全体論的な視座からの授業設計に関する考察
－中学校１年の文字式・方程式の授業デザインに向けて－

岡 崎　正 和

１．はじめに

全体は，独立した部分の総和からなる。それゆえ部分の確実な理解が，全体を理解することに繋がる。この原子論的な立場は多くの現場教師の指導原理になっている。こう考える教師は，単元の内容を細かく分割して，指導をスモールステップ方式で展開する。また教科書自体がそうした作りになっているという指摘もある(國本,1998)。テストや受験である程度問題を解けるようにさせたいという願いと，この原理は密接に結びついていると思われる。

一方「全体は部分の総和としては認識できず，全体としての原理的把握が必要である」(下中,1971)という全体論の立場がある。この立場では，いくら一つ一つのことができるようになっても，全体として何をやっているのかは分からないとされる。さらに言えば，部分は全体との関係でしか存在しないと考えられているので，全体が見えない生徒は結局部分もあまり分かっていないことになる。この立場の人には，生徒からの「今何をしようとしているのか分からない」といった言葉が，「僕たちには全体像が見えていないから，やっていることがどんなことなのか判断ができない。全体が見えているのは先生だけでつまらない」のように聞こえるかもしれない。

中学校以降では原子論的な指導は顕著であり，全体論の立場での授業設計のあり方，それを支える数学教育の哲学，心理学，社会学などの考察が十分でないように思われる。本稿は，特に中学校１年の内容に関して，全体論的な視座に立つ授業をつくる上での授業設計のあり方を考えていきたい。

２．全体論的な学習に関する一つの考え方

全体論の立場から教材構成を考える上で，Piaget の認識論，Skemp 以降の理解研究，ドイツの Wittmann やフランスの Brousseau を中心とする学派の研究に着目したい。

Piaget は数学の認識をシェマの同化と調節の均衡化によって捉えた。シェマは活動の一般的な形式であり，多くの活動を導くものを言う(Furth,1972)。例えば比例のシェマは，かけ算，わり算，比，比例，分数は言うに及ばず，様々な概念を理解する上での基本的素地である。シェマはしばしば蜘蛛の巣に喩えられ，理解という現象を語る上でのキー概念とされている(平林,1987;小山,1992; Hiebert & Carpenter, 1992)。このシェマが形成されているからこそ，多くの概念を理解できるのであり, 逆に考えてみれば, シェマの活性化こそ, 数学理解に本質的なことになろう。

Skemp(1979,1982)は，理解という語に，道具的，関係的などの形容詞を付けて，それが多義語であることを説明した。彼は子どもが「わかる（関係的理解）」という経験を持つことを重要視し，それを促す関係的学習を次のように特徴づけている(Skemp, 1992)。

1．手段は，それによって達せられる特定の目的から独立である。
2．与えられた知識領域内でシェマをつく

ることが，本質的に満たされるべき目標それ自体である。

3．生徒のシェマが完全であれば，それだけ自分の能力に対する自信は大きくなり, 外的な助けなしに「そこへ到達する」新しい道を見つけることはできる。

4．しかし，シェマは永遠に完成しない。シェマが拡張されるにつれて，可能性の意識も拡大される。かくて，この過程はしばしば自己継続的であり，（３．によって）自己報酬的である。」

この立場を実現する上で，Wittmann(1984, 1995)の教授単元の思想が参考になる。これは原子論的指導に対する根源的な反省のもとで提起されており(平林,1999)，生徒を適切な環境に置き，そこでの生徒の活動をもとに学習を展開しようとしている。平林は教授単元の思想が Dewey の教育学「漠たる全体・分析・確定した全体」や Gattegno の教育学「少ないものから出発し，それをどこまでも発展させよ。数学とはかようなものである」に通じると述べている。特に，Dewey の標語に着目すれば，学習にはまず漠たる全体があって，その後に分析が始まる。Piaget の用語では，シェマによる同化・調節の活動の前に，シェマ作りあるいはシェマ意識化の活動がある。

本稿では，漠たる全体を「その後の学習に対する全体像，基本的なアイデアや活動の仕方，動機づけ」と規定したい。そして，生徒自らが，単元を学習する最初に，これらを獲得することに関心がある。

３．全体論的な視座からの授業設計の事例

本節では，中学校１年の教材の中で，全体論的な展開として一般に普及している「トランプゲームによる正負の数の加減乗除」と，岡崎，岩崎，板垣が全体論的な視座から開発した「図形の探究を柱とした図形の作図」を概観し，展開の特徴について述べる。

3.1．正・負の数の加減乗除

トランプゲームによる正・負の数の演算の学習指導では，加法と減法（さらには乗法と除法）が一度に扱われる。ゲームのルールは次のようなものである。

《黒札は財産，赤札は借金に喩える。カードを抜き，抜かれる間に，自分のカードの得点を合計して，一番得点が高いと思ったら，カードを抜かれた時にストップをかける。そこでゲームを中止して，各自が自分の得点を合計して発表する（プリントに記録する)。ストップをかけた人が実際は得点が１番高くなかったら，最下位の人と得点を交換する。》

何ラウンドかの後，合計得点を競うゲームである。このゲームでは，黒札をもらう時と赤札をとられる時には「喜び」，逆に赤札をもらったり黒札をとられる時には「残念がり」ながら，生徒は生き生きしてこのゲームを楽しむ。そしてまだ正負の数の加減を学習していない生徒が，こうした感情や比喩的な理解を活用しながら，計算を行うことができる。ある生徒は，「私たち，正の数と負の数の足し算や引き算をまだ習っていないのに，まるでもうやっているみたい」のような発言を行った。２，３時間この活動をすれば，多くの生徒はルールや活動を意識し，それらを数学的に再構成する準備ができている。

一般に行われるこの内容についての説明には次の３つがある。

(1)　東西の移動や大小比較の場面

３－（－２）を例にとれば，東に３の地点から西に「向きを変えて２つ」「下がる」，あるいは－２の地点から見て３の位置はどれだけ進んだ場所か，のように意味づけされたり，「３より－２小さい数」をレトリック上の問題として「３より＋２大きい数」と読み替えることがなされる。

(2) 外挿的（類推的）方法

３ － １ ＝2，　３ －（－1）＝4？
３ － ０ ＝3，　３ －（－2）＝5？

(3) 論理的な方法

$$3-(-2)$$
$$=\{3+(+2)+(-2)\}-(-2)$$
$$=3+(+2)$$

(1)はレトリカルな認識を仮定している。こうした読みとり方にはかなり不自然さが残るが，もっともらしい説明は付く。(2)は直観に訴えることができるが，論理的な保証はない。(3)は前提を明確にすれば証明に近いものになるが，最初からこの方法を行うのは難しい。何より，いずれの方法も，なぜそういう計算を考える必要があるのか，ということが明確でない。つまり，正・負の数の加減が何かを処理する道具として生起しない。

トランプゲームでは，それが意味あるものとして生起するだけでなく，反数や逆算といった，方程式の活動の中で頻繁に現れる代数的発想が生じるよさがある(岩崎,岡崎,1999)。例えば，合計を計算するとき，黒札の８と赤札の８を相殺して計算する活動や，－８をとられたときの感情が＋６をもらったときの感情と等しいことが，それらを準備している。この後に(1)(2)(3)の説明を行えば，生徒はそれを捉えるだけのシェマを創り上げているので，意味と意義の両方で納得がいくこととなる。こうした展開は楽しいだけで終わってはならないので，教師は活動やルールを意識させ，議論させる場面や，関係を定式化する場面を意図的に作らねばならない。こうした考察は Brousseau(1997)に詳しいが，それは今後の課題としたい。

3.2．図形の探究を柱とした図形の作図

作図の学習では通常手続きを習得し，応用することが目指される。ここで示す展開(岡崎,岩崎,1998;岡崎,岩崎,板垣,1999;岡崎,2000a)では，生徒たちはかたちの考察から始め，たこ形やひし形を統一原理として，垂線，垂直二等分線，角の二等分線を創造していく。また，作図は目的であるだけでなく，算数での図形認識（経験的認識）を数学的な図形認識（理論的認識）へと高める手段としても位置づけられる。以下に，図形の探究を柱とした作図の授業の概略を述べる。

最初の問題場面は，図形（かたち）の作図，特に正方形，長方形の作図である。コンパスと定規では，辺の長さは直接的に制御できるが，角の大きさは辺の長さの関係を使ってつくらねばならない。この場面で生徒が単元で学習する様々なアイデアが生じる。

生徒達はひし形，たこ形を容易に作図する一方で，正方形と長方形の作図に苦労した。

S1：まっすぐにしちゃいけないんじゃない... 90 °使っちゃいけないんだよ。

S2：こうやんないとできないの

生徒達：90 度ができない。

教師が「何か図形をイメージして描けないだろうか」と発問すると，「たこ形を描いて縦の線を引けば，そこが垂直な線になると思います」「ひし形を描いて対角線を引いた」のようなアイデアが生じた。生徒達はひし形やたこ形のかたちのイメージを利用して，垂線を描くことができた。かたちは，生徒の強力な認知的道具になっていた。

垂線の作図の学習の後，改めて正方形と長方形の作図を行った。生徒達は「簡単，簡単」と言いながら，出来なかった作図が出きるようになった喜びを感じていた。

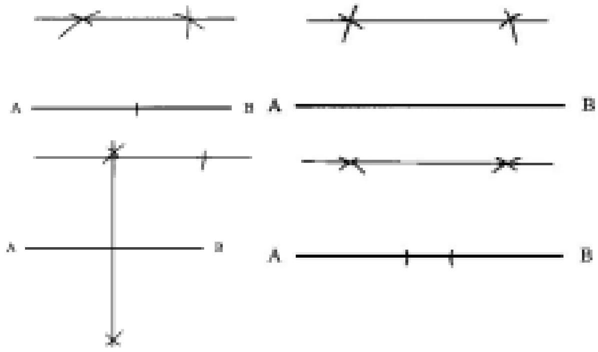

図１．生徒による平行線の作図

かたちをイメージして作図する学習の効果は，平行線を描く課題に転移していた。平行線の作図は，教科書には，垂線を二回描く方

法，異なる位置に垂線を描いて同じ長さをとる方法，同位角を利用した方法が見られる。しかし，小学校で培ってきた図形やその性質を道具として利用することを考えれば，平行四辺形やひし形を描くことで最も簡単に平行線を描くことができる。図１に示した生徒の多様な考えはそうした結果である。

また作図の手続きを顕在化していく中で，仮定－結論の世界へと移行する様相が見られた。特に，角がなぜ二等分されるのかを正当化する際，生徒たちはすぐに合同（かたちが同じ）に着目し，さらに教師がなぜ合同なのか，と問うたところ，「(角度が同じかどうかは）わからない」(２つの三角形で同じものは)「面積」「長さ」「辺の長さ」「PX と YO. . . OX と YP. . . PO と PO」のように，作図で行った手続きを意識化して，証明の条件として再構成し始めていた。

論証以前に生徒がもつ図形の知識と，論証の思考との間の広く深い溝を認めるとき，作図教材は，論証に向けて図形認識を高める手段としても考えねばならない。だたこうした機能を授業の中で過度に強調すれば，作図の授業がつまらないものになる可能性がある。図形の探究を柱とした作図の授業は，生徒が楽しんで問題解決をやりながら，認知的能力を高めることが意図されるべきである。つまり，算数で習った図形を描くという単純な課題から始め，生徒に「直角を描く」という問いが発生し，これまで培った認識を最大限に活用して解決し，さらには問いを連続・発展させていくという態度が重要になる。

3.3 授業設計における教授学的選択

全体論的な授業設計は，フランス数学教授学における教授学的工学によって研究されている(岡崎,2000b)。教授学的工学では，様々な教授学的選択が行われる。Douady(1997)は次の６点を挙げている。(1)学習の対象，(2)提示，(3)問題選択に対する諸目標，(4)数学的な選択とその理由，(5)問題陳述とシツエーションの事前分析，(6)道具－対象の弁証法の実現化である。これを正負の数の加減について述べれば，次のようになろう。

(1) 正負の数の加法，減法（乗法，除法）
(2) トランプゲームのシツエーション
(3) 学習内容の繋がりを経験させること，演算を考える必要性を喚起すること，代数的な考えを生起させること
(4) 反数や逆算，あるいは代数和に繋がるアイデアが含まれている
(5) カードの枚数を何枚にするか，ルールをどのように設定するか，ゲーム感覚において正負の数の合計ができるか
(6) 生徒が見いだした関係をどのように意識させ，数学的に再構成していくか，またゲームの発展や次の数学にどのように生かしていくか

作図の授業設計も同様に説明することができる。最も基本的な展開は，一つの場面から種々のアイデアが生じ，それが意味ある数学的知識に繋がっていくことにある。

Douady が特に重視するのは，「枠組み間の相互作用」や「道具と対象の弁証法」である。教授学的工学では，意味の構築を中心に授業を計画するため，関連する内容であれば，たとえ領域が異なっていても，それらを積極的に総合した単元を考える。生徒は問題解決を通して，その単元におけるいくつかのアイデアを生じさせ，互いに作用させる。教師は生徒に意味を成してきたことを見極め，その時点で制度的な知識として定式化していく。こうした指導方法論をとることに大きな特徴がある。

こうした全体論的な学習の展開では，特に最初の問題状況の設定が非常に重要となる。そこでの活動が，単元のその後の展開を方向づけるからである。問題状況の特徴には，次のようなことがある。

・単元の全体像を与えている。

・生徒が既有の知識でアプローチできる。
・そこから種々の数学的発想が生じ，それが単元の中の数学的知識に繋がる。
・問題に発展の可能性がある。

以下では，中学校１年の学習指導の中で，原子論的なパターンに陥りがちな，文字と式及び方程式の単元について，中学１年生に行ったインタビュー調査をもとに，授業の全体論的な展開の可能性を探っていく。

４．文字式を学習する上で，方程式の文脈を採り入れる可能性

4.1．算術から代数への移行の研究

Bednarz らは，方程式の文脈において算術から代数への移行を研究した。彼女らの言う算術の問題と代数の問題は，例えば次のものである。（Bednarz & Janvier, 1996）

「算術の問題」スティーブは，ハロルドより 27 枚多くカードを持っていて，ジャックはスティーブの３倍のカードを持っている。スティーブが 138 枚のカードを持っているとすると，３人の合計は何枚か。

「代数の問題」３人の子どもがおはじきで遊んでいる。合わせて 198 個のおはじきがある。ジョージはデニスの２倍のおはじきを持っていて，ピエールはジョージの３倍持っている。それぞれの子どもはいくつおはじきを持っているか。

算術的な問題とは既知の要素に一つの演算またはその逆算を施せば別の要素が導かれるものをいう。それに対して代数的な問題は，既知の要素に何か演算を施しても，別の要素が簡単には導かれないものをいう。この種の問題では，要素間の局所的関係とともに，全体的な関係も考えねばならない。

生徒（12, 13 才）が質問紙調査で，代数的問題に対してとった方略として，次の４つが挙げられている。

＜方略Ａ＞既知の状態を出発点として，問題文の数を駆使して解にたどり着こうとする。上の代数の問題に適用すれば, 198 ÷２や 198 ÷３といった意味のない計算になる。

＜方略Ｂ＞仮の数を使って，最初の状態を作る。例えばデニスの数を 10 にすれば，ジョージは 20, ピエールは 60 になり, 合わせて 90 になるが，まだ少ないのでデニスの数を多くする，という試行錯誤的方法である。

＜方略Ｃ＞分配してから生成する。まず３等分して平均を求め，その数を基点に考えを進めるものである。

＜方略Ｄ＞構造を考慮に入れ，関係をうまく扱う方法である。生徒には，198 を「９」で割ることが見えている。

Bednarz らはインタビュー調査も実施し，生徒のＡ～Ｄの方略はいずれも代数の問題に対して十分でないことや，算術と代数にギャップがあることを示した。例えば方略Ｂは代数計算と同様，思考がボトムアップ的であるが，場面の構造的な把握が難しいという。方略Ｄは逆に構造的であるが，代数計算とは思考の方向が逆であるため，この方法を採る生徒は代数に馴染んでいかないという。

彼女らが提示した代数の問題は，方程式という全体像を生徒に与えるとともに，生徒が算術的方法でアプローチできる。その意味で全体論的な学習における初期的課題に位置付く可能性がある。しかし, 彼女らの調査では, 代数的解法を生徒に提示し，解釈させるという方法をとるため，生徒の理解過程，特に生徒の方略が代数に向けてどのように高まるのかが示されていない。本研究ではこうした点の解明が重要である。

4.2．調査における生徒の代数的な発想

附属中学校と公立中学校で，文字と式の単元を学習していないか，１時間だけ学習した中学１年生 13 名に対し，ペアによるインタビュー調査を行った（６月 13 日から６月 26 日）。調査問題の一部は次である。

２．380 人の生徒が，いくつかのスポーツに分かれて，体育の授業をします。バスケットは，

スケートの３倍の人数で，水泳はバスケットの２倍の人数になりました。それぞれのスポーツには，何人の生徒がいますか。

３．380 人の生徒が，いくつかのスポーツに分かれて，体育の授業をします。バスケットは，スケートの３倍の人数で，水泳はバスケットより 114 人多くなりました。それぞれのスポーツには，何人の生徒がいますか。

４．441 人の生徒が，いくつかのスポーツに分かれて，体育の授業をします。バスケットは，スケートより 27 人多く，水泳はバスケットの４倍の人数でした。それぞれのスポーツには，何人の生徒がいますか。

斉藤，牧田の事例について分析する。

＜セッション１＞ 問２の解決過程

まず，彼らが出した考え方を挙げる。

高浜１(以後 T と書く)．スケート×３＝バスケット，バスケット×２＝水泳，と局所的な関係を記述し，ｘ×３＋ｙ×２＋ａ＝380 という式を立てたが，うまく行かず消す。

牧田１(以後 M と書く)．水泳÷２，バスケ×３と書き，次に２倍，３倍，元を，２個，３個，１個と解釈して 380 を６で割る。計算結果(63 あまり２)の 63 を基準と考えて，当てはめてみる。うまくいかない。

T2．方略Ｂでひたすら取り組み，苦労の末に何とか解にたどり着く。

M2．自分の解法を回想する。水泳の人数を 6y とし，それを全体の人数と見なす。次に，380 の約数を考える。6y が何を表しているかに答えることができない。

T3．答えが 38 になる理由を式で考え始める。一つの文字で a ＋ a ×３＋ a ×３×２と表せることに気づく。「この式でいいと思うんだけどなあ」と，式に自信を持つが，式が表していることを読めない。

M3．数量関係を部分的に捉えていて，バスケットを３つ分，水泳を６つ分と述べる。

二人．高浜が牧田の述べる数を足し，10 個分になる。全体の 380 と答えの 38 とを結びつける数が出てきたことから，２人とも答が 38 になる訳を納得する。

T4．10 個分を再解釈する。「あ，そうか。a を１と考えると．．１たす１×３たす１×３×２で 380 だと。逆算すると 380 ÷(１＋３＋６)ということだから，380 ÷ 10 で」

高浜は最初一つの等式を作ったが，文字を３つ使っており，文字の意味は「ものとしての文字」(Küchemann,1981)に近いものだったと思われる(T1)。つまり，バスケットと書かずに y と書いた程度のものである。しかし T3 では一つの文字で式化することができた。方略Ｂを繰り返し，スケートの人数と他の要素との関係をはっきり捉えたことが要因と思われる。一方，牧田はバスケが３つ分，水泳が６つ分と解釈できるにも拘わらず，最初の状態を忘れ，6y を全体と考えた。２人が相互に影響しあいながら，場面を構造的にみることができ，答えが 38 になる理由にたどり着いたが，両者とも式は読めていない。

＜セッション２＞ 問３の解決過程

T5．a ＋ a ×３＋（a ×３＋ 114）＝ 380 と書き，380 － 114 を計算した。ここで文字式操作をやめる。次に 266 を３で割ったが小数がでてうまくいかない。a ＋ a ×３＋ a ×３＝ 266 と再び式を書く。その後は方略Ｂにより解を見つけた。

M4．380 － 114 をして答えの 266 を３で割るが，小数がでてしまう。バスケットを b，スケートを a とおき，b ×３＋ 114 ＝ 380 と書くが，滞る。

両者とも逆算を行い(380 － 114)，266 を３で割っている（方略ＡまたはＣ）。問２の解決では，全体を１，３，６の 10 個分と解釈できていたのに，ここではそれができなかった。高浜は，何度も立式するが，解決は試行錯誤的方法であった（方略Ｂ）。牧田は再び水泳の人数を全体と捉えた。

次に，解けた高浜が説明し，牧田が質問する形で議論が進んだ。高浜は答えを式に当て

はめて検算を行った。ここで高浜が，38 ×３＋ 38 ×３を「38 ×３かける２だから，38 ×６でしょ」と言ったことに，牧田が「何でそこに２をかけるの」と尋ねたことから，文字のまとめ上げに関する議論が生起した。

高浜：かける２っていうのは... 114 ひいたら，バスケと水泳の数が同じ数になる.... だから，かける２をする。

牧田：うん？... かける２しないで，そのまま 114 って書いておけば。

・・・・・・・（途中略）・・・・・

高浜：だから 114 ひくと a ＋ a ×３＋ a ×３になるでしょ。すると a の数が 10 個でしょ... a がスケートの数でしょ... a ×３×２っていうのは，a ×３たす a ×３と同じでしょ（牧田の肯き）... だから，詳しくいえば... a ×３たす a ×３

牧田：同じことだ。あーわかった。やっと分かった。

注目されるのは，この議論を収束させるために高浜が文字式を登場させたことである。具体化すればよく分かるのでなく，文字に抽象化し具体が消えたとき，逆に演算の関係性が顕在化されている。

次に，生徒たちはインタビュアーへ説明を始めた。高浜は，a ＋ a ×３＋ a ×３＝ 266 という式について，「a の数は 10」と述べた。牧田は「なんか間違ってない？さっきと」と疑問視したが，その理由は分からない。さらに高浜は，「あーいいんだ，10 個で。まず 266 を 38 で割ると７で，割れて。バスケの中には, a っていうスケートのやつが３つあって。あれ，どうしたんだっけ？」と，再び 10 個という考えに立ち戻るが，説明が続かない。７という数を得たにもかかわらず，式からそれが読めない。そこでインタビュアーは，高浜の述べた７という数について考えさせたが，二人とも分からなかった。

この局面を打開する際に，牧田は先の文字をまとめるという考えを生じさせた。

牧田：a ＋.. 6a になる。簡単に言うと 6a になって.. a ＋ 6a ＋ 114 ＝ 380 になる。

Int：ここもまとめられない？ 3a と 3a をまとめたら 6a になったんでしよ。

二人：a と 6a。まとまらない。

牧田はセッション１で，6y ＝ 380 という単純な式を考えており，ここでも式を簡単にしたいという気持ちが働いたと思われる。しかし 3a と 3a はまとめるものの，a は残そうとした。つまり Herscovics と Linchevski（1994）のいう「認知的ギャップ」があった。

インタビュアーは a と 6a の意味を尋ねた。生徒たちは「6a というのは，a ×３＋ a ×３をまとめたもの」「a が６個」と答えたので，さらに，a を指して「これは a が何個」と尋ねた。それをきっかけに，「a」を a が１個と解釈し直し，a と 6a で 7a にし，逆算によって 38 を見つけた。この時点で文字式を「読む」ことが少しできるようになった。

＜セッション３＞問題４の解決過程

このセッションでは，彼らは積極的に文字式を用いるようになる。

T6. 一度失敗するが，文字式に表す。

a ＋（a ＋ 27）＋（a ＋ 27）×４＝ 441

＝ a ＋ a × 27 ×２×４

分配法則ができず，27 ×２×４を計算して 216 をだし，これに１をたして 217 にし，217 を２倍したり，441 を 217 でわったりする。

M5. バスケットを a，スケートを b，水泳を c とおく。（a ＋ 27）×４が 441 になると考えるが，指摘を受けて誤りに気づく。

M6. （a ＋ 27）×４＝水，a ＋ 27 ＝バ，b － 27 ＝スと, 文字と事象の対応を確認し直す。a ＋（a ＋ 27）×４＋（a ＋ 27）＝ 441 と式を立てる。文字計算は分からない。

M7. 問題文に戻り，バスケット，スケート，水泳の字の上に１，１，４と書く。441 ÷６をし，73 あまり３になる。73 を当てはめたがうまく行かない。63 で試す。63

＋ 84 ＋ 84 ×４という式をぐるぐる囲みながら，５と書く。

M8．27 の５つ分を全体からひき，306 をだし，306 ÷６で 51 と答えを出し，検算によって 441 になることを確認した。（解決）

この問題には分配性が含まれ，その意味で難しい。高浜はその計算に躓いた。牧田は，水泳のみを全体とする，以前と同じ間違いを再度繰り返したが，M6 では文字と事象との対応を確認し，式を立てることができた。その後，牧田は，スケートがバスケと水泳にいくつ含まれているかを問題文を見直すことによって見つけ，余分の 27 がいくつあるかは数字式から見つけた(M7)。そして方略Ｄを適用して解にたどり着くことができた。

インタビュアーは，文字式上で同じ説明ができるかどうかを尋ねた。つまり，事象と数字式による解決から，文字式での解決へ，再構成を促した。

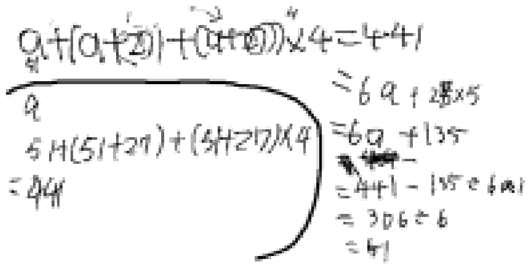

図２：生起した文字による解決.

牧田：a が１，２と，ここがバスケで。これができたわけだから，１かける４で，４として。６つの a。

高浜：ここに 6a と書く。

牧田：... 27 が５個... まずここ一つと，あとここに 27 が４個あるから，かける４で，27 が５個あるから...。

高浜：6a たす，27 かけ５で... 135 で，それが 441 か。

生徒たちは，かなり容易に，式の上で考えを進めることができた。事象と数字式にリアリティを感じていたことが，彼らを支えていたと思われる。また，検算を行って(図２左下)，「なってる，なってる」と，さらに自信を深めた。

4.3．議論

彼らは文字を何とか用いようとし，またその使用にはいくつかの状態があった。最初は x ×３＋ y ×２＋ a ＝ 380 のように，各要素を違う文字を割り振って立式するだけのものであったが，次のような状態が現れた。

Ⅰ．a ＋ a ×３＋ a ×３×２＝ 380 のように，一つの文字で全体を表す。文字式操作はなされないが，場面を一つの要素から見渡せる。文字式を読むことはできない。

Ⅲ．a ＋ a ×３＋ a ×３＝ 266 で，文字をまとめ上げて，a が７つ分だと分かる。

Ⅳ．a と数との置き換えができる。

Ⅴ．a ＋(a ＋ 27)＋(a ＋ 27)×４という式のままで，a や 27 がいくつ分あるかを読みとることができる。

Ⅵ．方程式の解法に近い方法で解く。

各状態は数学的に見れば不完全であるが，中学校１年の文字と式（及び方程式）の単元で学習する内容の素地的アイデアだと見ることができる。つまり文字式に表す，同類項をまとめる，代入，分配法則といった内容に繋がるアイデアである。文字式を学習する以前に，こうしたアイデアを持っている生徒は，様々な内容をそれと関連づけて理解することが期待される。

文字式使用に対する情意面として，高浜・牧田のペアは，「文字使ったら楽。(使わないと)ごちゃごちゃになる」「文字使った方がおさまる。一つ一つがごちゃごちゃにならないでまとめられる」「文字が３つも４つもあると，ごちゃごちゃになる」「それは押さえておく」と述べた。この発言には，一次方程式の意義のようなことも含まれている。

代数的解法を生じさせなかった生徒も多くいたが，「式がある。こんな不便な計算，やりたくない」「何かある，何かある」という

発言を行った生徒がいたように，もどかしさが体験されていた。これも，後の学習への動機になっていると考える。

この調査で示唆されたことをまとめれば，次のようになる。

1．生徒は，方程式の問題解決の中で，文字と式の単元の内容に関する素地を獲得していた。少なくとも，式を使って解きたいという動機を獲得していた。

2．仮の数をおいて考える試行錯誤的方法と式に表すこととの相互作用が，局所的関係の理解や，後での代数的発想の生起に役立っていた。

3．計算を簡略化する場面と，全体に対する部分の構造を把握する場面で，文字をまとめ上げるという発想が生じた。

4．分配法則の発想には，事象と数字式の構造的な理解が重要であった。それを文字式上で再解釈することで，確信的に理解された。

5．文字式を用いる必然性，よさが，文字式学習以前の方程式の問題解決の文脈で生じていた。

これらの諸結果は，新たに授業を設計する上での基礎資料になる。これらをもとに，先に述べた教授学的工学による教授学的選択にしたがって授業の方向性を考えてみれば次のようになろう。

(1)学習の対象：文字に表す，文字をまとめ上げる，代入，分配法則，方程式の素地的な考え方。

(2)提示：Bednarz らの代数の問題と同様の構造をもったシツエーション。

(3)問題選択に対する諸目標：文字式を用いる必要性を喚起すること。具体的場面を考察する中でいくつかの代数的アイデアを経験すること。

(4)数学的な選択とその理由：一つの演算やその逆演算では解けないような部分－全体の構造があり，式によってその構造が明確化される。代入，結合法則，分配法則などの考えが内包されている。

(5)問題陳述とシツエーションの事前分析：代数的発想が生じる様に，局所的関係をうまく選択する。生徒が生じさせる方略と，それが発展する様相。

(6)道具－対象の弁証法の実現化：生徒が見いだしたことをどのように意識させ，代数的に再構成していくか。また，単元におけるその後の展開にどのように結びつけていくか。

授業へ実現する上で，さらなる検討が必要なことは言うまでもない。例えば，(2)の提示に当たる部分では，生徒をよい環境（問題場面）に置くことが重要になる。その意味では，単なる文章題による問題場面でなく，ゲームや物語の文脈も考えていく必要がある。また(6)の，実際に生じた発想をどのように数学的に再構成していくかも，検討課題として残されている。

5．おわりに

本稿では，全体論的な立場から，中学１年の文字と式・方程式を学習する上での素地を培う問題場面と，その解決における生徒の数学的な発想およびそれに基づく授業設計について検討してきた。中学校１年は，現実性に基づく認識から，数学的関係それ自体へ関心が移行する時期であり，さらには生涯に渡って「数学を楽しむ」上での出発の時期に当たると考える。文字と式・方程式の単元はその大きな契機になっている。

本稿で示した可能性を授業へと実現していくことが今後の課題になる。

引用参考文献

Bednarz, N. & Janvier, B.（1996）. Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. N.Bednarz, C.Kieran & L.Lee （eds.）. *Approaches to Algebra*（pp.115-136）. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G.（1997）. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*.（edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield）. Kluwer Academic Publishers.

Douady,R.（1997）. Didactic engineering. T.Nunes & P.Bryant（eds.）. *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*（pp.373-401）. Psychology Press.

Furth, H.（1972）. ピアジェの認識論.（植田郁朗他訳）. 明治図書.

Herscovics, N. & Linchevski, L.（1994）. A Cognitive Gap Between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 59-78.

Hiebert, J. & Carpenter, T.（1992）. Learning and teaching with understanding. D.Grouws（ed.）. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*（pp.65-97）. NCTM. NY: Macmillan Publishing Company.

平林一栄.（1987）.数学教育の活動主義的展開. 東洋館出版社

平林一栄.（1999）.教授単元の思想.「生きる力をはぐくむ算数授業の創造」刊行会編. よりよく問題を解決する子ども（pp.205-210）. ニチブン.

岩崎秀樹, 岡崎正和.（1999）. 算数から数学への移行について（1）－代数和の位置づけとその指導－. 全国数学教育学会, 数学教育学研究, *5*, 85-90.

小山正孝.（1992）. 数学教育における理解のモデルについて. 岩合一男先生退官記念出版会編, 数学教育学の新展開（pp.172-184）. 聖文社.

Küchemann, D.（1981）. Algebra. K. Hart *et al*.（eds.）. *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*（pp.102-119）. John Murray.

國本景亀.（1998）.機械論的・原子論的数学教育から活動的・創造的数学教育へ. 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第４巻, 1-9.

中原忠男.（1995）. 算数・数学教育における構成的アプローチの研究. 聖文社.

岡崎正和,岩崎秀樹.（1998）.算数から数学への移行とその指導に関する研究（2）－図形学習の転換点－.日本数学教育学会, 第 31 回数学教育論文発表会論文集, 165-170.

岡崎正和,岩崎秀樹,板垣政樹.（1999）.図形教育における算数から数学への移行を促す授業開発に関する研究.日本数学教育学会,第 32 回数学教育論文発表会論文集,233-238.

岡崎正和.（2000a）. 中学１年生の図形の経験的認識と, 理論的認識へ高める作図の教授学的機能. 上越数学教育学研究, *15*, 29-38.

岡崎正和.（2000b）. 教授単元の考えを普段の授業に実現する一つの試み－教授学的工学に着目して－. 日本数学教育学会, 第 33 回数学教育論文発表会論文集, 31-36.

下中弘編.（1971）. 哲学事典. 平凡社.

Skemp,R.（1979）. Goals of Learning and Qualities of Understanding. *Mathematics Teaching*, *88*, 44-49.

Skemp,R.（1982）.Symbolic Understanding. *Mathematics Teaching*, *99*, 59-61.

Skemp,R.（1992）. 新しい学習理論に基づく算数教育－小学校の数学－（p.20）.（平林一栄監訳）. 東洋館出版社.

Wittmann, E.（1984）. Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 25-36.

Wittmann, E.（1995）. Mathematics education as a design science. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 355-374.