上越数学教育研究，第27号，上越教育大学数学教室，2012年，pp.1-12.

関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成（２）

布川　和彦
学校教育学系

１．はじめに

数える行為から生まれた数は形容詞的なものから名詞的なものへと変容し目的語になりうるものとなり (ワイルダー, 1980)、計算の手続きを記述する式はモノ化(reify)されて構造的な理解に至り、操作の対象となる (Sfard, 1991)。この意味では無理数も計算の対象となって初めてモノ化したと言えるであろう。一方、図形は van Hiele の第３水準に至って、視覚的な捉え方を離れて定義により規定されるものとなる (布川, 1992)。このように、算数・数学の学習内容は学習過程の中で長期的には、ある意味でその身分を変えると考えられる。

算数・数学の学習内容がその身分を変えた後は、構造を持ったモノとなる。そして、操作の対象となったり、他のモノと組み合わせてより大きな構造を作ったり、逆に大きな構造の部品となったりする。モノを集めた数の集まり、式の集まり、図形の集まりは一つの世界となり、一定の条件を満たすモノの持つ性質が探究されたり、モノ相互の関係が調べられたり、あるモノを別のモノに変える操作が行われる。これらの世界についての知識や手続きが豊かになることは、数学的モデル化を行うために必要なことである(布川, 2003)。

関数は数学的モデル化で利用される知識として重要である。だとすれば、関数が学習の中でその身分を変え、関数の世界についての知識が豊かになることは、学習の必要なステップであると考えられる。しかし、関数においては表、グラフ、式という多様な表現が用いられ、それらの背後にそれらにより“表現されるモノ”を想定しなければならないという点で、図形の学習などとは異なっており、前述のようなモノ化にはより困難が伴うと推測される。

２．関数の対象化に関わる問題点

小中学校における関数的な内容の学習では、共変性(covariation)に焦点を当てた見方と２つの量の関係把握に焦点を当てた見方とが組み合わさった捉え方となっていくことが必要と考えられる (布川, 2010)。これに関わり布川 (2011)は小学校４年生の学習過程の分析から、２つの捉え方のそれぞれに対応するきまりを見つけ、表現することができる一方で、場面の特徴的なきまりに注意を向けることや、きまりを関連付けることはあまり行われず、多様なきまりの背後にある同一の数量的現象を把握し、そこから派生すると期待される性質の運搬者 (van Hiele, 1984) を推定することには、つながりにくいと指摘している。

しかしながら、場面や文脈の存在が量の依存関係やグラフなどの学習を促す(Mahir, 2010; 布川, 2010)ものの、場面の中の現象とは別に、また個々の表現とも別に、多様な表現の背後にある同一の何かを捉えることも関数の学習においては重要であるとされる (Duval, 2006; Lagrange, 2010; Schwarz & Dreyfus, 1995)。布川 (2011)は、表現間の翻訳

において点ごとの対応にのみ注意を向けるだけでは不十分であるとの Yavuz (2010)の指摘や、関数の様々な性質のもとになる何かを意識することで関数の構造的捉え方が可能になるとする Slavit (1997)の指摘を踏まえ、性質の運搬者として関数を捉えるようになるために、各表現やそれらをもとに見いだされるきまりの間の関連を考えながら、背後にそれらの表現やきまりを生み出すものとして関数を想定することが必要としている。

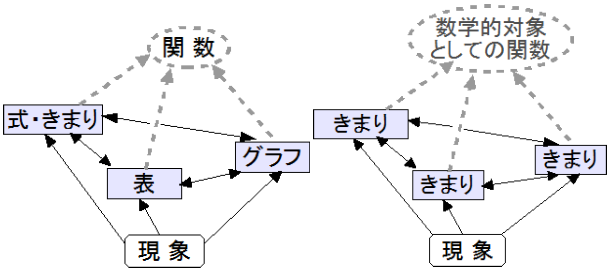

図 1

こうした関数という対象の想定が小中学校の学習において必要か、という問題ももちろん考えられる。これに関わり、Font ら(2010)による対象のメタファーの利用という視点で、我が国の中学校の教科書を検討してみると、「関数 y=2x のグラフ」と関数を y=2x という式と同一視するような言い方がされる一方で、「次の式で表すことができる関数」と式はあくまでも関数の表現方法の１つとする言い方も見られることがわかる。後者の語り方においては、関数はグラフや式で表現できる何物か、つまり Font ら(2010)の言う数学的存在物(mathematical entities)として扱われており、したがってそうした語り方を受容できる理解が、生徒の側にも求められる。逆に、考えたり、表現したり、扱ったりする対象が存在しないこと(Sfard, 1992)が、「訳が分からない」「何をしているのか」「得体のしれないもの」(上田, 2009)という生徒の感覚を生み出す一因とも考えられる。

関数のモノ化された理解を促す試みは従前からも提案されてきているが、多くは大学生などを対象としたものである（例えば、Schwingendorf *et al.*, 1992; Sfard, 1992)。しかし上でみたように中学校の学習でもそうした理解に近いものが現れることや、生徒の負の感覚を生み出している可能性があるとするならば、中学生までにある程度はモノ化した関数の理解を生徒ができるようになることも必要と考えられる。そこで以下では、我が国の小学校高学年から中学校の算数・数学の授業における、モノ化した関数の理解に向かう変容のための手だての可能性を考えていくことにする。こうした可能性を考えるために、まず、小学校４年生のともなって変わる量の授業、および中学校１年生の比例単元の早い段階での授業を考察してみることにする。

３．小学校の関数導入段階での授業

3.1 授業の概要

第１時では長さ 24cm のひもで長方形を作るとき、どんな長方形を作ることができるか、という問題を考えた。辺の長さが小数のものも作れると児童から考えが出されたが、まずは整数の長さで作れないかと教師が答えた。個別活動後に作った長方形を出させた。8×4 の長方形が出たときに、4×8 と同じとの意見が児童から出された。１つごとに教師がその形の黄色い紙を黒板に貼った。次に、場面中のともなって変わる量を問うと、縦と横の長さが出された。面積も出されたが、ともなって変わるもう一方の量は発表されなかった。まず縦と横の長さの表を作り、次の気づいたことが出された：縦の長さが１増えると横が１減る；縦と横をたすと 12cm；6×6 の正方形を境にして長方形の形が左右に分かれている。最後については、長方形の図を並べて説明した子があり、弧状の線で対応する長方形を結んで意味を明確化した。また 12×0 や 0×12 は順番としては考えられるが、長方形ではないので入れられないとされた。最後に、表をもとにグラフをかき、横軸は横の長さと

された。棒グラフ、6 のときを中心にした V 字型のグラフ、横の長さが 0 や 12 のときを含む右下がりの直線のグラフ、1 から 11 までの右下がりの直線のグラフがみられた。

第２時冒頭で、第１時に出た縦＋横＝12 のきまりを、横の長さ＝12－縦の長さと表した。次に面積を考え、面積とともなって変わる量を問うと「辺の長さ」はすぐに出たが、どちらの辺かとさらに問うと「両方」とされた。教師はとりあえず、面積、横の長さ、縦の長さという３段の表を認め、子どもたちに作らせた。このとき、12×0 の面積が 0 であることは、第２時ではすぐに認められた。表のきまりとして次が出された：横－縦が 6×6 を境に２とびで同じように変わる；面積の増分が 2 ずつ減る；横と次の縦を足すと 11、6×6 を境にして面積が同じ；6×6 で折り返すと同じ；横と縦をたすきがけに足すと 24。最後に面積のグラフをかく際に、横がわかると縦の長さがなくてもわかることを、教師が子どもと一緒に確認した。グラフは点をとってそれを線分で結んでかかれたが、0 から 6 までをかいてそれと対称に点をとる子も見られた。気づいたことを問うと、辺の長さが 6 のときを中心にして左右の点が対応していることが出され、また表の対称性からグラフの対称性も当然だとする意見も出された。

3.2 小学校の授業に見られる児童の理解

この授業の第１時の課題は１次関数、第２時の課題は２次関数になる場面を扱っていたが、教師がひもを用いたり、紙でいろいろなサイズの長方形を提示するなど場面の理解を丁寧に行ったことにより、４年生でも表を作り、それをもとにグラフをかくことができていた。こうした場面についても４年生がきまりを見いだし、それを定式化できることは、布川 (2011)の結果 [1)] とも一致している。

関数のモノ化された理解への移行に関わっては、グラフの全体的特徴の考察がその移行を促進する (Slavit, 1997)が、生徒はグラフの全体性に注意を向けにくいとの指摘もなされてきた(Yavuz, 2010)。今回の小学校４年生の授業を見ると、こうした学習を始めたばかりの児童であっても、グラフの全体的特徴を捉えることが難しいとは限らないと考えられる。

この授業ではグラフの対称性について多くの言及がなされた。グラフの対称性は、6×6 を中心として左右の点が対応しているとして認められた。またこれを説明した児童は、6 の部分に縦に手をあて、対称の軸にあたる線を表していた。さらにグラフの対称性は、表の対称性から当然であるとの考えも出され、表現間で対称性という特徴が関係づけられて理解されていた。対称性を利用してグラフをかいた児童もあり、対称性が今の数量関係の全体を特徴づけるものとして概ね認められていたと言える。

ただし、グラフや表における対称性の理解は、今の授業では場面の理解にかなり支えられていたことには留意をすべきである。第１時で辺の長さについて表を作成し、6×6 を中心に左右で対応していることが話題となった際に、画用紙の長方形を黒板に左右対称になるように並べ、対応する長方形を弧状の線で結んでいたことから、子どもたちは今の場面における長方形の形の変化に見られる対称性を意識したと考えられる。グラフの対称性の認識は、場面で生じている形の変化という現象の対称性の認識に支えられていた可能性が高い。Mahir (2010)は、現実的な場面との関連づけが大学生のグラフの解釈を促すと指摘しているが、この知見に基づくと、長方形の形が変わる場面についての理解が、表やグラフの対称性を自然なものとして捉えることを支えていたと考えられる。つまり、グラフや表が場面で生じている現象を記述する表現となっているという条件下で、その対称性が認識されていたと考えられる。

表やグラフが場面で起こっている現象を記述するもの、いわば場面の model-of に留まった場合、数学的対象に向けた移行が進みにくいと考えられる。しかし、今の４年生の授業においても、わずかではあるが、model-of からの移行が生ずる可能性が観察された。長方形を作るという場面で考えていた際には、子どもたちは一方の辺が 0cm や 12cm になる場合は、長方形にならないとして受け入れなかった。しかし、表やグラフを作成し、それを用いて考えるようになってからは、表やグラフの中の一連の系列に位置づくものとして、0cm や 12cm の場合も自然に受け入れられるようになっていった。ここにおいて、表やグラフが場面に必ずしも依存せず、それ自身自律した思考の対象として捉えられ始めるという model-of からの移行の兆し (Gravemeijer, 1999)はあったと考えられる。また表やグラフの系列に自然に位置づくものと捉えたということは、ここでも表やグラフの全体的特徴に注意を向けることができたとも言えよう。

布川 (2011)では教科書で取りあげられることの多い比例の場面については、小学校４年生でも「グラフはあがっていくだけ」というグラフの全体的特徴に注意を向けたり、場面の理解に支えられながらではあるが、内挿や外挿などのグラフに対する操作を行うことができることが示されていた。本稿で考察している授業では、比例ではない関数で記述される場面においても、グラフの全体的特徴をとらえ、それを利用することができており、小学校の導入段階でも、グラフの全体性の認識がある程度できることを示している。

同時に当然のことではあるが、様々な限界も見られる。一部の児童によりかかれたＶ字型のグラフは、場面の表面的な特徴に影響を受けたものと考えられる。長方形を 6×6 を中心に並べた場合、長辺の長さは中央に向かって一度減少し、その後増加していく。この特徴をグラフの中に表現することで V 字型のグラフをえがいたものであろう。また面積と一緒にともなって変わる量を教師が問うた際に、子どもたちは縦の長さと横の長さの両方を表に入れることに強くこだわった。これは、面積を求める公式である縦×横に基づき、面積を求めるには両方の長さが必要と考えたものであろう。つまり、面積を求める手続きに強く影響された理解がされていたと思われる。この直前に横の長さ＝12－縦の長さというきまりを言語化していたが、縦の長さが決まれば横の長さも決まり、その結果面積が決まるという、ある意味で「横の長さ＝12－縦の長さ」という関係に操作を施して、面積という別の量に関わる依存関係を生み出すという操作はできなかったとも言える。さらに面積の表では、縦と横の両方の長さが入ったこともあり、「横と次の縦を足すと 11」や「横と縦をたすきがけに足すと 24」という長さに関わるきまりも出された。これらは面積に関係ないだけでなく、縦＋横＝12 のヴァリエーションに過ぎず、縦＋横＝12 に比べて場面で生じる現象の特徴をよりよく表すものでもない。きまりの間の関係や場面の本質的な関係に焦点を当てることは、布川(2011)の事例と同様、十分には行われなかったと言えよう。

４．中学校の関数導入段階での授業

4.1 授業の概要

教師は２つの表を板書し、いずれも x の段に $-5, -4, \cdots, 4, 5$ を入れ、$y=x/4$ と $y=-x/3$ の対応表を各自で書かせた。生徒の中には $y=x/4$ と $y=-x/3$ に対し $y=4x$ と $y=-3x$ の値を記入している者も見られた。また表に記入する順序も $x=0$ や $x=1$ から始めて正の部分を記入し、後で負の部分を埋めるという生徒も見られた。教師は $y=x/4$ について $y=4x$ の値をかいた表と正しい表を板書させ、全体で確認をした。また $y=x/4$ を $y=(1/4)x$ と書きなおして、1/4 が比例定数であること、その値が $x=1$ の y の値に現れること、$x=1$ と $x=2$ の場合について y/x が 1/4 になることを確認した。$y=-x/3$ の表が

板書された後も、教師は $y=-(1/3)x$ と直させて比例定数を確認した。最後に式の x に x の値を代入して y を求めることを確認した。

次に教師は横 4cm、縦 3cm の長方形 ABCD を板書し、点 P が C→D→A→B と動く場面を提示し、点 P が C から $x$cm 動いたときの△PBC の面積を $y\mathrm{cm}^2$ とした。教師は磁石を点 P として辺 CD に置き、x や△PBC を図示した。その上で対応表を自由に作らせた。生徒の中には $x=7$ まで $y=2x$ のきまりに従って表を埋める者が多く見られた($x=8$ 以降は空欄)。教師は途中で $x=4$ のとき(図２の P_4)の△PBC を黒板で確認した。この確認後、$x＝3, 4, 5, 6, 7$ のときは y が 6 で一定とする考えが多く現れた。指名された生徒が下の表を板書した。

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	2	4	6	6	6	6	6

表をかいた生徒が各 y の値の求め方を説明し、$x=3, 4, 5, 6, 7$ では高さが変わらないので y の値も変わらないと説明した。教師は図中に $x=0, 1, \cdots, 7$ の位置を $P_0, P_1, \cdots, P_7$ として記入した。教師は P が B まで動くことを確認し、上の表が A で終わっていないかと問うた。さらに表の $x=0, \cdots, 7$ のそれぞれの上にも $P_0, P_1, \cdots, P_7$ と記入した。その上で、$x=8$ のときが AB 上の A から 1cm の位置であることを確認すると、生徒から P_2 と同じとの意見が出された。その点が P_8 になり、y の値が 4 であることを確認した。さらに $x=9, 10$ のときに y の値が 2, 0 となることを確認し、表を以下のように拡張した。$x=11$ のときはないこと、$x=10$ のとき P が B まで来ることを確認し、図の B のところに P_{10} と記入した。

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	4	6	6	6	6	6	4	2	0

教師は今日は表で考えるとした上で、変化の仕方がどのように変わっているかを問うた。発表した生徒からは「増えて、止まって、減っている」、図３の図、「x が 3 のときまでは y が 2 倍になっていて、x が 4 から 7 までは y が 6 のままで変わらず、x が 8 から 10 まではでは y が 1/2 になっている」という考えが出された。最後の考えに対して少し違うとして、3 までは 2 ずつ増える、8 から 10 までは 2 ずつ減るという考えが出された。教師は $x=3$ と $x=7$ のときに変わり、それが点 D と A にあたることを確認し、表の P_3 と P_7 の上に D, A と書いた。不等号による区間の表現を導入し、それぞれの区間が $0≦x≦3$, $3≦x≦7$, $7≦x≦10$ と書けることを確認し授業を終えた。

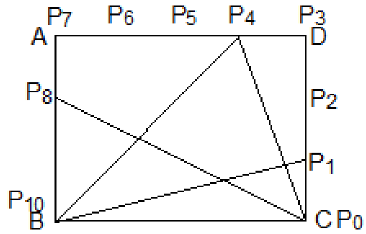

図２

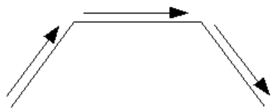
図３

次時の冒頭では前時の内容を確認した後、「変域」について説明し、今の場面の変域がどうなるかを問うた。生徒からは「C≦x≦D」との考えが出された。教師は x が何 cm 動いたかが問題なので 0 から 10 までであり、x が動く範囲は $0≦x≦10$ となることを説明した。

教師は各自にグラフ用紙を配布し、グラフをかくよう求めた。生徒は１分ごとの面積をプロットし、図３と類似の台形状のグラフをかいていたが、y 軸の目盛りの取り方には個人差があり、そのため台形の高さは多様であった。板書した生徒も、同様に点をプロットし、線分で結んで台形状のグラフをかいた。教師はグラフ上の点(1, 2)に黄色の磁石を置き、この点は表でいうとどこになるかを問うと、生徒は P_1 と答えた。またこの点が「(1, 2)」と表せることを説明し、生徒が言い間違えた(2, 1)の位置と比較した。

教師は(1, 2)と(2, 1)が異なることを述べ、座標の学習へと移っていった。まず、グラフの $x=2, 3$ のときの点について、それらの座標を確認し、そのときの座標が表の x と y の値に

なっていることを確認した。その後、教科書の座標についての課題を考えさせ、それに取り組んでいる途中で授業終了となった。

4.2 中学校の授業に見られる生徒の理解

面積の問題では、最初、表を $y=2x$ のきまりに従って記入する生徒が多く見られた。これは場面の理解を十分せずに、最初のいくつかの場合で見いだしたきまりを用いて表を埋めるものであり、小学生にも見られる傾向である(布川, 2011)。しかし途中で場面の理解を促された後は、表を適切に埋めることができただけでなく、変化の仕方を問われた際には、その特徴を把握できた。特に、グラフをかく前であるにも関わらず、図３のようなグラフに対応する変化のイメージを生徒自ら答えていた。つまり変化の全体的な特徴を捉えることができていたと言える。ただし、表の後半をかく際に、P_2 のときの面積と P_8 のときの面積が等しくなるといった場面の特徴が生徒から出されており、前節で考察した小学生の授業と同様、場面で起きている現象の対称性を捉えたことが、変化の仕方の対称性の把握につながっていた可能性がある。

なお、第１時の最後に変化の仕方を発表する際に出された「x が 3 のときまでは y が 2 倍になっていて…x が 8 から 10 までは y が 1/2 になっている」という考え方も、この対称性の把握の現れとも言える。つまり、$x=0, 1, 2, 3$ のときは $y=2x$ となっていたので、それと対称の関係にある $x=7, 8, 9, 10$ のときは逆の関係にあると考えたものと思われる。

第２時のグラフの作成では、y 軸の目盛りを生徒自身がとったことから、台形状のグラフという点では共通だが、その高さは生徒により大きく異なっていた。しかし、そうした高さの違いは問題になることなく、生徒は見た目が多少違っても、同じ変化を表現するグラフと捉えていた。Schwarz & Dreyfus (1995) は、グラフでは軸のとり方を変えるとその見た目は変化するが、見た目の異なるものを結びつけて「関数の統一的、統合的なイメージ」(p. 275)を作ることが重要と指摘している。この授業では、見た目の違いを越えて１つのイメージを持つことができていたことになる。

最初に扱われた比例の対応表の作成では、x が正の数の場合を記入し、その後、対称性を利用して負の数の場合を埋めるという記入の仕方が見られた。ここでは具体的な場面は与えられず、式だけから表が作成されたが、その際の対称性を利用した記入の仕方は、式の計算という手続きの特徴から対称性を容易に把握できたことと捉えられる。

この授業で扱った課題は実際には中学校２年生で扱われるものであり、単一の式では表せない関係であったが、比例や反比例といった小学校で学習してきたものとは異なる関係であっても、場面の理解に支えられていれば、表やグラフにおける対称性を把握することはそれほど難しいことではなかった。その際、場面、表、グラフの結びつきに加えて、２倍や半分、２ずつ減るという言葉によってではあるが、増加や減少の部分を式化可能な形で表現をしており、この意味では、４年生の事例と同様、多様な表現の間の連携が見られた。

さらに、具体的場面を背景に持たなくても、所与の式の計算手続き上の特徴から、x と y の関係に見られる対称性を把握し、それを表の作成に生かすこともできていた。ただし、対応表の作成における $y=x/4$ と $y=4x$ の混同といった y を求める計算手続きの不慣れな状態は、技能の未習熟というだけでなく、操作の圧縮化 (Sfard, 1991)という数学的対象に向かう移行の点からも問題となる。

本節と前節では、小学校と中学校でまだ関数についての学習をそれほど進めていない子どもたちが、比例という彼らが最も親しんだ関係でなくとも、表やグラフ、式などの表現間のつながりを捉え、その全体的な特徴を捉えることができることを見てきた。関数の学

習にとって問題となる点も見られたものの、子どもたちがこの段階で関数に関してできることも多く見られると言えよう。そのことを踏まえながら、数学的対象としてモノ化した関数の捉え方に向けて移行することの可能性を以下で考えてみたい。

５．関数の捉え方の変容の可能性

5.1 小中学校での学習における深さ

関数の理解の変容を捉える際に、垂直的成長と水平的成長(Schwingendorf *et al.*, 1992)や深さ(depth)と広さ(breadth)（DeMarois & Tall, 1996)という視点が使われることがある。広さや水平的成長は関数を表現するメディアの面からの変容であり、深さや垂直的成長は関数の捉え方の変容である。後者に対して、DeMarois & Tall (1996)は前行為的、行為的、プロセス的[2)]、対象的、procept 的というレベルを設定し、Schwingendorf ら(1992)は、前関数的、行為的、プロセス的、対応的、依存的としている。行為的が個々の値を求める計算手続きに依拠した理解であるのに対して、プロセス的はそうした計算手続き自体よりも、一方の変数から他方への変換というある種のシステムとして捉えることとされる。一方、数学的知識の二重性の文脈では、関数の理解の変化も操作的捉え方から構造的捉え方への移行として考えられるが、これらは数学的構成物の本性や存在論的身分についての学習者の信念の問題とされる (Sfard, 1992)。

構造的捉え方への移行では、操作のモノ化(reification)が必要となるが、関数のモノ化された状態としては順序対の集合という捉え方が代表的なものとしてあげられ、また関数をより高次の操作が施される対象と考え、例えば微分方程式のように関数を解とする操作の実行がモノ化された関数の理解の特徴とされる。こうした特徴を見たときに、中学校段階で構造的な捉え方の完成を目指すことは無理があろうし、また Sfard (1992)自身が述べるように、生徒がそれなしですませられる間は構造的捉え方が要求されるべきではないとすると、中学校では関数に微分や積分といった操作を施すことがない以上、また順序対の集合という定義もされない以上、構造的な捉え方は要求されるべきではないと言える。

ただし第２節で述べた問題がある以上、少なくとも中学校の段階では、生徒が多様な表現の背後に何らかの“表現されるモノ”があることを感じられるようにすることも必要と考えられる。こうした中間の段階として、上述のプロセス的な捉え方が考えられる。この捉え方では関数はダイナミックな変換として考えられ、式の形など表面的には異なっても同値な手続きであれば同じ関数と認めることができる。また他の変換と合成を考えることもできるとされる(DeMarois & Tall, 1996)。Schwingendorf ら(1992)は入力→変換→出力という１つのシステムとしてプロセス的な捉え方を述べていたが、関数を対応関係や依存関係とする理解は対象とする捉え方とプロセスとする捉え方どちらともとれる、いわば両者の中間的な状態とも指摘している(p. 139)。ここから、２量の関係と捉えることも、プロセス的な捉え方に近いものとして考えることができよう。これは二重性の文脈でいえば、モノ化の前の内面化から圧縮化に向けた状態に相当すると考えられ、その意味でもモノ化に向かう途上と言える。例えば Sfard (1991)は関数の内面化を「変数の考えが学習され、公式を用いて従属変数の値を見いだすことができる能力が獲得されたとき」(p. 19)とし、圧縮化については次のように述べている:「具体的な値を実際に詳しく調べることなしに、全体として(as a whole)の写像と戯れる(play with)能力が高まる程、圧縮化の過程で進展があると見なされる。最終的に、学習者は関数を探究し、そのグラフをかき、いくつかの関数を結合し(例えば合成)、与えられた関数の逆を見いだすことさえできるようになる」(p. 19)。

小学校のともなって変わる量が依存関係のインフォーマルな理解から出発しており、また中学校での関数の定義が対応関係あるいは依存関係に基づくものであることから、こうした深さを求めることは適当と思われる。ただし図形の場合に見られるように、教科書の定義が児童・生徒の理解にそのままなるとは限らないので、そうした理解を指導の中で意図的に目指す必要があると考えられる。

5.2 移行に向けた活動の可能性

上で考察したように、適切な場面の支えがあれば、グラフや表の全体性の認識は導入期の小学生の考え方に含まれているので、それが場面と結びついている状態から移行させることが必要と考えられる。1 辺が 0cm という長方形にならない場合も表やグラフの全体的特徴から受け入れたことは、移行の可能性を示唆している。ただし、面積とともなって変わる量を考える際に縦と横の両方を表に含めていたように、途中の手続きを考慮せずに依存関係や対応関係を捉えることは難しかった。つまり行為的な捉え方に留まっていたと考えられる。表から多様なきまりを見いだす際に、具体的な計算の仕方が異なるものは別のきまりと捉える傾向にあったことも、行為的な捉え方を示唆するものと言えよう。中学校の授業で最初に表を埋める際に、$y=2x$ のきまりに従い埋めていたことも、場面の対応や依存関係に十分注意が向けられないまま、計算手続きに依拠した結果と見ることもできる。

中学校の授業では全体的特徴は捉えられ、またグラフの見た目の違いを越えた変化の仕方があることは理解されていたが、変わり方についての「x が 3 のときまでは y が 2 倍になっていて、x が 4 から 7 までは y が 6 のままで変わらず、x が 8 から 10 までは y が 1/2 になっている」という発言に見られるように、$3<x<4$ や $7<x<8$ の部分は考慮されないなど、場面の説明の図があったにも関わらず、関係は離散的に捉えられているだけであった。

グラフの全体的特徴については、絵のようなイメージに依拠する認知スタイルの学生はグラフを絵のように捉えてしまい、関係の表現として解釈することに困難を感じるとする Blazhenkova, & Kozhevnikov (2009)の指摘を考慮するならば、全体的特徴だけでなく、関係の表現となっている側面についても明確にしていく必要があると考えられる。

以上より、授業で見られた子どもたちの理解を考慮しながら、プロセス的な捉え方への移行につなげるには、次のようなことが必要と考えられる：具体的場面の記述としての活動から関係自体を探究する活動に移行すること；その際に計算手続きを経由しない変換として捉える機会を持つこと [3)]。

具体的場面の記述から数学的関係の探究への移行については、model-of から model-for への移行が考えられる。関数の学習に関わっては、金川 (2010)が model-of と model-for の観点から中学校２年生の学習活動を構成し、中学生の学習過程を考察しているが、その際には、van den Heuvel- Panhuizen (2003)の小さな model-of から model-for への移行の繰り返しという立場を採用している。本稿では、学習対象の身分の変容、数学的対象の成立という側面に着目しているので、Gravemeijer (1999)のような大きな model-of から model-for への移行を参照することとする。この枠組みを参照する際に、Gravemeijer, & Doorman (1999)が「モデル」という用語を全体的な意味で理解すべきとしていることには注意すべきであろう:「それは単に記されたものではなく、それとともにあり、RME のモデルを構成する全てのものである。さらに同じモデルが多様な表記を含むかもしれない」(p. 119)。実際、彼らは高校生を対象とした微積分の導入の授業を事例として述べているが、等加速度から速さや距離を求めるという文脈で、グラフへの表現と、グラフ内での数学的関係の導

出などを通して、微積の初歩的なアイデアを再発明するという学習において、中心的なモデルは「離散的関数のそれ」であるとされ、「離散的なグラフという表記との組み合わせで」機能したと述べられている(p. 126)。さらに、この学習の中でモノ化されるのはグラフではなく、「和をとる」といった行為あるいは活動であり、それが数学的対象（今の場合積分）になる。グラフのような表現は活動とモノ化の双方を支援するとされている(pp. 122-123)。

ここで、プロセス的な捉え方への移行を目指すことから、モノ化される行為として「[一方を他方の変換されたものとして]対応させて見る」という行為を設定してみることにする。上で見たように、少なくとも小学校での導入段階では手続きに依存した捉え方になっていたこと、また中学校での導入段階では離散的な捉え方が優勢であったことを考慮すると、定義域全体にわたる対応関係として[計算の手続きを経由せずに]関数を捉えることが、プロセス的な捉え方への移行を促すと考えられる。この移行を促す可能性がありそうな活動を、先行研究、我が国の教科書、上で考察した授業を参照しながら、最後に考えてみる。

第一に、具体的場面の記述から離れて関係自体を探究するということでは、我が国の教科書において表現間の翻訳を行う学習は、これに当たるように見える。ただし model-of から model-for への移行に当たっては、モデルが「数学的推論の手段として役立つようになる」(Gravemeijer, 1999, p. 164)ことが必要である。学習において数学的推論が行われ、その中で「対応させて見る」という行為がグラフなどの表現を借りながらモノ化することが求められる。したがって、表現間の翻訳、あるいは例えば式の係数の正負とグラフの傾きの関係のような、ある表現の特徴が別の表現においてどう現れるかを考察することが、表現間の問題ではなく、その背後にある対応関係についての推論として扱われることが求められると言えよう。つまり、表現間の翻訳は中学校の教科書では中心的な課題であり、また小学校でもある程度扱われ、しかも上で見た授業のように、適当な場面に支えられれば児童・生徒は取り組むことができるが、その活動の意味づけが問題になると思われる。

また Gravemeijer, & Doorman (1999)が離散の関数を中心的なモデルとしていたことと、上述の小学校の授業だけでなく、中学校の授業でもグラフが離散的に捉えられていたことを考慮するならば、場面についての離散的なデータだけがわかっている状態で、それを連続的なものに変えるような探究を行うことは、場面の中心的な関係のきまりに注意が向けられるという意味で、プロセス的な捉え方に向けた移行になりうると考えられる。教科書では x が整数値の場合のみを考えて終える場合も多いが、布川 (2011)の示す小学校 4 年生が内挿や外挿を行う事例は、同じ割合で変化するといった関係の特徴が捉えられれば、離散的なデータから他の値を求めることが 4 年生でも十分できることを示している。ここでも問題になるのは、そうした探究を表やグラフが表す関係の特徴として扱っていくという、活動の意味づけだと考えられる。

第二の計算手続きを経由しない変換として捉える機会は、上で述べた離散的なモデルを連続的なものに変える際にも現れうる。内挿を行う際に、定義域にある全ての数について（有限個の点のみを定義域とするのでなければ）具体的に計算するわけにはいかず、したがって、与えられた関係をもとに入力に対して出力が決まりうることのみが確認されることになろう。こうしたことは、教科書でも離散的にプロットしたグラフについて、さらに多くの点を取ることで直線になるという形で現れている。また上で見た小中学校の授業のように、子どもたちはむしろ折れ線グラフとして線を引くように見える。折れ線グラフで

も途中を考えられる場合には、それを考えることは関数の理解を促すとされる(Shield, 2008)が、上述のように、計算を経由せずに当該の関係に焦点を当てた扱いとすることで、プロセス的な捉え方への移行の契機とすることができると考えられる。

また、グラフの描画ソフトでは、式を入力するだけで利用者が具体的な計算手続きをせずにグラフがかけることに着目すれば、手続きを経由しない変換を扱うための手だてとできる可能性がある。さらに上の中学校の授業では１つの式で表現できない関数が扱われたが､式として表現できない関数を扱うことも、対応関係に焦点が当てられるならばプロセス化を促す契機として利用できると考えられる。

第三に、モノ化した捉え方の重要な要件である操作の対象とすることがある(Sfard, 1991)。これについては、Sfard (1992)が指摘するようなニワトリと卵の関係があるが、数や式の学習に見られるように、十分にモノ化されていない状態でも、計算や代入を行うなど操作の対象とすることでモノ化を促すと期待されることから、対応などの関係に対する操作を行う機会を提供できれば、関数のプロセス的な捉え方への移行につながると期待できよう。例えば、教科書では１次関数のグラフの学習で、比例のグラフを y 軸方向に平行移動することでそのグラフが導入されている。これを単にグラフのかき方としてではなく、比例という関数に対する操作として扱うならば、関数に対する操作の機会となりうる。特に、コンピュータで描画されたグラフ上で係数や y 切片などをスライダーにより変化させることは、こうした面を強調しうる活動の候補となる。布川(2010)は共変性の感得のために変数をスライダーにより動かすことを提案しているが、グラフの係数などをスライダーで変化させる場合には、グラフ全体が同時に動くという点で、関数自体に操作を施したという感覚を持ちやすいと思われる。もちろんこの段階では比例という関数が十分モノ化していない場合もあるので、こうした見方を敢えてすることで、比例のモノ化を促すということになろう。また $y=2x+3$ と表される１次関数を、$y=(2x+2)+1$ や $y=(2x+1)+2$ と考え、$y=2x+3$ と同じと考えてよいかを検討することは、手続きに依らずに関係を考える機会になると同時に、１次関数に対して操作を施す機会にもなろう。

なお、以上全てに関わり、教師の信念とそれに基づく語り方の問題がある。関数をモノ化して捉えることは学習者の信念の問題とされたが、だとすると、教師の信念の持ち方、またそれに基づく関数についての語り方が、関数の捉え方に関わる学習者の信念を形成し、捉え方に影響すると考えられる。さらに、先に引用した Font ら(2010)が指摘するように、教師や教科書は対象と表現を区別した語り方をする一方で、数学的対象をある表現と同一視する語り方をすることもある。そうした語り方が、数学的対象の存在をその表現とは独立な何かとして生徒が考えるかに影響を与えるとすれば、そうした語り方を意識的、意図的に行うことが、関数の捉え方の変容を促すことになる。

実際、上で述べてきた活動は、基本的には教科書や授業などでも取りあげられる活動であり、問題はそれをどのような意図でどのような側面に焦点を当てて扱うかにあると言える。表やグラフ、式という表現の背後に表現される関数という数学的対象があるという信念を生徒が持つためには、教師が活動を扱う際に関数についてそのような語り方をする必要がある。

また学習においては、場面中の量を対応させながら記述し、また個々の値を計算する手続きに注意が向けられる局面、表現間やきまりの間の連携を捉え、関数の存在をうかがわせる局面、ある程度対象として成立した関数を場面に適用する局面があると考えたときに、

当該の活動ではどの局面が扱われているのかを意識し、それと整合した関数の扱いをする語り方も求められよう。その時点での学習者の関数の捉え方、あるいは学習活動の意図と整合するような語りをしない場合には、関数は「得体のしれないもの」という感じを与える危険性があると考えられる。

５．おわりに

本稿の検討から、通常行われている活動の中に関数のモノ化への移行に向かう契機は含まれているが、その際の焦点の当て方や教師の語り方が重要な要因になることが示唆された。Gravemeijer & Doorman (1999)は学習が子どもたちの常識(common-sense)から出発することが大事としながら、常識はダイナミックなものであり、子どもの学習に伴い変化すると述べている。また子どもにとってのリアリティも変容するものであり、学習の全体的な目標は、共有されていると感じられる数学的リアリティを少しずつ作りだすこととも指摘している。これらを踏まえるならば、ともなって変わる量を含む現実的な場面についての活動から出発して、そうした場面を関数で考えることや、関数について考えることが子どもにとっての新たな常識となり、関数というモノが存在する世界が子どもにとっての新たなリアリティになることが目指される。そしてこのことは彼らが指摘するように、いろいろな関数という資源が存在し、それを探求したり、必要なときにそれを利用したりできる概念の環境 (conceptual environment; Greeno, 1991)を作り出すことでもあろう。

謝辞：授業の参観を許可下さいました青木弘明先生と尾崎誠先生にお礼申し上げます。

註および引用文献

1) 本稿で取りあげた小学校４年生は、布川(2011)で考察したクラスとは異なる。

2) process の一連の行為・作用、処理という意味も含めるため「過程」と訳さず、「プロセス」としておく。

3) 対応や依存のモノ化として、関数マシン(Hewitt, 2008; DeMarois & Tall, 1996)やブラックボックスが想起されるが、DeMarois & Tall (1996)はこれもグラフや表、式と同じ表現の１つとして扱っている。またブラックボックスでは、ある数をそこに入れて別の数を出すという操作を加えないと対応や依存を表現できず、ブラックボックスの図自体がモノ化された関数の表現というより、入れて出すという対応させる行為を含めてモノ化されねばならないと考えられる。

Blazhenkova, O. & Kozhevnikov, M. (2009). The new object-spatial-verbal cognitive style model: Theory and measurement. *Applied Cognitive Psychology*, *23*, 638-663.

DeMarois, P. & Tall, D. (1996). Facets and layers of the function concept. Proceedings of PME 20, vol. 2 (pp. 297-304). Valencia.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, *30* (1), 15-19.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the construction of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1* (2), 155-177.

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 111-129.

Greeno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal Research for Mathematics Education*, *22* (3),

170-218.
Hewitt, D. (2008). A function machine. *Mathematics Teaching*, *211*, 3-6.
金川　純. (2010). 関数学習において子どもが心的に形成するモデルの発達の様相. 上越数学教育研究, *25*, 27-38.
Lagrange, J.-B. (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: Designing and experimenting the software environment Casyopée. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41* (2), 243-255.
Mahir, N. (2010). Students' interpretation of a function associated with a real-life problem from its graph. *PRIMUS*, *20* (5), 392-404.
布川和彦. (1992). 図形の認識から見た van Hiele の水準論. 教育学系論集 (筑波大学教育学系), *16* (2), 139-152.
布川和彦. (2003). 有効な迂回路としての算数・数学. 上越数学教育研究会 Σ 会 (編), 今こそ Do Math! (pp. 25-34). 上越数学教育研究会.
布川和彦. (2010). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, *25*, 1-10.
布川和彦. (2011). 関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成. 上越数学教育研究, *26*, 1-12.
Schwarz, B. & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics 29*, 259-291.
Schwingendorf, K., Hawks, J., & Beineke, J. (1992). Horizontal and vertical growth of the students' conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 133-149). Mathematical Association of America.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects on different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (1), 1-36.
Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.
Shield, M. (2008). The function concept in middle-years mathematics. *The Australian Mathematics Teacher*, *64* (2), 36-40.
Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.
上田貴之. (2009). 関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて：中学２年「一次関数」の単元における影響についての一考察. 上越数学教育研究, *24*, 41-52.
van Hiele, P. M. (1984). A child's thought and geometry. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn, NY: Brooklyn College, C.U.N.Y. (Original work published in 1957).
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9-35.
ワイルダー, R. L. (1980). 数学の文化人類学 (好田順治訳). 海鳴社.
Yavuz, I. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41* (4), 467-485.