教育実践研究　第22集（2012）　99－104

［算数・数学］

児童の多様な考え方が教師の期待した方向に収束しない場合の要因に関する研究

－小学５年生「平均」の学習を手がかりにして－

桒山　仁志*

１　はじめに

教師側はいろいろ考えて答えを導くことが，算数の楽しさの一つと考えている。また，試行錯誤させることが論理性や算数的な思考を高めるよい方法の一つとも考えている。だから，算数の授業をしていて一番がっかりするのは「早く解き方（公式）を教えて」という児童の存在である。しかし，児童にしてみれば，公式さえ分かれば答えは導けるので，面倒なことを考える必要性はないと思うのかもしれない。

こういった傾向は，スケンプ（1992）の著書に，その理由を見付けることができる。スケンプは道具的理解を目指した数学学習を「道具的数学」，関係的理解を目指した数学学習を「関係的数学」と名づけ，道具的数学の利点として次の３つをあげている。

①その文脈自体においては，道具的数学はより理解し易いのが普通である。

②報酬はより直接的であり，よりはっきりしている。

③関係的思考ほど多く知識を知識を含んでいないだけに，道具的思考によって，より速く，より信頼できる正解が得られる。

つまり，公式はわかりやすいし，すぐ答えが出せるし，情報が少ないから暗記しやすい，といった点が児童にとっては魅力なのだろう。

では，公式を教え込む授業スタイルには，どのような弊害があるのだろう。その答えは，佐伯（1989）の著書でも語られている。佐伯はある小学校を訪れた際，「算数の好きな子はいる？」という問いを３年生のクラスと６年生のクラスに投げかけた。すると３年生のクラスでは３分の２くらいの子どもが手を挙げたが，６年生のクラスでは０であった。「どうして？」と聞くと「いろんな公式があって，そういうのを全部覚えていなくちゃならないから。」（p.51）という答えが返ってきたという。「算数の授業とは公式を暗記するものだ」と児童が思いこんでいるのであれば，それは教師の授業法に問題があるのだ。

それがわかっているので，教師は授業を行う上で様々な工夫を行う。特に導入課題では，児童側から多様な考え方が出るように工夫する。そして，難しい顔をして試行錯誤していた児童がある瞬間，ぱっと輝いて「そうか，わかったぞ」と叫ぶような授業の展開を目指す。この瞬間を一般的には「腑に落ちる」と言うが，こういう過程で獲得された知識は忘れにくく，暗記する必要がない。言い換えれば「腑に落ちる」授業の展開を教師は目指しているのである。

しかし，多様な考え方が出るように導入課題を工夫すれば，後は児童が試行錯誤を行い，よりよい考え方だけが児童に定着するかといえば，それほど単純なことでもない。児童の多様な考え方の収束先が，教師の望む方向に向かわない場合があるからだ。

本研究では，児童の多様な考え方を引き出しながらも，結果的には教師の望むような考え方に，児童の思考を収束させられなかった授業を分析している。そして，どんな要因が収束の妨げとなったのかを明らかにすることにより，よりよい算数授業の在り方を追究することをねらいとする。

２　理想的な算数授業の成立条件

何回か「腑に落ちる」授業が成立したことがある。その共通点は，①全ての児童が課題を理解でき，自分なりに解決の糸口がみつけられること，②多様な考え方が表出する課題であること，の２つであった。

＊ 柏崎市立柏崎小学校

①の条件が必要な理由は次のとおりである。まず，課題が理解できなければ授業として成立しない。次に，課題が理解できても解法の見通しが立たなければ，意欲がわかず，問題解決まで児童の意識を持続させられないだろう。このことから「スモール・ステップ」の指導法は，筆者の考える理想的な算数授業の成立には向かない。「スモール・ステップ」の指導法とは，理解が難しいと思われる単元について，児童が混乱しないようにいくつかの段階を作って指導することを指す。筆者の経験上，児童はその段階ごとには分かった顔をするが，課題解決の見通しをもっているわけではないので，最後の課題解決の段階では，ぱっと顔が輝いて「そうか，わかったぞ。」と叫ぶことがない。

②の条件が必要な理由は，「腑に落ちる」には試行錯誤や迷いが必要と考えているからである。全員が一つの考えで一つの解答しか導くことができない課題であれば，解決のハードルが低すぎると考える。ある程度，ハードルが難しいものに挑戦し，それが解決された時に「腑に落ちる」状態になると考えている。

3　研究授業

⑴　期日・内容・対象児童

平成23年５月16日～平成23年５月19日の４日間で，45分授業を４回行った。単元名は「単位当たりの量」で対象児童はＡ小学校の５年２組（男子22名・女子18名）である。

「単位当たりの量」の内容は大きく２つに分かれる。前半は「平均」であり，後半は「人口密度」に代表される「単位当たりの量」である。ここでは，前半の「平均」を研究対象とする。

⑵　「平均」の指導と評価計画（全４時間）

	主な学習内容	評価の観点				
		関	考	技	知	評価の内容
平均④	「ならす」意味を考え，生活経験上からどちらがよく校庭を走ったかを予想する。（２時間）	○				日常の事象をいろいろな側面から考察する。
	実際にはならせないものや，０や小数値がでてくる平均の場面を理解する。（１時間）		○	○		日常の事象を数理的に考えている。
	練習問題を行う。（１時間）				○	平均の使い方を理解している。

4　多様な考え方を引き出すための工夫

⑴　教科書の導入課題

「平均」の学習における一つのキーワードは「１単位当たり」である。このキーワードは，野球の打率や広告の100g当たりの値段や成分表など，日常生活の中に普通に見られるものであり，５年生も目にしているものと思われる。

しかし，これらの数値は単に大小で比較できることが多く，キーワードである「１単位当たり」に児童の思考を向けさせることが難しい。例えば「打率が３割の打者と２割の打者とでは，どちらがよい打者ですか」「100g 150円の牛肉と160円の牛肉とではどちらが高いですか」という問題を出したとしても，単純に数値の大小比較で課題解決できるので，児童の思考は「１単位当たり」という考え方には向かないだろう。

教科書（学校図書）の導入課題は，表１を提示し「ひろみさんは５日間全部，けんじさんは１日休んだので４日間走りました。どちらがよく走ったといえるでしょうか」である。「単位量当たりの大きさ」という学習が初めての児童にとって，この文言から「１日当たりの周数」という考え方を引き出すのは難しい。児童にとって，数値の大小がもっとも有力な比較方法であるならば，「けんじさん」の最高記録の12周に児童全員が着目するだろう。全員が，一つのことに着目すれば，多様な考え方が引き出せず，試行錯誤が生まれない。その結果として「１日当たりの周数」という考え方を児童側から引き出すことも難しい。

表１　教科書の表の数値

「ひろみさんのマラソン練習」

日数	１日	２日	３日	４日	５日	合計
周数	9	7	11	6	7	40

「けんじさんのマラソン練習」

日数	１日	２日	３日	４日	合計
周数	10	8	6	12	36

⑵　導入課題の工夫

そこで，表の数値を変更した上で（次ページ表２参照），導入課題を「先生は38周走ったひろみさんを練習王として金メダルをあげると言いました。でもひろみさんは，けんじさんに勝った気がしません。それはなぜでしょう」「そこ

で，ひろみさんはけんじさんの実力を考えて，５日目を何周と予想したと思いますか」の２つとした。最初の問いの意図は，２人の練習日に違いがあり，単純に合計数の大小では比較できないこと気づかせるためである。このことは先の「理想的な算数授業の成立条件」で述べた，「①全ての児童が課題を理解でき，自分なりに解決の糸口がみつけられること」に関係する。今回は表の数値を読み取ることが重要であり課題理解につながるため，表の数値に関心をもたせる導入とした。

次の課題の意図は，キーワードである「１日当たりの周数」に着目させるためである。このキーワードに児童全員を着目させるには，「５日目の予想」という思考過程が不可欠であり，教科書も「５日目の予想」を課題にもりこんでいる。しかし，単に予想という文言だけでは，児童にとって「どんな数値でも不正解でない」という意味をもつため，複数の解答を期待できる反面，教師の意図する考え方に収束させられない可能性も秘めている。そこで，「けんじさんの実力」という文言を盛り込み，突拍子もない100周や０周という考え方が出ないようにした。そして，「なぜ５日目が○周というように，けんじさんの実力を考えたのかな」と予想した数値の根拠を，児童に問うことができるようにした。

⑶　表の数値の工夫

しかし，表の数値を表１のままだと，「理想的な算数授業の成立条件」の「②複数の考え方が表出する課題であること」にそぐわない。それは，表１の場合「けんじさん」の最低記録が６周であることが原因である。多くの児童が「けんじさんの一番調子の悪かった日は３日目の６周だ。だから，５日目も最低６周は走れるだろう。そうすると合計で42周になるから，調子が良くても悪くてもけんじさんの方がよく走ったと言える」と考える可能性がある。この場合，キーワードである「１日当たりの周数」にも着目させられない。

表２　変更後の表の数値

「ひろみさんのマラソン練習」

日数	１日	２日	３日	４日	５日	合計
周数	7	7	6	11	7	38

「けんじさんのマラソン練習」

日数	１日	２日	３日	４日	合計
周数	10	6	4	12	32

そこで，教科書の表の数値を，表２のように変更した。表２のけんじさんの記録は，最低が４周で最高は12周である。５日目が最低の記録なら「けんじさん」の合計は36周であり，「ひろみさん」の勝ちになる。しかし，最高記録であれば，反対の結果が出るので大いに児童は悩み，多様な考えを引き出してくるだろう。

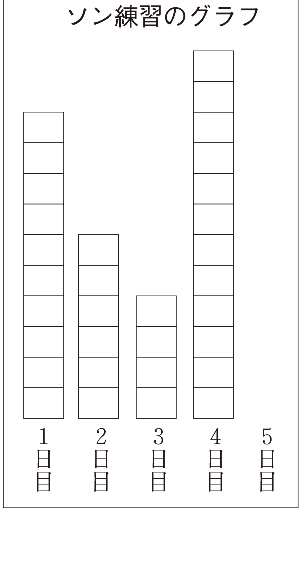
また，「ひろみさん」の数値も変更している。この数値の変更の意図は，次の２つがあげられる。一つ目は，平均の値は整数になるとは限らないという例の提示である。学習が進み，平均＝総数÷個数という公式で「けんじさん」の平均を求める場面が出てくる。その平均値は８周という整数値で表されるが，ここで学習を終えると，「平均値は整数で表せる」という誤解を児童に与えかねない。そのため，続けて「ひろみさん」の平均値も求めさせ，小数の場合もあり得る学習の契機とする。「ひろみさん」の数値を変更した二つ目の意図は，課題に日常性をもたせるためである。「マラソン練習」では，一般的には「けんじさん」のようにムラの多い練習をする児童もいるが，「ひろみさん」のように同じくらいの周数ずつ練習する児童も多い。そういった児童は，「ひろみさん」の表に親近感を覚えるであろう。全ての児童が課題を理解するためには，日常的に感じられる表の数値が重要であると考えた。

⑷　思考を助ける工夫

「けんじさん」の５日目の予想に関して，期待する児童の思考の流れは，①実力という文言から，最低記録の４周や最高記録の12周は適当ではない，②残る数値は次に悪い記録の６周と次によい記録の10周である，③しかしどちらを選ぶにしても根拠がない，④６周と10周の真ん中をとって８周あたりが実力的には適当ではないか，⑤そしてその求め方は（６＋８）÷２で求められるのではないか，⑥同じように最低記録と最高記録の真ん中も調べてみて，全体をならすとよいのではないか，⑦全体をならすやり方は，⑤の考えを元にすれば（10＋６＋４＋12）÷４で求められるのではないか，である。

この一連の考えの中で，一番難しいのが⑤である。そのため，図１のようなグラフを用いて考えられるよう，タイルを数十枚用意した。このタイルを用いれば，６周と10周の真ん中を考えるには，両方の数字を足して16周にし，真ん中なので半分と考え，「÷２」という思考が出やすい。しかし，このタイルを最初から与えてしまっては，児童の思考に制限を加えかねない。そのため，児童の思考や説明が停滞したときに提示する計画である。

図１：けんじさんのマラソン練習のグラフ



5　研究授業の実際

⑴　第１回目の授業

第１回目の授業の流れは，①教師による「ひろみさん」「けんじさん」のマラソン練習の表の提示，②教師による導入課題の提示，③それに対する児童の発表，である。主な教師の発問と児童の発表内容は以下のとおりである。

教師1101：(表２の枠組みだけを提示し）これから「ひろみさんのマラソン練習」の表をかきます。１日目は７周走りました。みんなならどれくらい走れそうですか。

児童1102：５周くらい＊他，色々。

教師1103：なるほど。ひろみさんは２日目も７周走りました。３日目は何周走ったでしょう。

児童1104：(挙手多数）７周です。

教師1105：なぜみなさんがすぐに７周と予想したか先生にはわかります。今日は何周かを予想する勉強です。ところで，ひろみさんの３日目は６周でした。残念。どんどん数字を埋めていきます。(合計以外は全て数字を記入して）さあ，ひろみさんは５日間で合計何周走ったでしょう。

児童1106：38周です。

教師1107：正解。(合計以外は全て数値が記入してある表を見せ）次にけんじさんの練習表を見せます。さあ，けんじさんは合計何周走ったでしょう。

児童1108：32周。

教師1109：正解。

教師1110：ひろみさんの合計が38周でけんじさんの合計が32周だから，「先生はひろみさんが練習王だとして金メダルをあげると言いました。でもひろみさんは，けんじさんに勝った気がしません。それはなぜでしょう」

児童1111：練習した日がひろみさんは５日で，けんじさんは４日だから。

教師1112：うん。それでこのままでは不公平だと思って，ひろみさんはけんじさんの５日目を予想しました。「ひろみさんはけんじさんの実力を考えて，５日目を何周と予想したと思いますか」

児童は以下のような５つの考えを導き出した。なお，紙面の都合で児童の発表をそのまま記録するのではなく，論点を整理したものを以下記す。

ア…６周。６周だとけんじさんの合計は38周になり，同点になるから。
イ…８周。８周だと40周になってちょうどよい。
ウ…８周。けんじさんの記録は４・６・10・12であり，８周があるとちょうど２飛びになるから。
エ…８周。最大が12周で最低が４周だと，その真ん中は８周だから。真ん中の出し方は４，５，６，７，８，９，10，11，12と並べるとわかる。
オ…８周。けんじさんの合計は32周で，それを４で割ると８だから。

最初の段階での各考え方の支持者は，ア…２名，イ…２名，ウ…２名，エ…16名，オ…18名であった。その後，いくつか意見交換や質問があった。意見交換の内容のほとんどは，相手の説明をよりよく理解するためのものであった。

エについては「よくわからない」という意見が多かったので，図１のタイルを教師が提示して支援を行った。その結果，「１列に並べなくても（４＋12)÷２だと計算で出せる」という考え方が出された。

その後は，ア…２名，イ…４名，ウ…２名，エ…20名，オ…12名と支持者の数が変化し，第１回目が終了した。

⑵　第２回目の授業

子どもたち同士の質問もなくなり，意見もでなくなったので，教師は次のような介入を試みた。

教師2101：５つの考えはそれぞれとてもよいと思います。しかし，弱点があります。それは何でしょう。

児童2102：…（反応なし）

教師2103：アの考え方は「本当に６周はけんじさんの実力と言えるだろうか」

児童2104：…（反応なし）

教師2105：続けます。イの考え方は「８周でちょうど40周なら，18周のほうが50周になるので，ちょうどではないだろうか」，ウの考え方は「同じやり方で，ひろみさんの６日目を予想できるだろうか」，エの考え方は「２番目によい記録の10周と，３番目に良い記録の８周が計算に入っていないがそれでもよいか」，オの考え

方は「そもそも，どうして合計を4で割るのかわからない」です。ア～オの同じ考えの人同士でグループになって今の弱点について，考えて見て下さい。

児童2106：【アの考えのグループ代表】やっぱりひろみさんは，同じ38周にしたがると思うので6周だと思います。

児童2107：【イの考えのグループ代表】弱点を直せないので，違う考え方に移ります。

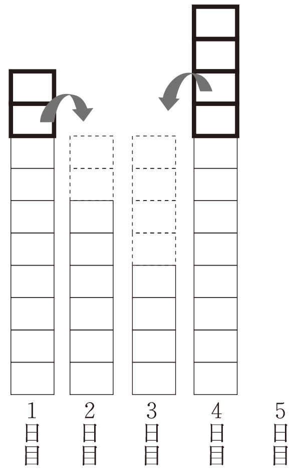
児童2108：【ウの考えのグループ代表】ひろみさんの表には使えないので，他の考え方に移ります。

児童2109：【エの考えのグループ代表】一番よい記録と一番悪い記録があれば，他の数字は使わなくても予想できると思います。

児童2110：【オの考えのグループ代表】（タイルを用いて：図2参照）けんじさんの記録を棒グラフにして，飛び出たところを，へこんできるところに足してやると，背の高さが8にそろいます。

児童2111：おー（感嘆の声）

図2：操作による説明図



以上の発表が終わった時点での各考え方に対する支持者はア…2名，イ…0名，ウ…0名，エ…14名，オ…24名であった。今までの人数の変動を表にすると，表3のようになる。 この段階で第2回目の授業が終わった。

表3：児童の考え方の変遷

変遷時期	ア	イ	ウ	エ	オ
児童が発表した直後	2	2	2	16	18
発表した内容を検討した後	3	4	2	20	12
教師が弱点説明をした後	2	0	0	14	24

⑶　第3回目の授業

この後の児童の話し合いは，平行線をたどる。平均の考えを表しているのは，「オ」であるが，24名以上の支持を得られなかった。そこで，教師は「実際にけんじさんに5日目を走ってもらえない以上，『もし～だったら，…です』という予想しかできないので，みんなの考え方はみんな正しいです」「その予想の1つとして，算数の世界では，『平均』という考え方があります」として，再度，「オ」の考え方を説明した後，「平均＝合計÷個数」の板書を行った。

そして「ひろみさん」の場合の平均を図2のタイル操作で行わせた。ひろみさんの合計は38周なので，図1のタイルもちょうど同じ高さに揃えられない。このことから，平均値が整数にならない学習を行った。

その際の児童の反応は，38（5日間の総数）÷5＝という立式から，7.6という解答を導いた。小数値になる理由としては，「タイルを操作すると3こタイルが余り，同じ背の高さにならない。そこで，3つのタイルを5で割ると0.6になるので，7＋0.6で7.6になる」を，大部分の児童があげていた。

⑷　第4回目の授業

定着状況を調べるために，教科書の平均を求める問題（平均値は整数になる場合）を行った。すると，「平均＝合計÷個数」の公式を使って解答した児童は約5割程度であった。残りの児童は①全ての個数をノートにタイルとして表し，操作活動によって同じ背の高さを求めて平均を出そうとした（約3割），②大きい数字と小さい数字を合わせて÷2をした（エの考え方：約2割），③その他（ごく少数）であった。そのため，再度，平均の考え方を教える時間が必要となった。

6　考察

⑴　論点

教師が期待する児童の思考の流れは，「4　多様な考え方を引き出すための工夫」の⑷で述べた。しかし，結果的には表3のとおり第2回目の授業が終えた段階では，ア，エ，オの考え方が残っていて，しかも理想とするオの支持者は6割しかいない。そして1日を開けて第4回目の授業（練習問題）においては，約5割の児童しか平均の公式を使えていない。この点について考察を行う。

⑵　公式を使わなかった児童に対する考察

最初にアの考え方である。教師2105の介入に対しても児童2106：「やっぱりひろみさんは，同じ38周にしたがる」と反応している。これは道徳的な価値観を優先させ，優劣をつけたくないという考えが根源にある。この2人に対して授

業後に感想を自由に書かせたところ,「道徳の時間ならばっちりの考えだと思った」「(教師1110以下について) ストーリーがあっておもしろい授業だった」と反応している。

算数授業における課題は,常に数学的な理想状態を前提としている。例えば時速の問題であれば,日常的にはあり得ない等速直線運動が前提である。しかし,この2名の反応は,心情面が複雑に関わってくる問題ではこういった理想状態という前提が崩れてしまうことを示唆している。つまり,教師は数学的に課題をとらえる一方で,児童は心情的に課題をとらえてしまう点で両者の思考に溝ができ,そのことが教師の期待する考え方に児童を導けない1つの要因になっている可能性があると言える。

次にエの考え方である。エの考え方を児童が指示する理由は,①「(最大値+最小値)÷2」は,「総数÷個数」より容易である,②「最大値と最小値の真ん中」と「総数÷個数」を比べると前者の方が「実力」という意味がイメージしやすい,の2点が考えられる。

①については,前出のスケンプ(1992)にもあるとおり,「より理解しやすい」方へ児童の思考が流れていったのではないかと推測される。「総数÷個数」という考えは第1日目に既に児童側から発表されているが,児童が詳しく説明を加えた後は支持者が減っている。このことからも「総数÷個数」は「最大値と最小値の真ん中」より難しい考え方であることを示している。

②については,「実力」とは最低から最高の力の範囲内に収まる力というイメージが一般にあるとしたら,児童にとっては「総数÷個数」より「最大値と最小値の真ん中」の方がイメージしやすく,そのまま定着してしまう可能性が高い。先に述べた数学的な理想状態という意味においては「実力」という用語は,課題にふさわしくないと言える。

また,教師1105「今日は何周かを予想する勉強です」にあるとおり,予想が問題であったため,基本的にはオープンエンドの課題になってしまった。そのため,どうしても1つの考えに絞る必要もなくなったことが,エの考え方をオに収束させらなかった遠因とも言える。

最後に第4回目の授業において「全ての個数をノートにタイルとして表し,操作活動によって同じ背の高さを求めて平均を出そうとした」児童について考察する。この児童は端的に言えば「タイルを同じ背の高さにする」という行為と,「総数を求めて個数で割る」という計算とが,一致しなかった児童と言える。

計算で値を求める行為は,第1回目の授業の後半で図1のタイルを基にして「(最大値+最小値)÷2」という計算式が考え出されている。こちらが定着した理由は先に述べたとおり,「実力」という用語のイメージに沿ったものであったことが推測される。このことから,「平均」というイメージと「総数を求めて個数で割る」というイメージを一致させることが,「平均=総数÷個数」という公式を児童に定着させることには欠かせない。しかし,児童2110,2111の反応から,児童は明らかに「平均=タイルの背の高さをそろえること」というイメージをもっている。そのため,面倒であっても約3割の児童が「全ての個数をノートにタイルとして表し,操作活動によって同じ背の高さを求めて平均を出そうとした」という解法を選んだと考えられる。Vinner(1991)は理想的な概念形成の状態について,「概念定義を司る細胞と概念イメージを司る細胞の2つの細胞から認識構造は成り立っており,お互いが関係づけられていることが望ましい。」(p.70)と述べている。教師が「平均」という概念定義に対して正しい概念イメージをもたせられなかった点にも,教師の期待する考え方に児童を導けない要因があったと言える。

(3) 今後の課題

いくつか問題点を明らかすることができた。今後は更に実践授業を重ね,児童の多様な考え方を,教師が期待する方向に収束させられる条件について明らかにしていきたい。最後に本研究を進めるにあたりご指導・ご協力してくださった全ての方に対して,この場を借りて御礼申し上げます。

【引用・参考文献】

佐伯胖.(1989).子どもの納得世界を探る.汐見稔幸,佐伯胖,大村彰道,藤岡信勝(編),すぐれた授業とはなにか:授業の認知科学 (pp.49-109).東京大学出版会.

スケンプ,R.R.(1992).新しい学習理論にもとづく算数教育:小学校の数学(平林一榮監訳).東洋館.

Vinner, S. (1991). The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.). *Advanced mathematical thinking,* (pp.65-81). Kluwer Academic Publishers.