数学教育研究，第4号，上越教育大学，1989年，pp.31-40

数学的探究における「推測」について
－Consecutive Sumsの問題の解決過程の分析から－

飯島康之

0．序

数学的問題解決は，これまでもいろいろな研究が進められてきたが，今回の学習指導要領改定により，学校教育の中に「課題学習」が導入されたことにより，授業の中での実現が，より大きな課題となってきた。そのような学習過程が生徒にとっても有意味なものとなるためには，問題の開発・収集ももちろん重要であるが，同時に，今まで扱わなかったような問題を解かせればいいというような風潮にただ流れてしまわないように注意していく必要がある。

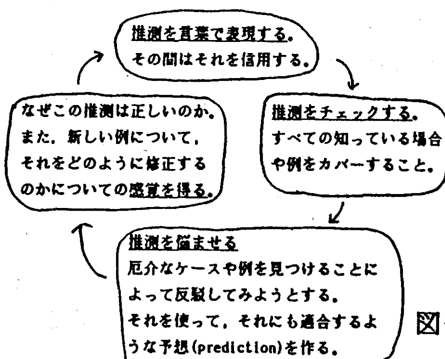
そのためには，問題を解く過程として，どのような過程が重視されるべきなのか，またその過程によって，生徒自身は教材に対して，あるいはより広く数学全般に対して，どのような見方，考え方が変化するものなのかという点についても考察を深めていく必要がある。そこで，本稿では，数学的問題解決の中でしばしば登場する「推測」という過程を取り上げ，事例の分析を基にしながら考察する。

1．推測について

Polya,Mason らの著作のキーワードの一つに，「推測(conjecture,guess)」あるいは，「推測すること(conjecturing,guessing)」がある。例えば，Polya はあらゆる段階の学生に対して，「なるほど，証明することを学びましょう，しかし推測すること(guessing)も学ぼうではありませんか」[1] と述べている。その理由は，(推測を中心として構成される)蓋然的推論が，「創造的仕事の土台になる推理の仕方」[2] だからである。また，Mason らは，Goldbachの予想[3] を例として挙げた後，次のように述べている。

「すべての推測がそのような重要性を持っているというわけではない，むしろほとんどの推測は間違っていて，できるやいなや修正されていく。しかし，小規模の推測(small-scale conjecture)[4] は数学的思考の核心である。それはある事柄が正しいのではないかと推測(sensing or guessing)したりそれが正しいかどうかを研究する過程である。」[5]

Polya が推測(conjecture)の典型的な例として挙げるものは，Goldbachの予想に示されるように，真偽の判定が完全にはできないもの，また歴史的に見てかなり長い時間の後に正しいことが証明されたものが多い[6]。そのためか，いわば，信頼度が漸進的に増加していくもの，いつ反例が現れて偽であることが示されるかわからないもの，あるいは，よりよい推測へと修正しなければならないものといった性格が強く出ている。それを最も顕著に定式化したのは，Lakatos [7] による「証明と論駁」というダイナミズムであろう。そのようなダイナミズムは，Mason らの場合，次のサイクルとして表現されている。[8]



図－1

我々は，Mason らの本の10章「Something to think about」の中の問題について，どのように解決したかを発表し検討することを，大学院のゼミの中で扱った。その時も，修正されつつ発展していく，「小規模の推測」は重要な位置を占めていた。しかし，それと同時に，そのような推測の発展を考えると，反例の出現による修正と新しい推測の生成というサイクル以外にも注目すべきではないかという考えを持つに至った。また，Polya は問題解決の中での推測にはguessingという言葉をよく使っているが，それは，conjecturing よりももっと個人の解決過程の中での「思いつき」あるいは「当て推量」をも含めて扱おうとしているように思える。そこで，そのことについて考察するために，Mason らも conjecturingの説明のために分析している，問題「Consecutive Sums」およびその解決の例について次の節で考察することにしたい[9]。

2．Mason らの示す「Consecutive Sums」の解決過程における推測

まず問題を提示しておく。なお，この問題を解いたことのない方は，まず自分なりに解いてみてから，以下の論述を読んでいただいた方がいいと思う。

「Consecutive Sums（連続する数の和）

連続する正の整数の和として表現できる数があります。どんな数がこの性質を持つ数を持つのでしょう。たとえば，次のような事実を観察しなさい。

9=2+3+4,　11=5+6,　18=3+4+5+6 」[10]

この問題の解決における一連の推測として，Mason らは次のものを挙げている。

推測1　偶数は連続する数の和にはならない。

推測2　2の巾は連続する数の和にならない。

推測3　(1) 2の巾は連続する正の数の和として表現することができない。

(2) 他のすべての数は連続する正の数の和として表現することができる。

推測4　2の巾でない数はすべて1より大きい奇数の因子を持っている。

推測5　奇数を因子として持つ数は連続する数の和として書くことができる。普通，奇数の因子は，数の個数と一致する。

推測5A　奇数の因子2K+1を持つ数Nは普通，2K+1個の連続する数の和として書ける。

推測6　N=F ×(2K+1)となる数Nを表現することを試みてみると，

	F		= F
	(F-1)+(F+1)		= 2F
(F-2)	+	(F+2)	= 2F
	.....		= 2F
(F-K)	+	(F+K)	= 2F

ここでK+1 個の方程式ができるが，左辺と右辺をそれぞれ加えると，

(K ×2F)+F つまり (2K+1)×F

推測7　奇数個の0を含む連続する数を加えると，偶数個の連続する正の数の和と同じになる。

推測8　奇数個の（必ずしも正でない）連続する数の和として表現できる数は奇数の因子を持っている。

ここでまず浮かぶ素朴な疑問は，これらのすべてを同等に，「推測」という名の下で扱っていいのだろうかということである。第一の点は，推測4などは正しいことがわかっている命題ではないかという点であり[11]，第二の点は，推測3までは主に反例によって批判されることによって，次の推測を生成する原動力を得ているが，推測4以降では反例などによって，「正しくない」ことが示されるわけではなく，「論駁」以外のものが原動力になっているという点である。換言すれば，図－1のサイクルは，どこまで忠実に conjecturingの過程を表現しているのか，と

いう問題である。このことを明らかにするためには，Mason の解決過程の記述のみに頼るべきではないと考え，学部の授業の中で解決してみたり，大学院生による解決過程を検討してみた。ここでは，学部（約20人）での授業の中で，この問題を解決したときの概略を書き，その過程を分析していくことにする。

3　学部学生との授業の中での解決過程

3.1 解決の記録

この問題を学部学生との授業の中で提示したとき，彼らのおおまかな思考の流れは次のようであった。

〔問題の提示，各自で考えるように指示する。〕

〔約５分後，それまでにどのように考えたかを聞いた〕

S_1 いくつかの例について調べてみた。

2× 3○ 4× 5○ 6○ 7○ 8× 9○

→次は16を調べてみよう。16は×

多分，2^n はだめだと思う。（思考停止）

S_2 いくつかの例について調べてみた。

2× 3○ 4× 5○ 6○ 8×

次は24○と思う→24×あれ? →16は...

S_3 ２つずつの和→奇数はどういうものでも○と分かる。

３つずつだと，３の倍数ができそう。

すると，奇数個の和について考えてみるといいんじゃないか。

S_4 奇数の約数があればいいようだ。

S_5 Σｋの一般公式からｎ（ｎ＋１）／２となる数。（思考停止）

T_6 どうもみんな大体予想するところまではいったようだね，でもただ漫然とした予想だけでは，本当にわかっているかどうかわからないから，例えば「76なんていう数は表せるのか」を考えてみよう。

S_7 76はやりにくいから，78にしてくれませんか。だって，奇数の約数が76の場合19しかなく，大きいので。

S_8 78÷3 = 26だから，78 = 26+26+26

= 25+26+27

にできました。だから，78 = 3×26の３は項の数になって，26は真ん中の数になっています。

S_9 １～12を全部加えてもうまくいきます。

T_{10} これはどういう分解に対応しているの。

S_{11} わかりません。だって項の数は12個だから。

S_{12} 78 = 2×39のときは，39に注目すると，19+20=39だから，18+21=39で，

18 +19+ 20+ 21

となり，39になるペアが２個と思えます。

S_{13} そう言われてみると，１～12の場合も，13のかたまりが６個になっている。

1 + ... + 6 + 7 + ... +12

S_{14} 76のときは４×19になるから，19 = 9 + 10 と考えると，

8 + 9 + 10 + 11

になる。

〔解決してしまった雰囲気になったので，〕

T_{15} そのアイデアでどんな場合でもうまくいくのかな。

S_{16} 78 = 3×26はうまくいかない。これは最初のアイデアの方がいい。

S_{17} でも最初のアイデアが使えるのは，3×26の場合だけしかない。

S_{18} でも，どちらかのアイデアを使えば，奇数の約数に注目すればできそうだ。

T_{19} 無理やりそのアイデアで解釈することはできないのだろうか。たとえば，１～12は13が６個という解釈だけど，６が13個というように考えることはできないだろうか。

S_{20} １～12の場合は，数が12個だけど，０を加えて０～12と考えると，６を中心にし

て13個とも思える。

S₂₁ 0を加えても構わないの？それなら-1, +1をペアにして追加してもいいはずだから，76 = 4×19の場合　-7,-6,...,6,7 を付け加えると，-7～11になって，19個になる。

S₂₂逆に，78=25+26+27 も，-24 ～24を付け加えると，52個だから，26個のペアからできていることになる。

S₂₃ということは，どっちのアイデアでもいいんだ。

T₂₄両方のアイデアを少しはっきりさせてみよう。

S₂₅奇数×残りに分解したときに，まず，奇数＝n+(n+1) にして，「残り」の数と同じだけのペアを両側についていく。負の数が出てきたら，最後にそれを消せばいい。

S₂₆奇数×残りに分解したときに，「奇数」が項の数になるようにしたい。「残り」を中心にして，負の数が出てきたら，最後にそれを消せばいい。

S₂₇ 0や負の数まで含めて考えると，最初のアイデアでは必ず偶数個の数の和，次のアイデアでは奇数個の数の和になっている。最後に出来上がるのは同じものなのだから，正の数の和に限れば，どちらか一方のアイデアだけが，そのまま使えることになっている。

3.2 分析と考察－ほぼ自然に生じる推測とそうでない推測－

この事例の場合，Masonらが推測1-3 として記述していた推測－反例のサイクルは，ほとんどの学生が経験した。つまりS_1，S_2 のように，事例を収集しながら正しい命題を推測し，次にどの例を調べたらいいのかを推測していた。そういう意味では，正しそうな命題を見出すまでの推測→反例→推測の修正というサイクルは，この問題の場合，かなり自然に生じるものと言える。

しかしながら，その後の発展は，どの学生にとっても同様なものではなかった。正しそうな命題がわかった時点から先に思考が進まず，S_1 のような思考停止の状態になってしまった学生も少なくなかった。また，S_8 からS_{11}に到るところで，「奇数は項の数」という推測に対する反例が登場するわけだが，Mason らのような「負の数も考える」ことによる解消はほとんどの学生からは出てこない代わりに，S_{12}による別の小規模な推測「奇数はペアの合計である」が提出されることになる。そして，ここに到るとほとんどの学生は「解決感」を抱き，2つの推測が併置されてしまっていることへの不満は最早なくなってしまっている。

このように考えると，推測の修正のサイクルには命題の真偽によるもの（正しい命題は何だろうか）もあるけれども，正しさ以外の要因もあることが指摘できる[12]。そして，命題の真偽に関するサイクルはかなり自然なものとして多くの学生において登場するのだが，それ以外の要因は，なかなか着目されにくいことが指摘できる。

4．新しい推測を作る手掛かりについて

正しいことと間違っていることがはっきりと明示されることは，数学的知識の一つの特徴である。そうであるが故に，正しそうな命題を見出すまでの推測→反例→推測の修正というサイクルはかなり自然に生じるものと言えよう。従って，逆に，命題の真偽以外の要因を考えるということは，数学的知識には，他にどのような特徴があるのかを見出すことにほかならない。Dewey は，一般に探究における知識の種類として，「素材(matter)」に対するものと「手続き(pocedure)」に対するものとを分け，それぞれの機能について論じているが，この2分法で分けるとすれば，

「素材（この場合は，2^n 以外の数の性質）に対する理解」と「手続きに対する理解」とがどのように深まっているのかという，2つの観点から考察できるだろう[13]。

また，この考えとかなり共通する見方を，より数学に密着した形で述べているものとして，M.Polanyi の見方がある。M.Polanyi は，「自然科学は観察の拡張であり，技術は作成(contriving)を，数学は理解を拡張したものである」とそれぞれの特徴を述べると同時に，数学について次のように述べ，その2面性を指摘している。

「理解の過程が言葉によって明瞭に表現される(articulately carry out)のは，一組の公式を（それから導かれる）別の一組の公式に変換する操作，あるいは，ある幾何図形を（それによって決定される）別の図形に変換する作図である。この結果は，法則（たとえば数論の法則や幾何学の定理）や，手続きの規則（例えば方程式を解いたり，所与の要素から幾何図形を作図する場合の規則のような）によって表現される。第一の場合には，数学は，自然科学に似た一組の宣言文として現れ，第二の場合には技術に似た一組の指示書きと見える。」[14]

このPolanyi の見方によれば，数学的素材における法則と数学的手続きの規則という二つの観点が示唆される。そこで，この両者を観点として，考察を進めていく。

4.1 新しい推測を作る手掛かりの一つとしての「手続き」へのこだわり

まず，S_1 のような思考停止になってしまった学生と，そうでない学生の場合，どのような点が違ったと言えるのだろうか。一つの手掛かりは，思考が停止しなかった学生は，S_3 が「奇数ならば，2つの数の和として表現できる」と捉えていたように，命題が成立するための裏付け，ないしは表現をするための手続きをきちんと把握していたことであろう。例えば，「奇数」のときの手続きが，他の場合にはどのように発展していくのか，という点に注目していたS_3 の場合，「3つずつ加えると3の倍数になる」→「3の倍数は3つの数の和で表現できそう」，「5の倍数なら5つの数の和で表現できそう」という類推を得ている。多くの学生は「78の場合どうなるだろう」という問いに対するS_8 の答えから「奇数」と「項数」との結びつきを理解したが，S_3 はかなり自然に「項数」としての奇数の意味を把握していたと思われる。

4.2 新しい推測を作る手掛かりの一つとしての「数の性質」へのこだわり

第二に，なぜこの事例で，S_{14}の発言で「解決」してしまった雰囲気になってしまったのか。2つの推測＝手続きが，本当にどの程度有効なものなのか，また矛盾しあわないものなのか，拡張するとすれば，どこまでなのか，といった点に関するこだわりがあまりなかったせいではないだろうか。そういう意味では，「手続き」としての2つの推測の比較・吟味が不足していたとも言える。しかしまた，2つの手続きの意味を手続きという「行動」としてでなく，言葉や記号によって明確に表現し，両者の関係を述べるという要因が少なかったことも一因と思える。和の形に分解される対象は「奇数×ある数」という形の数なのだが，「奇数」がどういう役割を果たしているのか，ということの意識化には，「行動」のみでなく，言葉や記号に表現されることが不可欠なのではないだろうか。上述の記録を見ると，一見S_8 やS_{12}において，そのような理解は確立してしまっているようだけれども，必ずしもそうではない。実際，この段階で質問してみると，「数を与えられればなんとかできるけれども，はっきりとはわからない」という答が帰ってくる。いわば「行動でわかっている」という状態であった。この事例の場合，T_{19}のような発言を契機に

「奇数＝項数」，「奇数＝ペアの和」という推測のそれぞれが，負の数まで拡張すると一般化できること，および負の数は必ずキャンセルされるので，正の数の和を作り出せること，そして両方のうちの一方は必ず負の数を含めたものになってしまうことが理解されるに到っている。これらは手続きの対象である数に対する理解，つまり数の性質に対する理解である。そして，そのような理解は，きちんと文字を使って，どのような数に対しても成立することを明示することによって，より確固としたものとなると言えよう。

4.3 まだ問題は解けていないという不満感

また，より心理的な要因として，この事例から指摘できるのは，「もう解けてしまった」という解決感から，問題解決が終わってしまっている場合がよくあるということである。例えば，S_3 の学生は，「n(n+1)/2となる数」という答えで満足してしまった。「すべてが1から始まるとは限らない」と示唆すると，「n(n+1)/2-m(m+1)/2 となる数」に変化したが，そこで解決感からまた思考停止してしまった。S_{14}の発言後の教室の雰囲気もそうであった。いわば，行動のレベルで大体のことがわかったため，解決感を得たのだろう。「n(n+1)/2-m(m+1)/2 」という表現を得た他の大学院生の解決の場合，「n(n+1)/2 - m(m+1)/2 は一体どんな数だろう」と問題意識は継続していたし，またS_{12}，S_{14}とほぼ同じ事例を理解した大学院生の場合，「数を与えられれば何とかなるとは思うけれど，解けたという感じはしない」と述べていた。このような「まだ解けていない」という不満感は，新しい推測を得ていくための原動力として，無視することはできないと思う[15]。

4.4 推測や行動を言葉や記号に表現することの重要性

最後に，推測や行動を表現することの重要性について触れておきたい。簡単に述べるなら，表現しない限りは，批判や一般化の対象になりえないということである。そのため，より多くの推測およびその批判を行っていくためには，まず言葉や記号で表現することが必要だということである。そして，Polanyiの言葉を使えば，言葉によって明確に表現することの延長に，定理としての数学的命題と，手続きとしての数学的命題があるため，推測や行動を言葉や記号に表現し，それを基に批判的な推論を進めていくことは，第一には，批判的な推論を経た成果として，概念や手続きを学習することに結びつくことが，第二に，将来，数学的命題を批判的な推論の対象としていけることに結びつくことが考えられる。

5．推測を促すための工夫について

Polya が主張する，「もっと推測することを学ぶ」ことの必要性は，増加こそすれ，減少することはないであろう。しかし同時に，「推測すること」の教授・学習は難しい。実際，我々はPolya の著作から推測について多くを学んでいるにもかかわらず，「私は，将来の高校において，数学的発見，科学的方法，および数学の帰納的な面が，今日の高校のように完全に無視されることのないことをこい願う」[16] というPolya の言葉を解消できたとは言い難い。そのような状況を徐々に改善していくためには，少なくとも，様々な事例からの示唆を積み重ねていくことが必要と思われる。そこで，ここでは，「Consecutive Sums」の事例に基づく，上述の考察から示唆されることを，以下にまとめておく。

5.1 「Consecutive Sums」の事例から示唆される，一般的な事柄

(1) 問題を具体的なものにすること

命題の真偽に関する推測は，比較的容易に提出され，また修正されることを3.2 で指摘

したが，逆に言えば，自分が取り組むべき問題を，より具体的なものにすること，ある意味では，「Yes,No」で答えられるようにすれば，真偽が問えるようになり，推測の修正がしやすくなる。換言すれば，「特殊化」の奨励，そして「組織的な特殊化」に基づいてパターンを発見することの奨励である。前述の事例の場合，S_5 の学生は一般的な公式に思考が止まっているため，全く推測が生じてこない。大学院生の場合も，最初は同じだった。式変形の後，「こんな式から，一体どんな推測ができるのだろう」と，思考は停滞していた。それを脱却するには，T_6, T_{19}のような，取り組むべきより具体的な問題を生徒自身，あるいは教師が提出する必要がある。

また，そのときに，どのような具体例に注目すべきか，という感覚を養うことは大切である。T_6 は，「奇数でない数」を思いつきで提示したわけだが，学生からの発言 S_7 によって，もっと適切な数があることが指摘された。そのような感覚は重要である。

(2) 集団による討議

発展性のある問題であっても，一人で取り組んでいては，自分の推測に対する反例などなかなか気がつかない。そして，ある程度満足のいく推測を得てしまうと，それなりの「解決感」に浸ってしまって，一旦手に入れた推測をそう簡単に批判的に見られるものではない。実際，我々はゼミの中で，Mason の10章に挙げられている様々な問題を分担し，発表者の解決過程を検討したが，一人で解決するにはかなりの時間を要したし，行き詰まって，相談を要した場合も多かった。発表された院生の思考過程が最後の解決まで到達していたのは，考えた人が大学院生だったということ，そして自分一人で発表しなければならないというプレッシャーがあったこと，さらに十分な時間が提供されていたことによると思う。限られた時間の中で，生徒に推測させるためには，集団による討議が不可欠だという理由の一つがそこにある。さらに，院生の場合，最後の解決まで到達していたにもかかわらず，それを全体で検討すると，多くの場合，違った観点からの意見が提出されたり，問題の変形が示唆されたり，逆に問題の「つまらなさ」が指摘されたりした。そのような，多様な観点からの吟味・検討には，集団による討議が不可欠なのである。

(3) 暗黙のうちに行っている手続きや，暗黙のうちに使っている数の性質の，言葉や記号による明確な表現

すでに4章の1,2,4 節で述べたことによって，この項目の内容はほぼ尽きているが，さらに追加するとすれば，数学教育の中で「書くこと(writing)」を増やすことの意義への注目であろう[17]。

また，推測の側から見ても，そのような表現を豊富にすることには重要な意味がある。つまり，表現されたものは，表現した人にとっては自明なことであっても，それを解釈する側にとっては自明ではない。表現されていることは一体何かを理解する過程には，「推測」する過程が含まれている。従って，集団による問題解決の場合，そのような「表現」という媒介を通すことによって，「推測」するにふさわしい，具体的な問題場面が提供されていることにも注目する必要があろう。そして，逆に，そのような場面に注目することによって，学習過程の中に，生徒が「推測」と「批判」のしやすい場面を形成することが示唆される。次節では，そのような場面について考察する。

5.2 アイデアの図的表現を媒介とした推測の場面について

表現は，言葉だけでなく，図や記号によってもなされる。特に図による表現はいわば，「洞察」によって理解されるため，「この図は何を意味しているのだろうか」という問いは，生徒にとって言葉で表現するための，適

切な問題状況となるであろう。

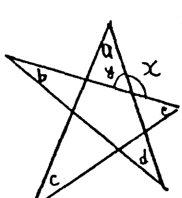
そこで，例えば，問題が図によって表現できるような問題で，多様な解決が可能な問題において，まず，自分なりの解決を図の中で（必要最低限の言葉を添えて）表現する。教室全体では様々な解決がなされているため，多様な図的表現がなされるわけだが，今度はそれぞれの図的表現は，どういうことを表現しているのか，またそれが間違っているとしたらどうしてか，どこを修正したらいいか，さらに，そのアイデアを使うと他のどういう場合までわかるのかを問うのである。そのような例として，星型５角形の内角の和の証明問題を取り上げる。

(1) 多様な解決が可能な問題としての星型５角形の内角の和

この事例は，附属中学校の中野先生により，生徒による多様な解決の可能な問題として紹介された。中野先生は，星型５角形の内角の和の証明のためのアイデアをできるだけたくさん挙げなさいと指示して，それぞれの子供のアイデアを「学習メモ」として記録した。様々なアイデアが出ていることに驚かされた。そこで，そこに書かれている図的表現を生かすことを狙いとして，学部学生の授業で「それぞれの生徒はどのようなアイデアをつかまえたのだろう」と提示し，その解釈・批判・一般化を試みた。以下は概略だが，授業の中で多様なアイデアが出れば，次のような活動に結びつけることもできよう。また生徒からあまりアイデアが出ない場合，教師の側から図的表現を提示することも考えられる。

(2) 図的表現とそれを基にした活動の概略

①



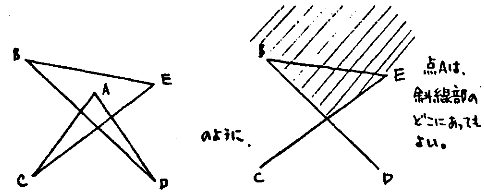
$x = a+c+e$

$y = b+d$

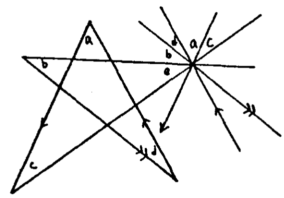
$x+y = 180°$

三角形に注目して角を集めていく。

星型５角形をかなり変形した形にまで一般化することができる。



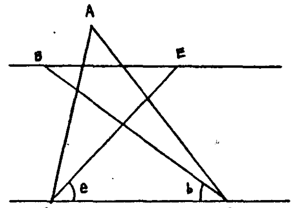
②



平行線を引くことによって，角を集める。一般の星型５角形も扱える。

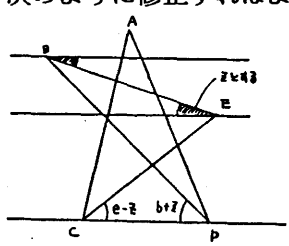
〔m, n 〕への一般化は，手続き的には可能だが，そのままのアイデアでは，実際には非常に煩雑になる。

③

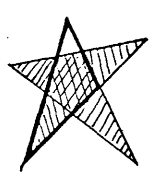


BE//CDを仮定して解いてしまっている。BE//CDのときは正しいが，BE//CDでない星型５角形もあるため，一般的な証明ではない。

しかし，一般の星型５角形の場合でも，次のように修正すればよい。



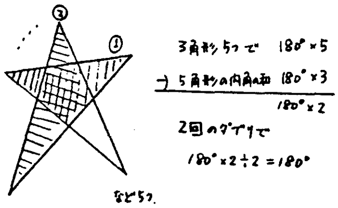
④



３つの三角形に分ける。

〔2n+1, n〕[18] に一般化できる。

⑤

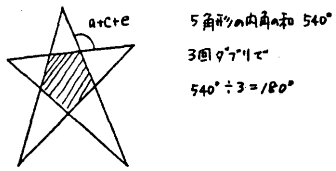


5つの三角形に分ける。

本質的には④と同じ。こちらの方が対称性を生かしている。

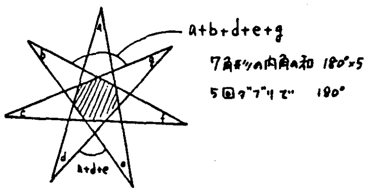
〔2n+1, n〕に一般化できる。

⑥

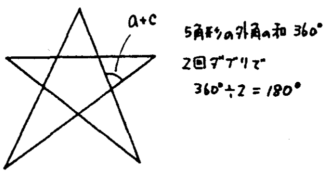


5角形の内角の和6∠R÷3

〔n, 2〕へ一般化が可能



⑦



5角形の外角の和4∠Rを使う。

本質的には，⑥とペアになるアイデア。

〔n, 2〕型へ一般化が可能

6. 結語

本稿においては，Polya, Mason らの著作で重要な役割を演じている「推測」について分析的な考察を進めるため，Mason らが conjecturingの例としている「Consecutive Sums」の問題を取り上げ，Mason らによる推測について分析すると共に，学部学生の授業の中での解決過程を記述，分析した。その結果，命題の真偽に関わる推測は形成，修正がかなり自然に行われるが，推測の形成，修正においては命題の真偽のみが原動力になっていないことを示した。そして，解決過程の中での手続きと，素材（数の性質）を明確にすることが，新しい推測を作るための手掛かりとなっていることを示し，更に心理的な原動力としての「問題がまだ解けていないという不満感」，推測を作るための予件としての表現の重要性を指摘した。また，それらの分析に基づき，推測を促すための工夫について，一般的な示唆をまとめると共に，図的表現を媒介とした推測の場面を提案し，星型5角形の内角の和の場合によって例示した。

このような観点から見た図的表現の教育学的な重要性を更に明確にしていくことが今後の課題である。

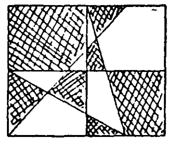
注

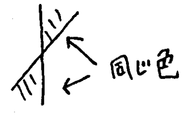
1. Polya, G. 『帰納と類比』，丸善，1959，序p.4
2. Ibid. p.5
3. 「2より大きな偶数は，素数＋素数と表現することができる」という推測
4. 反例も見つからないが，証明もできないという，本来の意味での推測ではないが，ある程度の事例については成立する推測，あるいはいくつかの事例を調べるとすぐに反例が見つかってしまう推測というような意味であろう。Mason らの示している典型的な例は，

   「平面をn本の直線で分割した領域を最低いくつの色で塗り分けることができるだろうか」という問題での

   opposite rule:頂点の反対側を同じ色。

   という規則である。

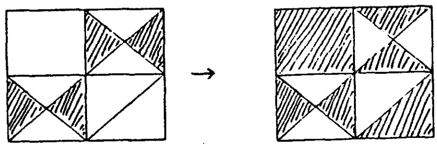




   次のような反例により

   adjacent rule:直線の反対側は別の色。

という規則に修正され，それによって「2色で十分」という解決に到る。



反例　　　　修正

5. Mason, J. et al. "Thinking Mathematically", Addison Wesley, 1982, p.64
6. 例えば，「任意のnの対して，$8n+3 = x^2+2p$となるxとpが存在する(Euler)」(p.2)，「整数nの素因子数の数の偶奇の分布」(p.57)，「代数函数の積分がそれ自身代数函数でなければ，それは整係数のべき級数によって表されることはできない」(p.60)，「$\Sigma(1/n^2) = \pi^2/6$ (Euler)」(p.109), Euler の多面体定理などが代表的な例として挙げられている。
7. Lakatos, I.『証明と論駁』，共立, 1980
8. Mason, op. cit., p.64
9. この問題については，
拙稿「数学的探究における『転化』についての一考察」筑波数学教育研究vol.4(1985), pp.11-35
において，筆者自身の解決過程の記述・分析を行った。そこでは，文字を使った証明の形成過程に焦点を当て，問題の転化，事実と観念の相互作用，及び探究の観点から見た数学的証明の役割などについて論じた。
10. Mason, op. cit., p.68-76
11. この点はMason らも気になったらしく，次のような注釈をつけている。「私がこれを推測として記録したのは，今これを正当化するために時間を使おうとは思わなかったからだ。それは正しいと思えるし，それを明確に記録しておいたので，Reviewになってからチェックしようと思う。私の数学的経験からは，それが正しいと思えたし，探究の主流から注意をそらすことなしに進んでいくのに十分な自信があった。しかし，そのような点も書いておいたことによって，後に私がもっと平静になり，新しいアイデアがあまり出てこなくなったときにチェックするであろう。」(p.71)
12. Masonらは，どうやって推測は生起するのかという問題に対して，最も重要なこととして，自信あるいは虚勢を挙げる。そして，それに関連したこととして，彼らの言葉で言うRubric Writing，つまり，「〜をやってみよう」「たぶん〜だろう」「しかし，何故だろう」などの記述を勧めている。そして，conjecturingを支える2つの活動として，特殊化と一般化を挙げている。
13. 例えば，Dewey, J. "Logic : The Theory of Inquiry", 1938に示されている。なお，この点については，前出10で論じている。
また，ここでは，T_6 以降の思考過程についてのみ述べているが，それ以前の過程でも，データの収集→パターン（推測）の発見→調べるべきデータの決定→パターンの検証・修正，というサイクルとして，Dewey の2つの観点は関わっている。
14. Polanyi, M. "Personal Knowledge : Towards a Post-Critical Philosophy", Routledge & Kegan Paul, 1958, p.184
15. この2人の大学院生は，かなり数学的能力の高い，高校の先生である。この問題を様々な人に解いてもらった事例に基づくと，数学的能力の高い人ほど，「問題が解けた」「まだ解けない」あるいは，「ここまでは解けているけれど，これは解けていない」という感覚が敏感である。この感覚の重要性は，清水美憲氏に示唆されたものだが，特に自力で解決を進めていく上で，重要な役割を担っていると思われる。
16. Polya, G.『数学の問題の発見的解き方』vol.2, みすず書房, 1967, p.184
18. Keith, S. Z. 'Explorative Writing and Learning Mathematics, MT, (1988)714-719
19. 一般的な定義は，拙稿「星型多角形の内角の和について」本号pp. - を参照のこと。