通常目にみえない。そのために何らかのかたちで数値化がなされている。この場面で，秤では串の重さが数値化されなかった。子どもにとって，重さは「秤で数値化される」重さであり，何らかの数値化が可能なものとしては捉えられていないようであった。これは子どものもっているこの時点での重さに関するリアリティのひとつの側面である。秤を用いた活動でつくられている重さのリアリティである。

このような場面で，串の重さについてどのように考えるのだろうか。現実には，串に重さがある。子どももそのことには気付くだろう。粘土で作った 30 グラムの皿と 30 グラムのだんごを両手にもって重さが感覚的に異なって感じられることを互いに話したりしている。すなわち，子どもは手にもったりする感覚をもとに小さい重さの違いを知ろうとしたりする。微妙な重さの違いがあることを感覚的に知っている。また， 30 グラムの粘土のだんごを作るときに，子どもは粘土を少し削ったり，少しくっつけたりすることを繰り返す。少しの粘土を削ることで，秤の針が動くこと，すなわち，ほんの少し重さが変化することを知っている。これらをもとにすると，子ども

は串に重さがあることを想定できるはずである。子どもが粘土とかかわって経験してきたことをもとに串にも重さがあることが想定できる。さらに，串の重さを測定してみようという問題が理解されるだろう。子どもは，たくさんのものが集まれば，重さが重くなることを子どもは経験的に知っている。さらに，だんごが２個になると，重さは１個のときの２倍に，３個になると重さは３倍になることを経験的に知っている。だんごが半分になると重さも半分になることを確かめたりもしている。子どもが行っていることを自分自身で見直すことで，串の重さの問題が解決する。しかし，見直すことは容易なことではない。そこには素朴な比例のアイディアがつくりだされるからである。だんごが２個になれば 30×２＝60，３個になれば 30×３＝90 となることを見直す必要がある。その見直しによって，だんごが 40個になったとしても，30×40＝1200 として 1200 グラムになると考えることができるようになることである。すなわち，素朴な比例のアイディアを意識的に扱えるようになる。経験的にもっている比例の関係を測定することができるとは限らない範囲へひろく適用することができるようになることである。この関係が扱えるようになると，串の重さの問題の解決につながる。すなわち，串 100 本の重さが秤で測定できれば１本の重さが求められる。比例関係に関しての操作をもとに，串の問題の解決がなされる。

問題が解決できること，または問題がみつけられ，定式化できることが数学的なリアリティをつくりだしている。特に，数学的なリアリティとは，問題を解決するときの比例関係をつくりだしたりする部分に焦点をあてることになる。比例という数学で大切にされるアイディアがつくりだされ，発展する可能性をもっている部分に注目している。また，実際に扱いづらい問題を解決してみせる部分に数学のひとつの特徴があると考えてもいる。

また，串の重さとして得られた結果が正しいことを確信する。その確信の仕方にも数学的なリアリティの特徴がある。すなわち，何か数値が出たというのではなく，それが確かに串の重さであるという確信をもつこともひとつのリアリティである。実際，比例関係で求めているのだからかなり正しく求めれらているという数学的なリアリティがあり，また他方で，実際により精密な秤で測定した値と計算した値が一致しているという従来の子どものもっていた重さの数学的なリアリティとのかかわりもある。これらが互いに影響しあっているのだろう。

このようにみると，数学的なリアリティにもさまざまな側面がある。例えば，子どもが感覚的に感じていること，正しいということから生ずるリアリティ，比例関係で新しい結果をみることができるなどである。ここでは，数学的対象がつくられている。その対象そのものを数学的なリアリティのひとつとして扱ってみる。例えば，重さが秤で数値化され扱える対象となっている，比例関係自身もそれによって問題を解決することができるという意味で，扱える対象となっている。これらの扱える対象に焦点をあてて考察をすすめる。

３　扱える対象と対象・操作

扱える対象が数学的なリアリティのひとつの側面として考えられるのだろうか。扱える対象そのものはどのようなものであろうか，もう少し検討してみよう。

デービスら (1986) は数学的実在，数学的存在などという表現をもちいて存在しているようにみえる数学の性質について，超立方体の例をあげて説明している。(p.385)

次元	対象	0次面	1次面	2次面	3次面	4次面
0	点	1				
1	線分	2	1			
2	正方形	4	4	1		
3	立方体	8	12	6	1	
4	超立方体	16	32	24	8	1

そこでは，超立方体が線分，正方形，立方体

をもとにつくりだされている。そして次のように述べている。

「われわれが超立方体に関するこのような明確な情報を発見できるという事実は，それが何らかの意味で存在するに違いない，ということを意味するように思われる」(p.386)

すなわち，何らかの新しい情報をつくりだせることでその実在的性質を述べている。さらにそこでは，再現可能性を条件としている。超立方体に関する情報を何度もつくりだすことができる。さらに，次のようにも述べている。

「われわれは正方形や立方体に関する質問に対するのと同じように容易に超立方体に関する質問に答えることができる」(p.386)

超立方体に関する情報が，それまでに知っている正方形，立方体に関する情報と整合していることをも述べている。すでに実在していると感じている情報との整合性を新しい情報がもっていることを強調している。もちろん同じような仕方で情報をつくりだせるということも含んでいる。

数学的実在として考えていることは，再現可能性をもっており，従来実在と考えられているものとの整合性をもっているものとみられる。そして，ここではつくりだされる情報とつくりだす方法が区別されている。

また，Freudenthal (1991) も数学とリアリティについて言及している。彼は「数学はリアリティにはじまりリアリティをもち続ける」という主張をしている。そして活動することが数学のリアリティであることを述べている。特に，数学のリアリティの特徴として，問題を解決する活動，問題を探す活動，そして組織する活動を強調している。そして，数学学習でのプロセスとして，レヴェルがあがることが活動の中心的な特徴であるとしている。すなわち，あるレヴェルでの操作的な出来事が次のレヴェルでは扱う対象となることを強調している。そこには，何らかの扱うことのできる数学的対象が生じている。そこには操作と操作される対象を考えている。同様の見方は，数学者(Giusti, 1999)の見解にもみることができる。

また，Sfard (1991)は数学的概念の二面性という側面を強調しながら，そこでは，操作的な概念認識から構造的，そして操作的な両面をもった概念認識が成立することを主張している。そのプロセスにおいても，操作と対象がつくりだされている。

数学がつくりだされる過程を考えるときに，いずれも何らかの操作を通して，ある数学的対象がつくりだされている。そして，いずれはその操作が数学的対象として発展し，それを扱う操作が新たに明確化される。一貫してこのような見方がなされている。また， 操作によって新しくつくりだされる情報が，それまでにすでにつくりだされた情報と整合性をもっていること，操作自体の整合性も問題にしている。これも特徴である。すなわち，対象とそれを操作する性質があること，そしてそれがかかわることで数学が発展することに数学的なリアリティのひとつの側面がみられる。

それら二つがこれまで扱える対象と呼んできたことである。すなわち，扱える対象とは，対象とそれを操作する方法を含んでいる。なぜそのような見方をしてきたのであろうか。もう少し，教室場面での事例を検討しながら，これらの問題ついて考えてみよう。

4　授業にみる数学的なリアリティ

教室ではことばやさまざまの表現を用いて，扱える対象がつくりだされているはずである。例えば，子どもが描いた図を用いて扱える対象を捉えようとしたり，おはじきを分ける行為そのものから扱える対象をつくりだそうとしたりする。また，文字式自体が対象として扱われる場面もあるだろう。これらについて，扱える対象が作られる過程にアプローチするという観点から考察してみよう。

Freudenthal (1991) はリアリティについて次

のように述べている。
「リアリティは歴史的に，文化的に，環境によって，そして個人的に，主観的に決定される」（p.17）
　数学的なリアリティが，共通感覚をもつものであり，個人とのかかわりをもつものであり，つくられるものであることがわかる。少なくとも，授業というなかでは，教室にいる子どもと教師の活動や相互行為を通してつくりだされる。そのようなものを扱える対象として考えることが必要であろう。
　社会的相互作用論の前提に従うならば，相互行為することによって社会的現実がつくられている（Blumer, 1991）。数学の授業においてもつくられる現実，ここでは扱える対象も同様に考えられるだろう。少し具体的に考えるために，中学校での授業場面を参照してみよう。

4.1 子どもどうしの相互行為の場面にみる扱える対象

中学校１年生空間図形の切断面に関する授業での一こまをみてみよう。[2)] 立方体の切断面について次のような問題が出されていた。

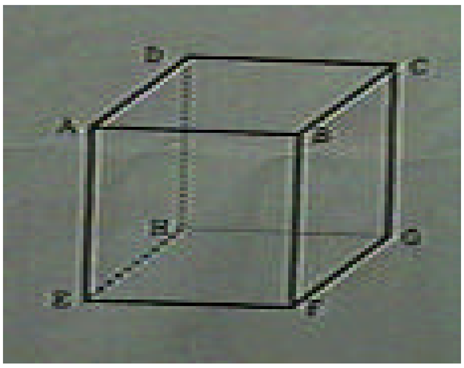

図.１

立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを，頂点Ａ，Ｃ，点Ｐを通る平面で１回切断する。点Ｐが辺ＦＢ上，辺Ｆ，Ｅ上にあるとき，切断面の形を一番適切な名称で答えなさい。また，なぜその形になるのか理由も考えよう。（図.１）
この問題の解決においていくつかの生徒の反応がみられた。まず，点が辺ＦＢ上にあるときに２つの疑問が生徒からだされた。
　ある生徒から切断されたできた三角形が二等辺三角形であるという意見が出された直後に他の生徒から次のような疑問が出された。
「二等辺三角形というのは辺 AC と CP が等しいといっているのですか」
「∠APC は直角ではないのですか」
「点Ｐが辺 BF の中点にあるとき∠APC は直角になると思います」

図.２

　これらの一連の疑問は，見取図の見かけ上見える位置関係と空間の位置関係との間のギャップに起因する疑問のようである。すなわち，これらの疑問を述べている子どもは，見取図のうえでの位置関係と空間での位置関係が同じになっているように考えているようである。または，いずれの位置関係にも十分に自信をもっていない。実際に空間にある位置関係を具体的に扱える対象としていないようにみえる。
　図.２をみるとわかるように，確かに，辺 AC と辺 CP の方が黒板の見取図の上では等しく見える。∠APC の方が∠ABC より直角らしく見える。さらに，中点のあたりのほうがより直角に見えるようである。
　次に，点Ｐが辺 EF 上にある場合について考える場面では，同じような疑問が生徒から出された。

「点 B は線分 CE 上にあるのですか」（図.３）
実際には点 B は立方体の頂点であり，線分 CE

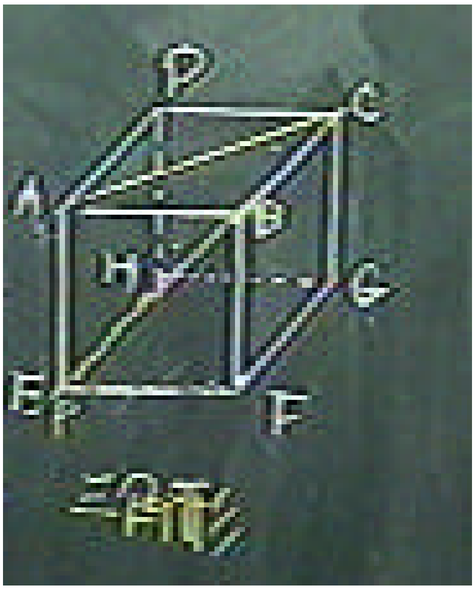

図.３

は平面 AEGC 上にある線分である。しかし，図をみるとわかるように，この生徒の疑問は見取図のうえでの見かけの位置関係をもとにしているようである。

われわれは見取図をひとつの表記方法としてみている。しかし，この授業でみられた例にあるような中学生は，見取図に見える位置関係を実際の空間にある図形の位置関係をあらわしているものとして捉えている。そして，それによって，空間の位置関係という扱える対象をつくりだそうとしているようにみえる。

これに対して，適切な切断面の見取図を描いていた生徒は扱えるとして空間の位置関係についてどのように考えているのだろうか。適切な図を描いた生徒の話を聞いてみた。

生徒は辺 AB，辺 BC，辺 BF のそれぞれの中点を結んでできる平面で立方体を切断した紙の立体をもっていた（辺 AB，辺 BC，辺 BF のそれぞれの中点を Q, R, S とする）（図.４）。そして次のように述べた。

「ここの辺をこう平行において（辺 QR を自分の両肩の線に平行になるようにおいて），点Ｐを少しずつずらしていく（点 P を点 F の方へ）と考えると，下にも平行の線ができて（面 EFGH を指して）このような台形になると思った」

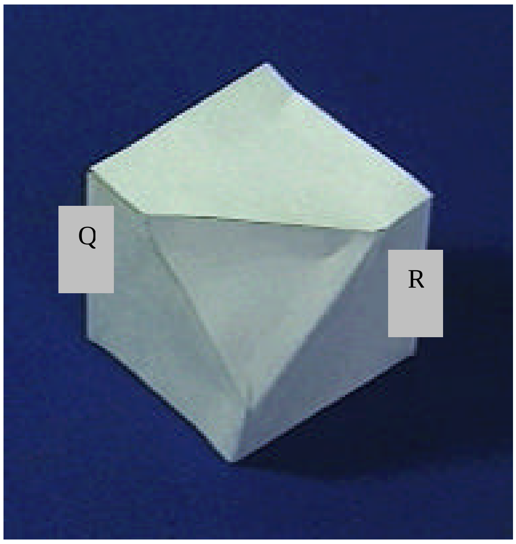

図.４

この生徒の場合は，具体的に，目の前に立体図形をおいてそれを扱える対象として考えている。特に，自分の両肩の線と平行に切断面のひとつの辺をおいてみている。そこでは，実際の立体の辺と自分の両肩の間に空間的な位置関係をみている。自分が扱える対象を具体的なものにみながらも，目に見えない部分に関しては，自分の身体とそこにある具体的な対象の間に平行の位置関係をとり，平行という位置関係を利用して見えることを想定し，新たなる扱える対象をそこに見い出している。すなわち，平行という位置関係を利用して，新たな具体的な扱える対象をつくりだそうとしている。さらに，新たにつくりだされた平行線については，机の面と立方体の上の面の平行関係がかかわっているとも考えられる。

扱える対象として空間にある位置関係をまわりにある机や自分の身体とのかかわりを通しながら感覚的に捉えていると同時に，それを数学における平行という位置関係を用いて表現し，考えている。すなわち，対象をつくりだすとともに，平行関係という対象を記述するための対象を操作する方法をも用いている。

生徒が切断面としてつくりだしている扱える対象を対照して考えるときいくつかの違いがみえてくる。

適切に捉えている生徒は，対象とその対象をつくりだしている平行関係という操作の方法が，区別され，組み合わされている。これに対して，見取図に見える位置関係を捉えている生徒は，対象が見取図であり，それに対して扱う概念があまり明確に生じていない。見かけの判断にたよっている。適切な扱える対象が構成されていない。少なくとも，適切な扱える対象が構成されること，それを扱う方法が対象と区別されること，その方法によって新しい対象がつくりだされることがなされる必要がある。

では，授業場面での相互行為では，どのようなことが生じているのだろうか。

授業場面では，ことばによる説明と黒板の上での見取図を用いた説明が繰り返されていた。もちろん，個々の生徒は紙でつくった立方体をもっていたり，スケルトンの立方体をもっていたり，そしてそれらに輪ゴムをかけたりしていた。

しかし，生徒の間での議論は，△APC が直角三角形になるかという場面では見取図のうえでなされている。そのとき使われていることばは， 例えば次のようであった。

「点 P が点 B の地点で 90 度になるので点Bから離れていくにつれて角は，（聞き取れない）90 度にならない」

「仮に，面 CAB があって，そうすると B は 90 度になるけど，だんだん下に落ちるから，A, C は固定してあるから，一緒に落ちれば 90 度だけど，Pだけが下に動くから，から 90 度にはならないと思います」

「ここが 45 度（∠BAC と∠BCA を指しながら）のときに 90 度（∠ABC を指して）になるんだから，これ（点 P を指して）がさがっていくにつれてここ（∠BAC と∠BCA を指しながら）がひらいていることになるから，90 度にはならない」

これらの表現にみられるように，教師や生徒は特にそこにある平面について言及することはほとんどない。図にみえている立方体の面の一部である三角形の面 ABC について述べているだけである。見取図とこのような説明の組み合わせでは，そこでつくられている面という扱える対象がなかなかみえてこない。

生徒たちがみている扱える対象が明確ではない時点で，表記のひとつである見取図を用いての議論は新しい対象をつくりだすためのきっかけとして機能している。観察者や適切に捉えている生徒には確かな矛盾を生じさせているという意味でである。しかし，それを解消するきっかけはそこにはみられない。適切な図を描いた生徒の説明には，それを考えるためのヒントがある。すなわち，空間の位置関係を考えるためには，そこに対象があり，その対象を数学的操作で記述していることである。すなわち，何らかの対象を構成すること，そしてそれを平行関係など，それを操作，分析するための概念と区別し，その操作，分析のための概念を用いて新しい情報を生み出すことである。

5 再び数学的なリアリティ

5.1　相互行為を通してつくりだされる扱える対象と対象・操作

数学的なリアリティのひとつとして扱える対象を考えることが必要ではないか。これまでの事例では，特に，子どもがもっている扱える対象に焦点をあててきた。特に，授業でのプロセスを考えるとき，子どもが働きかけている扱える対象，そして互いに相互行為するときに子どもが示している扱える対象について考えることが必要ではないだろうか。

先行研究で数学的なリアリティの特徴のひとつとして，対象と操作のかかわりがあることを指摘した。しかし，実際の授業場面でみるように，子どもは最初からこのような区別をもって，何らかの対象を扱っているわけではない。空間図形という対象が一見捉えづら

い例を示したが，同様のことがどの内容領域においても生じているはずである。子どもにとって，対象と操作が未分化の状況というのが授業では多々みられる。例えば，小数の乗法の計算方法を正当化する場面においても，同様に，正当化する対象と方法が未分化という状況がみれらた（熊谷, 1998）。このように，対象と方法が分化する以前の状態を想定することが，数学のリアリティの特徴である操作と対象の関係を考えるために不可欠である。授業場面での数学的対象は，対象と操作が未分化の状態，そして対象と操作が分化した状態をあわせて考えることとする。（図. 5）

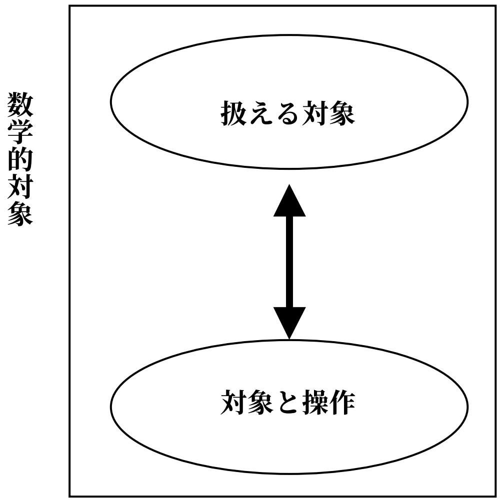

図. 5

参照した授業では，見取図という表記が授業での扱える対象をあまりうまくつくらないように働いているようにみえた。算数・数学の授業では，扱える対象が実際にはみえないために，それを何らかの表記法を用いて表現することが多いし，その表記法が新しい発見をもたらす。そのような特徴が数学にはある。式や文字式，グラフ，そして何らかの図などはその典型である。しかし，実際の授業場面にみたように，表記法が扱える対象をつくりだすことにあまり適切に機能していないということが，他の場面でも多々みられるのではないだろうか。極端な場合，扱える対象を表記法によっては隠蔽する場合があるのではないだろうか。

このような意味から授業での相互行為を通してつくられる数学的対象について，表記とのかかわりでその構成過程を含めて検討する必要があるのではないだろうか。

5.2　数学的対象と数学的なリアリティ

数学的的対象を想定することで，最初に示した数学的なリアリティについてのさまざまの側面はどのように考えられるのであろうか。

数学が発展する感覚のリアリティに関して，このような数学的対象が発展すること，扱える対象が対象と操作として分化すること，そして，振り返る様子をみることで考察可能となるように考える。

また，個々の子どもの立場から考えてみよう。空間図形の授業場面で，「∠ACP は直角だろう」という予測をもった生徒に対して，数人の生徒が説得を試みた。前述したような切断面という対象をあまり意識しない説明が繰り返しなされた。これらの説明が繰り返されるなかで，最初に疑問をもった生徒は納得した表情をあまりみせないままに，黙ってしまった。

数学的なリアリティをつくっていくうえで，このような状況は望ましいことではない。もし，最初に疑問をもった生徒が空間にできている切断面について見取図のうえでの扱える対象をみているのであれば，これらの説得は十分に生かされない。少なくとも，扱える対象として空間での図形のかたちを捉えることが最初になされることである。

そのとき，彼の納得できない表情が大切であり，その気持ちをもち続けることが大切ではないか。そして，実際に切断することもあるし，切断面を具体的に平面上に作図してみることを必要である。そしてその生徒にとって最も大切なことは，もし，∠APC が直角にならないということを納得したのであれば，それをどのようにして納得したのかということであり，どのように考えてその直角になるという考えを修正したのかである。

この部分に数学的なリアリティが生ずる鍵

がある。すなわち，もし具体的に空間に切断面を想定していないのであれば，上記の説明では納得できないはずである。しかし，もし切断面を具体的に平面上に写し取ってくると，２つの説明に納得ができる可能性がある。

そして，その生徒が考えを変えた理由として，たぶん，空間にある切断面を考えることを説明するはずである。そこには新たな数学的対象が構成されたことがみられる。ここでは，数学的対象をつくりだすことにおいて知的に正直であり，知的勇気，賢明な自制をもつという帰納的な態度（ポリア，1959，pp.6-7）が働いている。すなわち，確かな証拠がみられるまで∠APC が直角になるという考えをすてない。空間における切断面の様子をつくりだすことで，考えを変えることをする。

これは子どもが学習に自信をもつ重要な部分であり，菊池の指摘している真実性ということにつながるだろう。菊池（1984a,b）は真実性ということを次のように述べている。

「学習者自身を真実的な存在にすること」（p.14）

さらに，次のように言い換えている。

「学習者の存在を明るみに出して学習者の存在を成就させることであり，「自分もみんなと一緒に学習に参加しているんだ」「自分はやりがいのある勉強をしているんだ」という気持ちをもったときに，真実性への感覚をもとことができると思います」（p.14）

Freudenthal （1973)も同様に，子どもがかかわり，つくりだしている意識をもつことの重要性を指摘している。すなわち，子どもが扱える対象をつくりだし，それを操作と対象へと分化，発展させる過程において，自分の数学へのかかわりを意識すること，そのかかわりの価値を意識することが大切である。

謝辞

東本町小学校教諭竹田正子先生，上越教育大学附属中学校教諭田村雅人先生には，授業の参観，そのデータの分析をすることを快諾頂き心より感謝いたします。

付記

本研究の一部は，平成 11 年度科学研究費補助金　基盤研究 C(2) 「臨床的手法による数学授業の改造に関する研究」の支援を受けている。

註及び引用・参考文献

１）2000 年２月 10 日，上越市立東本町小学校３年生で実施された授業で観察された活動の一部である。

２）2000 年２月４日，上越教育大学附属中学校１年生で実施された授業で観察された活動である。

Blumer, H. (1991). シンボリック相互作用論. 勁草書房.

デービス, P.J., ヘルシュ, R. (1986). 数学的経験. 森北出版.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational studies in mathematics, 3*, 413-435.

Freudenthal, H. (1991). Revising mathematics education. Kluwer Academic Press.

Giusti, E. (1999). 数はどこから来たのか. 数学の対象の本性に関する仮設. 共立出版.

菊池兵一. (1984a). 真実感と充実感のある算数指導. 東洋館.

菊池兵一. (1984b). 真実感と充実感のある数学指導. 明治図書.

熊谷光一. (1998). 小学校５年生の算数の授業における正当化に関する研究：社会的相互作用論の立場から. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究, 70, 3-38.

ポリア, G. (1959). 帰納と類比. 丸善.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reifications on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22, 1-36.*