上越数学教育研究, 第 14 号, 上越教育大学数学教室, 1999 年, pp.39-48.

算数から数学への移行期における子どもの論理の発達の特徴
－除法の一般化を事例として－

岡崎　正和

１．はじめに

小学校高学年の算数は、一般的に子どもにとって理解が困難な状況にある。数と計算の分野を見てみると、単位当たりの量、割合、比例に代表されるように、かなり概念的な内容や、ひっくり返してかける分数のわり算に代表されるように、形式的な処理が施される内容が多いのが特徴である。こういった内容は、既に中学校以上の数学としての性格を帯びていると見ることもできる。実際、小学校と中学校の教科書を比較するとき、見た目にはほとんど変わらない書き方がなされた内容もあり、この段階では算数から数学への接続が問題となっている。

算数から数学への飛躍を感じるものに「概念性」、「形式(記号)性」とともに「論理性」が挙げられる。ここでいう論理とは、「何らかの推論をもとにして、筋道を立てて考えたり、根拠を説明したりする」、数と計算の分野に限れば「計算手続きに関する根拠を述べる」ことである(石田,飯田,1991;清水,1995)。こうしたことは小学校から重視されるが、算数と数学では、論理性に違いが見られる。小学校低・中学年の算数では、3つずつ集める、10 等分するといった、「あるものに何かを施す活動」をもとに一つ一つ論理を組み立てていく。一方、中学校の数学では、ｘ＋１３＝５ｘ＋１を解くとき、左辺から右辺へ、右辺から左辺へという二方向への移項が、反数や逆算といったアイデアによって行われ、また関数でも、独立変数ｘと従属変数ｙという２量を分化させ、ｘの変化に伴うｙの変化を捉える思考が要求される。これらはいずれも、一方向から二方向へ、一次元から二次元への思考の転換が行われると言える。

小学校高学年の内容でも、既に活動的意味づけは困難であるため、手続きの習得に偏りがちであり、子どもは手続きの意味づけに関しては硬直した論理性を示す(清水,1995)。熊谷(印刷中)は、小学校の授業において、教師と子どもの間で理由付けがどのように生ずるのかがほとんど解明されていないことを指摘し、通常の授業の中で起こっている、この段階の子どもの正当化の実態を、社会的相互作用論の立場から明らかにしてきている。そこでは、過程としての正当化のプロセスが考察され、正当化の対象と正当化の方法の反射的関係が、正当化の対象を明確にする文脈の構成に貢献していることなどが明らかにされている。

本稿では、除法概念の一般化を意図した小学校５年の小数のわり算の授業のプロセスを、均衡化の観点から分析する。この授業では､子どもの矛盾・葛藤を積極的に取り上げ、それを解消する過程で子どもの論理性の発達が見られる。本稿での分析の焦点は、子どもの中にどのような論理が、どのような状況で生起し、発展していくのかを同定することにある。小学校高学年の算数では、単に形式や計算技能だけが身に付けばよいというもので

なく、論理性の成長を伴わなければ、算数から数学への移行はうまくなされないと思われ、この論理性の発達の特徴を明らかにすることは重要であると考える。

２．理論的枠組み

2.1 Piagetの形式的操作

子どもの論理的思考の発達を捉えるために、Piaget の形式的操作の概念を援用する。形式的操作は、16 個の２項演算のシステムとして捉えられるものである(Inhelder & Piaget,1958)。例えば、四角形における一組の向かい合う辺(緑の道)が平行という陳述を p、長さが等しいという陳述を q とすると、そこには p, q, ¬ p, ¬ q の結合からなる、例えば次のような命題が考えられる(Jansson,1986)。

・緑の道は、同じ長さで、かつ平行である。(p ∧ q)

・道は、平行であるが、長さは同じではない。(p ∧ ¬ q)

・道は、平行と同じ長さが両方とも成り立ってはいない。¬ (p ∧ q)

・道は２つのうちの一つの性質だけをもっている。(p ∧ ¬ q)∨(¬ p ∧ q)

・もし道が平行ならば、それは同じ長さでもある。(p ∧ q)∨(¬ p ∧ ¬ q)

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

算数・数学で形式的操作といった場合、形式性という言葉と結びつき、アルゴリズム的に処理することや、記号を用いて活動することと受け取られるかもしれないが、Piaget は、記号やアルゴリズムにはほとんど言及しない。むしろそれを支える知能や論理を特徴づけるために操作という言葉を用いた。Piaget の場合、形式的操作とは、活動からつくりあげられてきた具体的操作の論理が発展したものであり、上のような命題論理に当たるものを指す。

この形式的操作にはいくつかの特徴があり、Piaget の文献(Inhelder & Piaget, 1958)によれば、次のようにまとめることができる。

（A）推論的特徴（仮説-演繹的）
　A1 仮説、可能性が思考の対象
　A2 命題論理に基づく推論
　A3 一般性(理由、法則)の探究
（B）操作の構造的な特徴
　B1 ２種類の可逆性(逆と相互性)
　B2 組み合わせの体系
　B3 二次的操作(操作に関する操作)

この形式的操作は、小学校高学年の算数の学習において子どもの中で現れてきて、それらが徐々に顕在化され、数学の学習が可能となると予想されるが、これらが実際の授業の中で、具体的にどのように現れるのかを明らかにする必要がある。その際、我々の関心が数学教育にある限り、数学の構造に関わって明らかにする必要があると考える。

2.2 等分除に関する教科の論理と子どもの論理

等分除の問題とは、例えば「12 個のりんごがあります。このりんごを３人で分けると、一人分は何個になるでしょう」という問題であり、整数から有理数に拡張されるにしたがって、「2.8 ｍのリボンの値段は 560 円です。１ｍのリボンの値段は何円でしょう」のような問題になる(前者を等分除、後者を「等分」除と表記し、等分除的わり算というときは両者をさすことにする)。これらは両方とも 1 当たり量を求めるわり算であるという意味で、数学的に同種の問題である。これを数学的に表現すれば、以下のようになろう。

「(a, b)を順序対とし、(a, b)≃(ma, mb)という関係を入れると、関係≃は同値関係となって、(a, b)の同値類が形成される。
　等分除的なわり算とは、被除数と除数の対からなる元(a,　b)を同値類内の元（商,　1)に変換することである。」

小学校では、関係≃を、「被除数と除数に

同じ数をかけてからわり算をしても、同じ数でわってからわり算をしても、商は変わらない」というわり算の性質として扱い、これを演算の根拠とする。例えば（560，2.8）は、一度（5600，28）という整数の対（整数のわり算）に置き換えられ、それから（200，１）という商に変換される。

等分除的わり算は、数学的には「割る」「分ける」という日本語の意味をもっていない。むしろ割合的、比例的な意味のものである。実際、560 ÷ 2.8 ＝ 200　というわり算の意味は、2.8 が 560 に当たるとき、１に当たる量が 200 である、というように解釈される。

教科の論理と対置される言葉に、子どもの論理、生活の論理（注１）という言葉がある(吉本,1981,1987)。この子どもの論理に対して、Fischbein(1985,1989) は「暗黙のモデル」という概念を提起し、それをもとに子ども独特の論理の原因を明らかにしている。

暗黙のモデルは、一般化の文脈に位置づけた時、その存在が明確になる(岡崎,1995)。数学的一般化は集合Ａからそれを含む集合Ｂへ思考の対象を広げることであるが、子どもには拡張された集合Ｂの中に、拡張される以前の集合Ａに固有な性質が残存する傾向があり、このような子どもの思考を暗に制御しているものが暗黙のモデルである。子どもは、等分除に関して「除数は整数でなければならない」と「わり算をすれば、商は必ず小さくなる」という２つの暗黙のモデルを構成している。この考えは小数のわり算には通用しないため、子どもの葛藤の原因となる。

数学的には等分除も「等分」除も同じものであるが、子どもにとってはかなりのギャップがある。最も大きなものは、前者は「分割する」「分ける」という活動的な意味付けができるのに対して、後者では、2.8 等分といった意味づけができないことにある。子どもは演算に対して、何かを施す行為、活動として意味付けてきたが、小数になった途端に数学的な意味が優勢になり、ここに子どもが困難を感じると考えられる。

３．授業における子どもの論理の実際
－均衡化の視点からの分析－

本節では、小数のわり算の授業において、子どもの暗黙の論理が表出し、それを子ども達が解決していったプロセスを分析する。

データは国立大学附属小学校５年生（男子 20 名、女子 18 名）に対して、筆者が計画した小数のわり算の授業を、担当教師に行ってもらったものである（実施日時：1996 年６月 28 日，７月１，３，４，８，９, 11 日)。この授業では、等分除から「等分」除への一般化(岡崎, 1996)が意図された。

最初の２時間を使って、子ども達は次のことを構成した。「2.4 ｍのテープが 108 円です。このテープ１ｍの値段はいくらでしょう」という問題で説明する。

１.「2.4m が 108 円」と同じ状況はいくつもある。(例えば 4.8m が 216 円，7.2m が 324 円, … 12m が 540 円… 24m が 1080 円)
（実際のテープや操作的教具を使用）

２.「被除数と除数をそれぞれ何倍か（５倍, 10 倍）すれば整数のわり算に帰着できる」
108(円)÷ 2.4(m)
＝ 1080(円)÷ 24(m) ＝ 45

３．先に 0.1 ｍ当たりの値段を求める。
108(円)÷ 24 × 10 ＝ 45

データは、除数が純小数となる「0.8 ℓが 116 円のジュースがあります。このジュース１ℓの値段はいくらでしょう」という問題の解決に進んだ時のものである。

3.1　暗黙の論理の表出

子ども達はこれまでの学習をもとにして、116 ÷ 0.8 と式化し、計算によって商を導きだした。(３時間目の後半)

116 ÷ 0.8 ＝ 145

ここで、式が何を表しているかを表現する（「式を読む」）活動を行った。その学習が

始まった途端、子どもの反応が一変した。

C1：116 ÷ 0.8 で。あれ、なんで 116 ÷ 0.8 になるんだろう？

Ｔ：何がおかしいの？

C1：これ 145 にならない。

Ｔ：これ 145 にならない？

Cs：なる。(Cs は複数の子ども)

C1：145 にはなるんだけど、これ... 145 円になるけど... この何円ですかという答えが 145 円にはならない。

Cs：なんで。なるじゃん。

Ｔ：ならない？１ℓの値段はいくらですか。0.8 ℓは 116 円。１ℓは 145 円。おかしい？

C1：でもなんで 0.8 でわったら１ℓがでるのか...

C2：0.1 ℓがでるんじゃない？

Ｔ：あれ？こんがらがった？ 145 にはなるんだよね。116 ÷ 0.8、この式は何を意味しているんですか？

C3：116 ÷ 0.8 をしたら...0.1 ℓの値段が出ると思います。

Cs：同じです。

Ｔ：0.1 ℓの値段がでる？これは 0.1 ℓの値段のこと？

Cs：いや、ちがう。

何人かの子どもは、「0.1 ℓの値段を求める式」であると考えた。それが、その子ども達の論理に整合するものなのであろう。

これは暗黙のモデルを考えれば説明がつく。つまり、子どもはわり算をすれば答えが小さくなると考えて、それが影響を及ぼしたということである。100 ÷ 2.5 や 108 ÷ 2.4 の数値で学習したときは、このような葛藤は生じなかったことからも伺える。

3.2 命題論理的な説明と暗黙の論理の強固性

この子ども達の「0.1 ℓの値段を求める式」という考えは、他の子ども達からすぐに論駁されてしまう。

C4：もし 0.1 ℓが 145 円だったら、0.8 ℓが 116 円なんだから、0.1 ℓのほうが 0.8 ℓよりも高くなってしまう。

C5：0.1 ℓの値段をだすには 116 ÷ 8 をする

この意見によって、0.1 ℓの値段ではないことが多くの子どもに意識され始めたが、0.1 ℓ当たりの値段でないからといって、116 ÷ 0.8 ＝ 145 という式が「１ℓ当たりの値段を求める式」になっているという理由にはならない。次に、子ども達はそれについて説明をはじめた。

C6：116 ÷ 8 をすると 0.1 ℓの値段がでると思うけど、116 ÷ 0.8 は、１ℓの値段になると思います。

C7：(116 ÷ 0.8 と 580 ÷ 4 が同じものを求める式であることを指摘した後) 4 ℓを分けるんだから、１ℓがでるのは当たり前なんじゃない。それ 0.1 ℓがでるのはおかしいんよ。

C8：116 ÷ 8 というのは 14.5 なんだけど、116 ÷ 0.8 というのは、8 の 10 分の 1 なんだから、答は 0.1 ℓ、いわゆる 14.5 より 10 倍大きくなるはずなんだから、116 ÷ 0.8 のままでいいと思います。

このような子ども達の発言から、116 ÷ 0.8 ＝ 145 という式が１ℓ当たりの値段を求める式であることが、一度はクラスで合意された。この子ども達の説明には、次のように、ＡとＢからＣを導く演繹論理の初期的な形態が見られる。

Ａ：「(5 倍)580 ÷ 4 をすれば、１ℓ当たりの値段がでる」(合意済み)

Ｂ：「580 ÷４と 116 ÷ 0.8 は同じものを求める式」(合意済み)

Ｃ：ゆえに「116 ÷ 0.8 は、１ℓ当たりの値段を求める式」

Ａ：「116 ÷ 8 をすれば、0.1 ℓ当たりの値段がでるから、116 ÷８× 10 は１ℓの値段を求める式」(合意済み)

Ｂ：「116 ÷ 0.8 と 116 ÷８× 10 は同じものを求める式」(何人かの子どもで合意)

Ｃ：ゆえに「116 ÷ 0.8 は、１ℓ当たりの値段を求める式」

こうした三段論法的な、論理的な説明が、間心理的葛藤を契機に生起してきた。

しかし、教師が次の授業(４時間目)のはじ

めに、その式に不安を感じている人は手を挙げるよう子どもに要求すると、７割くらいの子どもが挙手した。多くの子どもは十分納得していたわけではなく、潜在的には不均衡であった。

「116 ÷ 0.8 ＝ 145」という式が「１ℓ当たりの値段を求める式」になっていることを子ども達がさらに説明し始めた。例えば、以下のような子どもの発言である。

C9：えっと、前、ここで 116 ÷８× 10 という計算がでて...116 ÷８をしたら、14.5 がでて、かける 10 をしたら、145 がでたんだけど、そのときになぜかける 10 をするかは、0.1 が 10 個で１ℓなんだけど...ここの 10 を前にもってきたら、1160 になって、それわる８といっしょの意味になるから、この式(116 ÷ 0.8)は、これをまとめたものと考えて、１ℓのジュースの値段がでるんだと思います。

この C9 の発言には 116 ÷８× 10 が 116 × 10 ÷８と同じであることが指摘されており、既に具体を離れて、式を対象化し、その式を操作する説明となっている。この発言は、C5、C8 のような考えをさらに高次の水準で再構成する内省的抽象(Piaget,1986)、超越的再帰(Kieren & Pirie, 1994)であろうと考えられる。こうした展開を経て、三段論法的な論理の組立て、具体を離れた仮説レベルでの操作など、形式的操作の論理が明確な形になってきた。

このような子どもによる論理的な説明に対して、なお多くの子どもが納得していなかった。というのは、これらの説明では、一度別の式、例えば 1160 ÷８への置き換えがなされており、116 ÷ 0.8 自体で説明したものではない。つまり「÷ 0.8」が問題にされていない。次には、その式に不安を感じている子どもが意見を述べた。

C10：なぜかは分からないけれども、わり算なのに、まえ説明してもらってもよくわからなかったんだけれども、わり算の商が大きくなっている。わられる数より。

C11：...116 円を 0.8 でわってるのに、145 円。なんで、0.8 でわったら、わる２だったら半分になるってわかるんだけど...0.8 だったら、どういうふうになったら 145 になるかわからない。

T：ではこの、わる 0.8 に一つ問題があるんだね、みんな。ちがう？

Cs：うん。そう。

T：不思議やね。わられる数よりも答の方が大きくなる。

Cs：おかしい。

子ども達は、この場面で、次の点に問題を感じていたことをはっきりと意識化した。

- わり算なのに、答が大きくなっている
- ÷ 0.8 がどのようなことをするものなのかが不明。

子どもの暗黙の性質と、新たなわり算のやり方との間で葛藤が起こっている。この葛藤は「÷ 0.8」を等分操作で捉えようとするために起こっている(C11)。これは「0.8 当たりが」という割合的な意味であり、操作を意味しない。「÷ 0.8」を「÷８× 10」とすれば、操作的な感じがするため、子ども達はこの変換を好むのであろう。

ここまでの展開を整理する。

- 不均衡・葛藤を契機として、子どもの中に命題論理的説明が生起してきた。
- 不均衡とその均衡化が交互に生じながら、子どもの説明はより形式的操作の特徴をもってきた。
- 純粋に論理的説明だけでは、子どもの暗黙のモデルの解消には至らない。

この第３点目を解決することが子ども達の目的となった。教室で実際に起こったことを引き続き述べていく。

3.3　可逆性による均衡化の過程　－逆－

この葛藤は、ある子どもがかけ算の逆演算に着目した発言を行ったことから、解消され始めた。

C27：えっと、116 円わる 0.8 で考えたらい

けないわけであって、逆にして・・１ℓが 145 円のジュースを 0.8 ℓ買ったら、何円ですかで調べると・・116 円になるから多分そうなる・・・あ、なったなった。それで、わり算というのは、わる数が小数でも整数でも、えっと答えは、どういえばいいかな、１ℓとか、そういうふうに、１ℓや１の、１ℓを求める。

この C27 の「かけ算の逆演算」という意見によって、他の子ども達も、その式が１ℓの値段を求める式として妥当なものであると考え始めたのである。しかも C27 は、わり算の意味（１当たり量）にまで言及している。しかし C27 の意見は、解いた後の検算という性格を有しているので、他の子ども達から却下された。次の子どもの発言によって不均衡の原因がさらに明確化された。

C28：えっと、116 × 0.8 だったら、116 が 0.8 個分ということでわかるんだけど、116 ÷ 0.8 だったら、どのようになるか教えてほしい

この C28 の意見でもわり算だけでなく、かけ算が意識され始めている。この意見に対し、C29 はそのわり算の式にこだわることがかえって分からなくしていると主張した。

C29：この前からやってるんだけど・・・５倍しているところが・・580 円と４ℓなんだけど。・・みんなが 0.8 ℓが 116 円だってことばっかり考えているから、なかなかまとまらなくって。はじめっから自分で問題をつくって、「４ℓのジュースの値段は 580 円です。このジュース１ℓの値段は何円でしょう」というふうにすれば簡単に求まるんだから。みんなは 0.8 とか、はじめ出ていたことだけにこだわっているけど、かける５とか、かける 10 とか、そういうふうにしていけば、もっと簡単に、はやく計算できる。

問題を「0.8 ℓが 116 円」ではなくて、「４ℓが 580 円」に変えてしまえば何の問題もなくなるという意見である。この意見は、116 ÷ 0.8 というわり算の式を排除するような性格をもっている。しかし一度不均衡を起こした子どもは、何らかの理由、関係でもって理解しなければ均衡化しない。実際、C29 の意見に賛同する子どもは少なかった。

この場面では、それまで 116 ÷ 0.8 が 0.1 ℓ当たりの値段だと考えていた子ども達も、逆演算の「１ℓが 145 円のジュースを 0.8 ℓ買うと 116 円になる」という C27 の意見によって、答えが１ℓ当たりの値段であると考えるようになったこと、そしてかけ算とわり算の関係が意識されてきたことがわかる。

3.4 可逆性による均衡化の過程 －相互性－

教師は、それまで考えてきた操作数直線での活動(岡崎,1996)と、新たに比例の図式(磯田,1996,108-117)を活用して、子ども達に理解を促そうとした。（図１）

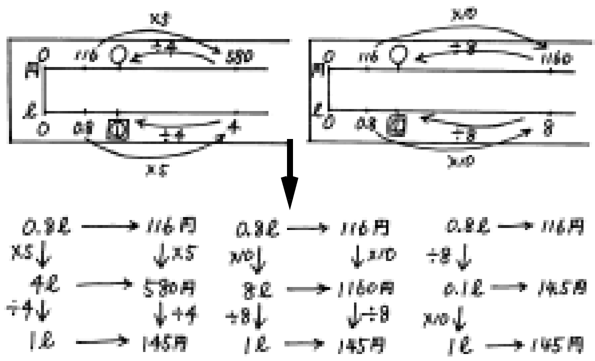


図１：操作数直線での活動の跡と
その比例図式への翻訳

続いて、比例図式の最初と最後の部分、子どもの言葉では「最初が 0.8 ℓではじまって、最後が１ℓで終わっている」という図式において、「÷ 0.8」の意味を探究した。(図２)

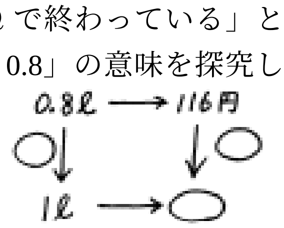


図２：116 ÷ 0.8 の場面での比例の図式

Ｔ：そしたら、この黄色い部分、この２つでだせない？

C30：(黒板にでてきて× 1.25 と書く)

Ｔ：ほんとか？ここは

C30：(× 1.25 とかく) 0.8 ℓは 116 円で、１ℓは 145 円。つまり、0.8、１ℓの、0.8

ℓの何倍かが１ℓで、それが 1 ÷ 0.8 をやって 1.25 で

Ｔ：ちょっとまって 1 ÷ 0.8 ？ああ 1.25 ね。

C30：1.25 倍するんだったら、値段も、もちろん 1.25 倍しないといけないんだから、116 × 1.25 で 145 になる。

Cs：同じです。

C30 は、「÷ 0.8」とせずに「× 1.25」とし、そしてこの考えに多くの子どもが納得し、賛同した。教師は 0.8 ÷ 0.8 をして１にすることを念頭においていたが、子ども達にとっては、１は 0.8 の 1.25 倍と考える方がかなり自然であった。

教師は、問題文章の中に 1.25 という数字が出てこないことを指摘した。しかし、子ども達は意味づけしにくい「÷ 0.8」よりも、意味づけできる「× 1.25」の方に信頼を寄せた。そして「× 1.25」の考えで、これまでの式、例えば 116 × 10 ÷８を 116 × 1.25 と再解釈できたことから、その考えへの信頼をさらに増していった。教師は÷ 0.8 の方に方向付けようとするが、子どもは× 1.25 の立場を崩さない。

C31：１ℓに 0.8 ℓが何個あるかだから、１ℓの値段が 145 円で、0.8 ℓが 116 円だから、145 ÷ 116

Ｔ：145 ÷ 116 はいくつか？ 1.25 か

C32：うん

Ｔ：じゃあ、116 ÷ 145 はいくつになるん？

C33：計算するよ

Ｔ：もう一回言うよ、116 ÷ 145 はいくつになるん？

C34：ここ(比例図式)。５÷４の時に 1.25 がでて、10 ÷８も 1.25 がでて、÷８× 10 ではでないんだけど、これ(÷８× 10)とこれ(10 ÷８)はだいたい同じことだから

C34 の発言は、具体を捨象し、完全に式を対象化している。ここで教師は多少強引ではあるが、「× 1.25」と「÷ 0.8」の関係に注意を向かせようとした。

Ｔ：×５÷４、これは 1.25 だな。× 10 ÷８、これは× 1.25。はい、÷８× 10、これは÷ 0.8 や。じゃあ、÷ 0.8 と× 1.25 はちがうん？ ８でわって 10 かける、0.8 じゃろ。みんな。10 かけて８でわる、× 1.25。× 1.25 と÷ 0.8 はちがうんですか、みんな。

C35：かけわり算の時は、えーと。116 ÷ 0.8 の時は、わって出すけど、かけるときは、116 × 1.25 でもいい。

Ｔ：はい、そうですね。最後、これは× 1.25 でしょ。わるで表したら、上から下。0.8 をなんでわったら１になる？

C36：0.8

Ｔ：・・・0.8 を 0.8 でわったら１だろ。じゃあ、１に何をかけたら 0.8 になるの？
・・・・・・・・・・・・・・・

C37：× 0.8

Ｔ：× 0.8。・・・ 145 にある数をかけたら、116 になります。何をかけたら 116 になる

C38： えーと、0.8

Ｔ：× 0.8。これから何か気づいたことない？

C39：× 1.25 と÷ 0.8 は同じってこと

Ｔ：いっしょなん、みんな。ちょっとやってごらん？÷ 0.8 と× 1.25 が等しいかどうか。

C40：あ、なったなった。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・

Ｔ：・・きいているのは、ある数を 1.25 倍する答えと、ある数を 0.8 でわるのはいっしょなんですかっていうことをきいているんですよ。

Cs：同じ

Ｔ：ほんと？

Ｃ：なった

Ｔ：ならこれは、１ℓ？ 0.1 ℓなの？ 116 × 1.25 といっしょなんですか、これは

Cs：いっしょ。

Ｔ：じゃあ、増えるの当然よ

Cs：そういうこと！

Ｔ：だからよ、じゃあこれは 1 ℓのジュースの値段でいいんですか。

Cs：はい！！

Ｔ：まいがいない？

Cs：はい、まちがいない！！

教師は、116 ÷８× 10 と 116 ÷ 0.8 とが同じ式であるという子どもの意識を利用して、÷ 0.8 と× 1.25 を同じ舞台にのせた。

116 × 10 ÷８　⇔　116 ÷８× 10

⇃↾　　　　　⇃↾

116 × 1.25　　　　116 ÷ 0.8

これを契機として、子ども達は「÷ 0.8」を「× 1.25」で意味づけた。まだ多少の混乱が見られる子どももいたが､多くの子どもは、意味づけることができた｢116 × 1.25 ＝ 145」を道具立てとして、再度「116 ÷ 0.8 ＝ 145」という式の意味づけを行ったのである。

第５時では､「116 ÷ 0.8 ＝ 145 という式が本当に１ℓの値段を求める式なんだろうか」ということについて再度確認を行った。

Ｔ：ここに矢印があったのを覚えていますか？

C41：だから、今先生がやっていることは、かける 1.25

Ｔ：ああ、ここはかける 1.25。みんなそうやった？

Cs：はい。

Ｔ：かける 1.25 は何に等しかった？

C42：はい、はい、0.8、ああ、わる 0.8

Ｔ：わる 0.8。ここまででたね。でしょ。だったらここは？ここはいくつになりますか？

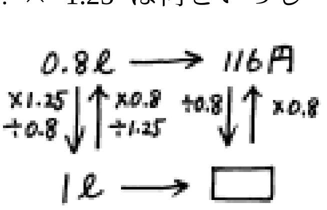
C43：かける 1.25

C：まだある。

Ｔ：何といっしょ？× 1.25 は何といっしょ？

C44：÷ 0.8

Ｔ：はい、ではもう一つききます。ここは何？



図：比例図式

C45：かけ 0.8、わる 1.25

Cs：同じです。

これによって、「÷ 0.8」と「× 1.25」が同じであるという可逆性(相互性)の認識が深まり、0.8 ℓがわかっているときに、１ℓを求めたいがために、0.8 でわるということがかなり意識された。

116 ÷ 0.8 ＝ 145 を代表として計算のまとめを行った時(第６時)には、子ども達は次のことを理解していた。

C46：□× 0.8 が 116 というふうになってたんだから､それを逆にして 116 ÷ 0.8 を 145 というふうにやる(かけ算の逆)

C47：0.8 ÷ 0.8 というのをして、１ℓを求めるんだから、0.8 ÷ 0.8 をして、116 円は… 116 円は 0.8 ℓと等しいから、116 も 0.8 でわって、わるから 145 というのがでてくる(比例的な考え方)

C48：やっぱり 116 ÷ ８× 10。最初に 0.1 を出して、その後で 10 かける。

C49：今までのわり算の中でも、６÷２は３で、60 ÷ 20 も３になって、10 倍しても… 答えは同じになるので、それを使って… 1160 ÷８… は… 116 ÷ 0.8 といっしょになるから、１ℓを求める式はそうなると思います。(わり算のきまり)

４．考察

この授業の中で現れた、子どもの説明の特徴を、まず形式的操作の点から見てみる。

子ども達は最初はテープや操作数直線を用いて具体的にわり算を捉えていたが、ある子ども達の 116 ÷ 0.8 ＝ 145 が 0.1 ℓの値段であるという意見をきっかけに､それを論駁し、１ℓの値段あることを証明するという文脈で授業が展開した。子どもは、わり算の計算は既に了解済みだったので、116 ÷ 0.8 の答えが 145 であることに異論はなかったが、その答えの解釈を１ℓの値段ではなく、0.1 ℓの値段に変えてしまった。

このプロセスにおいて、子ども達は、次第に具体から離れた仮説レベルで(A1)論理を展開するようになり、いくつかの操作を組み合わせ(B2)、三段論法的な推論(A2)を生じさせた。また、子ども達の議論は、答えが何になるか(結果)ではなく、なぜそうなるのか(過程)という理由の追求(A3)であった。

こうしたプロセスは、単純に生起したのではなく、不均衡と均衡化を何度も繰り返すというものであった。その均衡化の特徴は、以前に均衡に至った(他者の)考えをうまく取り込んで、より強力な考えを生み出していくプロセスであった。

しかし、こうした説明の生起にもかかわらず、子ども特有の論理である「わり算は小さくするもの」はなかなか解消されなかった。そして、さらに子どもが作り上げたものは、先程述べた A1 ～ A3 の特徴をもつ論理の他に、２種の可逆性(B1)が含まれていた。

一つはいわゆる逆思考であり、わり算をかけ算の問題に直し、かけ算の文脈で１ℓの値段であることを正当化するものである。もう一つは、同一のコインの表裏のように、同じ操作に値する､別のものを考える思考である。つまり÷ 0.8 を施すことと同値なものを考えることであり、子どもにとってそれが× 1.25 であった。子どもにとって、× 1.25 が大きくすることはリアルであり、これに基づき、÷ 0.8 が大きくすることであることを実感していった。

この一連の流れは、次のように表せる。

０．答えがいくつになるか(結果)についての具体的で操作的な説明

116 ÷ 8 × 10, 116 × 10 ÷ 8 など

１．答えが 0.1 ℓの値段でないことの論駁

0.1 ℓならば、116 ÷ 8 になる

２．答えが１ℓの値段であることの説明(1)

具体を参照して､三段論法的に説明する。

３．答えが１ℓの値段であることの説明(2)

116 ÷ 8 × 10 と 116 × 10 ÷ 8 が同じであるといった、具体を離れた説明をする。

４．答えが１ℓの値段であることの説明(3)

□× 0.8 ＝ 116 より 116 ÷ 0.8 とする。

可逆性(逆)に関する説明。

５．答えが１ℓの値段であることの説明(4)

÷ 0.8 を× 1.25 によって説明する。

可逆性(相互性)に関する説明。

次に、教科の論理に関して述べる。子ども達の説明は、既に段階３までの、まだ暗黙の論理が解消されていない段階から、ある程度論理的であった。その証拠に、授業の中での子どもの発言に、暗にわり算のきまり(石田,小山,1992)が含まれていた。

性質 D1　$(a \times m) \div (b \times m) = a \div b$

性質 D2　$(a \times m) \div b = (a \div b) \times m$

性質 D3　$a \div (b \times m) = (a \div b) \div m$

性質 D4　$(a \div m) \div (b \div m) = a \div b$

性質 D5　$(a \div m) \div b = (a \div b) \div m$

性質 D6　$a \div (b \div m) = (a \div b) \times m$

性質 D1,D6 は頻繁に現れ、D2, D3, D4 も意識的であるかどうかは別として、かなり用いられた。

・116 ÷ 0.8 → 1160 ÷８［D1］

・116 ÷８× 10 → 116 × 10 ÷８［D2；C9］

・116 ÷(８× 1/10)→(116 ÷８)× 10［D3；C8］

・1160 ÷８ → 116 ÷ 0.8 ［D4；C9,C49］

・116 ÷ 0.8 → 116 ÷８× 10［D6］

こうした論理の生起や発達には、常に不均衡・葛藤が契機となっていた。「不均衡のみが、主体に現在の状態を越えさせ、新しい方向に進み始めさせた」(Piaget,1985)のである。

結局のところ、小学校５年生の子どもの思考には、いわゆる論理的な部分と、低学年の時から子どもが暗に作りあげてきた暗黙の論理が同居していた。わり算は小さくなるという感覚は子どもが創り上げてきたことであり、真実感があった。これは、わり算を比例的に捉えるだけでは解消されなかった。この暗黙の論理を子どもの中から切除するのでなく､別のルートが示唆された｡つまり､× 1.25 を用いて、それが÷ 0.8 と同じことを認識するルートである。それによって、これまでの小さくするわり算(ｐ)と、× 1.25(＝÷ 0.8) を視点とした大きくするわり算(¬ｐ)が合わさって(ｐ∨¬ｐ)、わり算が小さくすることにこだわりがなくなったと考えられる。

これはあたかも、良いと思っていることを

誤りだと責められれば、いつまでも心の中から消えないが、それが認められ、正しいとされたことも経験した時、それまでのこだわりが些細なことに思えてくることに似ている。こうした否定の中に子どもの願いを見て、それを肯定に転化する教育学(吉本,1989)は、教科教育学にも言えることかもしれない。数学と言えども、人間の創造物であり、そこには人間らしさが入り込んでくる。暗黙のモデルとはそういった人間らしさを象徴したものであると考える。

新たな知識の理解を、子どもの心と分離したものにしないためにも、この暗黙の論理をいかに顕在化しながら、子どもの論理性の成長を促すかが、算数から数学への道筋を模索していく上で、今後の重要な課題となる。

注及び引用参考文献

注１：教科の論理とは、教科が持っている体系性、系統性を指している。これに対して、生活の論理とは、子どもなりの「感じ方、思い方、考え方」を支えているものを指す。この生活の論理には､心理発生上の法則とともに、子どもを取り巻く社会的諸関係、地域の生活様式、子どもの生活史にも大きく規定されている。(吉本編,1987)

石田忠男,飯田慎司.(1991).「図形(高学年)の指導内容の概観」.石田忠男,平岡忠編， 新算数指導実例講座 8 図形, (pp.3-32). 金子書房.

石田忠男,小山正孝.(1992).「計算のきまり」の指導のねらいと内容」． 新しい算数研究５月号(pp.2-5). 東洋館出版社.

磯田正美編著.(1996)．多様な考えを生み練り合う問題解決授業, 明治図書.

岡崎正和.(1995)．均衡化理論に基づく数学的概念の一般化における理解過程に関する研究ー暗黙のモデルとネガティブな側面ー． 中国四国教育学会, 教育学研究紀要, 第 41 巻第２部,(pp.148-153).

岡崎正和.(1996)，わり算概念の一般化における理解過程に関する研究ー「等分除」の一般化ー. 広島大学教育学部紀要(pp.83-92).

熊谷光一.(印刷中)．小学校５年生の算数の授業における正当化に関する研究ー社会的相互作用論の立場からー．日本数学教育学会誌, 数学教育学論究.

清水美憲.(1995)．分数の除法に関する児童・生徒の認識；その硬直した「論理性」の問題. 日本数学教育学会誌, 数学教育学論究, Vol.63/64(pp.3-26).

那須俊夫.(1984). 同値関係について, 広島大学教育学部紀要, 第２部第 33 号(pp.87-96).

Piaget,J.(1986)．認識の心理発生とその認識論的意味． ロワイヨーモン人間科学研究センター編, 藤野邦夫訳, ことばの理論学習の理論,(pp.33-42) 思索社.

吉本均編.(1981)．教授学重要用語 300 の基礎知識. 明治図書.

吉本均編.(1987).現代授業研究大事典,明治図書.

吉本均編著.(1989). 否定のなかに肯定をみる. 明示図書.

Fischbein,E. *et al.*(1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Reserch in Mathematics Education*, Vol.16, No.1(pp.3-17).

Fischbein,E.(1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathemat ics*, Vol.9, No.2(pp.9-14).

Inhelder, B. & Piaget, J.(1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adlescence,* (trans. by Parsons,A. *et al.*). NY: Basic Books.

Jansson,L.(1986). Logical Reasoning Hierarchies in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.17, No.1,(pp.3-20).

Kieren,T. & Pirie,S.(1991). Recursion and the Mathematical Experience. Steffe,L.(ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience.* NY: Springer-Verlag(pp.78-101).

Piaget,J.(1985). *The Equilibration of Cognitive Structures: The Central Problem of Intellectual Development*, (trans. by Brown,T. *et al.*). University of Chicago Press.

Pirie,S. & Kieren,T.(1994). Growth in Mathematical Understanding : How Can We Characterise It and How Can We Represent It ?. *Educational Studies in Mathematics*,Vol.26, (pp.165-190).