数学教育研究，第8号，上越教育大学，1993年，pp. 19-28

問題場面の構造の大局的再構成について

布川　和彦

1．はじめに

問題場面の構造は、解決過程を記述し、分析するための枠組みとして導入された。それを用いた場合、従来のようないくつかの段階の移行により解決過程を捉える代わりに、問題場面についての理解に重点をおき、その変化により解決の進展を捉えるという立場に立つ（布川,1989）。そして、最終的には、問題の中の問いについての判断ができる程度に、問題場面を解決者の持っている数学的知識により意味づけることができた時点で、その解決は終了する（布川,1992a）。

その途中の解決過程に関して、つまり問題場面の構造という視点から見た解決過程に関しては、すでにいくつかの考察を行ってきた。しかし、それらは解決自体に影響を持つ問題場面の構造の要素の特定（例えば Nunokawa,1992）や、局所的な様相についての考察（布川,1991a,1992b,c）であった。

本稿では、これに対し、解決過程の全体にわたる大局的な様相に関する、問題場面の構造の視点からの最初の考察を与えるものである。

2．実験の背景

本稿では、一人の被験者についてのデータに焦点を当てて論述していく。この被験者は、大学院の教育学研究科に在籍する研究生であり、大学レベルの数学の教育も受けており、しかも数学に対する関心も高い。そこで、この被験者を、少なくとも学校数学に関してはエキスパートであるとみなし、その解決を分析することで、解決過程モデルを構築しようとするのが、ここで述べる実験の最終的な目的である。

数学的問題解決の研究においては、これまでの研究の結果の全体的な方向性が捉えにくいこと（例えば Hembree(1992a,b) と Goldin(1992) の議論参照）に加え、問題解決の概念自体の混乱が近年改めて反省されている（Schoenfeld,1992; Ernest,1992; Stanic & Kilpatrick,1988）。問題解決に関して、本稿では、解決者が直接の解法は知らないが、しかし解決のために解決者の既有の知識を越えるものを必要としない場合を考えている。この点で、当該の問題を解くためのスキーマを仮定した議論（例えば Kintsch & Greeno,1985）とも、逆に新たな知識を有意味に学習することに重点を置いた議論（例えば Greeno,1991; Schoenfeld,1991,1992; Schroeder & Lester,1989）とも、多少立場を異にしている。二つの特性をともに考慮することが、問題解決を新たに考察するためには必要である（布川,1991b）。就学前の子どもの算術の問題を解決する可能性（例えば Resnick,1989）は、こうした状況で確かに子どもが適切に反応できる可能性を示すものと考えることができる。こうした面を特にエキスパートについて改めて調べ直そうというのがここでの問題意識であるが、類似の問題は Davis(1992) においても示されている。

この目的にかなった状況を当該の被験者—かなりの数学的知識を持つ—に対して設定するために、数学オリンピック関連の問題に着目した。それは、これらの問題が通常の高校

生を対象とした問題よりも難度が高いと同時に、原則として高校生により解決可能であるように作られていると考えたからである。ただし、本選や国内予選の問題は被験者に知られている可能性が高いと考え、アメリカ予選の問題（クラムキン, 1991）を用いた。[1)]

この被験者には9回のセッションに協力してもらい、1992年2月13日から3月18日にかけてこれらのセッションを行った。各セッションにおいては、1問の問題が扱われ、発話思考法[2)]により解いてもらった。その解決および事後のインタビューを含め、一回のセッションは60分から120分であった。特に解決に要する時間もかなり長く（例えば、本稿で分析している事例では90分である）、問題は被験者にとって十分な困難性を持つものであったと考えられる。なお、実験の方法およびプロトコールの作成については布川 (1992b) を参照。

3．問題場面の構造の大局的再構成

本稿では紙幅の都合上、一つのセッション—第2回—の結果に焦点を当てて論述していく。これが平面幾何の問題を扱っており、そのため描かれた図から解決者の構成した問題場面の構造が想定しやすいこと、およびすでにいくつかの分析により局所的な特徴についての情報が得られている（布川, 1992b,c）ことが、このセッションを選んだ理由である。

3.1 第2回のセッションの概要

このセッションでは、次の問題が扱われた。

> 問題:凸五角形 $ABCDE$ で次の性質を満たすものはすべて同じ面積を持つことを示しその面積を計算せよ。'5つの三角形 ABC, BCD, CDE, DEA, EAB の面積がいずれも1' さらに、この性質を満たす無限個の合同でない五角形が存在することを示せ。（クラムキン, 1991, p.4）

原文では図が添えられていたが、実験に当たっては図は提示していない。

3.1.1 解決の概要

(i) 五角形を描き、三角形の重なった部分（例えば $\triangle ABC$ と $\triangle BCD$ の重なり）を調べる。

(ii) 正五角形の場合を考える。三角形の相似関係を利用して、五角形の辺の長さを1としたときの、いくつかの辺の長さを求める。これを基にヘロンの公式により面積を求めようとしてやめる。

(iii) 再び五角形を調べ、各辺と向かい合う対角線とが互いに平行になっていることに気付く。

(iv) 平行の関係を利用して面積を求めようとしたり、5組の平行線により五角形を描こうとする。また、辺 CD と対角線 BE との平行を利用して $\triangle BCD$ と $\triangle CDE$ の等積変形を考えるが、これらをずらすと $\triangle ABC$ と $\triangle DEA$ の面積が保たれないことに気付く。

(v)$\triangle ABC$ と $\triangle DEA$ の面積が1であるという条件をはずし、そのかわりにパラメータを導入し、これを用いて五角形の面積を表す。

なお、(ii) から (iii) にかけての箇所、および (iv) から (v) にかけての箇所については、布川 (1992c) を参照。

3.1.2 問題場面の構造の変化

ここでは解決を、解決者により構成された、問題場面の構造の変化として記述する。

(a) 最初の問題文を読んでいるときの問題場面の構造は、かなり字義通りの構造となっている。つまり、五角形があり、その中に面積1の三角形が5つ存在した状態である。

このことは、被験者が図をかくときのかき方によって示されている。問題を読みながら図をかいているときは、まず五角形 $ABCDE$ をかき、次に線分を AC, BD, CE, DA, EB の順で引いている。これは、問題文をそのまま図化したものと言える（図1）。

この後で三角形どうしの重なった部分の状態を調べようとして、もう一度図をかき直しているが、そのときにも、まず五角形をかき、

次に対角線を引いている。

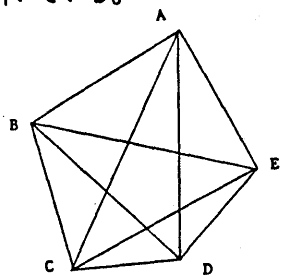

図1

(b) 正五角形を考えた時点でも、基本的には五角形とその中に面積1の三角形が5つある、という構造は変わっていない。図をかくときに、正五角形をまずかき、次に線分 AC, BD, CE, DA, EB を引いている。

しかし、いくつかの角の大きさ（例えば、$\angle ABE = 36°$）や角の間の相等関係（例えば、$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$）、内部の三角形の性質（例えば、$\triangle ABg$ は二等辺三角形である[3)]）、いくつかの三角形の相似関係（例えば、$\triangle ABg \sim \triangle ACD$）、が探求の途中で見い出されているので、これらの情報は問題場面の構造に付加されている（図2）。さらに、三角形の相似関係を利用して、正五角形の一辺の長さを1としたときの、対角線の長さを求めている。

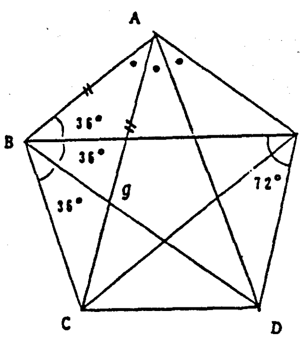

図2

この後で、まず、sin 36° の値を利用して五角形の面積を計算しようとしているが、これは二辺の長さとその間の角の正弦により三角形の面積を計算しようとしたものと考えられる。したがって、一つの角が 36° の三角形に注目している。このことから、正五角形に対して、図3のような三つの三角形の集まりとした構造が与えられていると考えられる。さらにその後では、今度はヘロンの公式を用いて面積を計算しようとしているが、先に辺と対角線の長さが分かっていたことを考えると、辺と対角線のみから構成される三角形に注目していたと思われる。つまりこの場合にも、同様の三つの三角形からなる構造を問題場面—五角形—に与えていたと考えることが出来る。

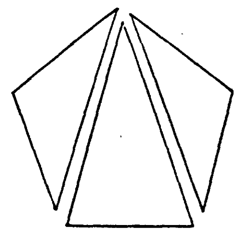
図3

(c) 計算をすることをやめた後で、探求をするために再び図をかくが、その際も最初は正五角形をかき、線分 BE, AC, CE, BD, AD をかき、$\triangle ABC$ と $\triangle ABE$ に斜線をつけている。この段階では、これまでと類似の問題場面の構造が与えられていると見られる。

しかし、その直後に図のかき方が変化している。すなわち、正五角形をかいた後、まず線分 BE を引き、その後今度は線分 BD, CE を引いている。さらに、辺 CD に印をつけ平行な線分 BE と CD の間の幅を h とおいていることから、$\triangle BCD$ と $\triangle CDE$ とを共通な底辺を持ち、高さが等しい二つの三角形と見ていると考えられる（図4）。
このことは、「高さが等しい」という発言が、この時点で多くなされていることからも裏付けられる。

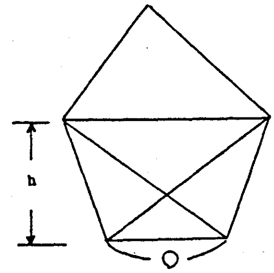

図4

(d) 各辺と向かい合う対角線とが互いに平行

であることに気付いた後で、図のかき方が全く変わっている。この時点では、5組の対角線を用いて五角形をかこうとしている。

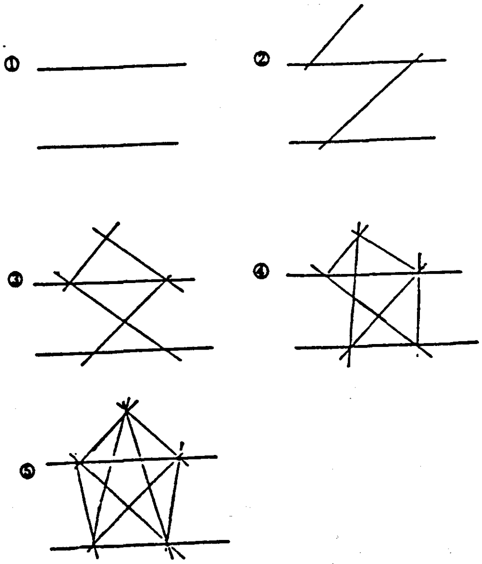

図5

最初にかこうとしたときには、途中で向かい合う辺を平行になるようにかこうとして失敗している。その後で、図5にみられるような順序で、辺と対角線の平行関係のみより五角形をかき、五角形が出来た時点で各頂点を黒く塗っている。

このことより、5組の平行線からなる図形という構造を問題場面に対して与えていると考えられる。

(e) この後で、平行についての情報を生かして面積を計算しようとするが、その際には、図4に対応する構造が想定されている。なお、ここで、線分 BD と CE の交点を通り辺 CD に垂直な線分が引かれている。その上で、$Cp:pE$ および $kp:pl$ の値に注目している。ただし、p は線分 BD と CE の交点であり、k,l はそれぞれ垂線の線分 CD, BE との交点である。これより、$\triangle CDp$ と $\triangle BEp$ の相似関係についての情報が構造に付加されていたと考えられる。

このときの計算の結果に対しては疑問を持つが、条件を満たす五角形が無限個あることの証明は可能であると発言している。観察者の求めに応じて説明を始めるが、そのときに辺 CD と対角線 BE の平行関係を利用した等積変形を基本としており、この平行線の間の三角形を動的なものとする構造を、この時点では与えている（図6）。しかも、無限個あるとの確信を持っていることから、等積変形によっては基本的な他の条件は変化しないような構造が先取り的に構成されていたと見れる（布川,1992c）。

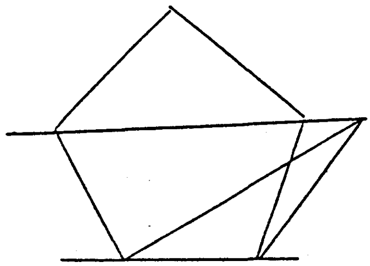

図6

しかし、その途中で、$\triangle BCD$ と $\triangle CDE$ の重なった部分が変化することに気付き、これが変化しないような動かし方を求めるが失敗している。さらに、等積変形をしたときに、他の三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle DEA$ の面積が1だという条件が必ずしも保たれないという情報が付加されており、後付け（布川,1992c）の過程で構造がさらに変化している。

この失敗の中で、与えられた条件の中で面積を計算すれば、一般の場合の面積を求めたことになることを見い出している。つまり、彼がこの時点で具体的に描いた五角形が一つの generic example (Mason & Pimm,1984) となり、この図の持っている基本的な構造が問題場面の構造として与えられたことになる。

(f) この後、前の図を見ているが、そのときに

はいくつかの図形をなぞっている。なぞった図形は、$\triangle ABE, \triangle CDp, \triangle BEp$ 、および平行関係にある線分である。その後で、図7のような順序で五角形をかく。

ここでは、頂点 A を通り線分 BE に平行な直線が引かれ、それを利用して $\triangle ABE$ に等積変形を施したものも描かれている。これは $\triangle ABE$ を「ぼうし」と呼んで、独立して動かせるとした発言に対応している。つまり、$\triangle ABE$ の独立性およびその等積変形についての情報が構造に付加されている。

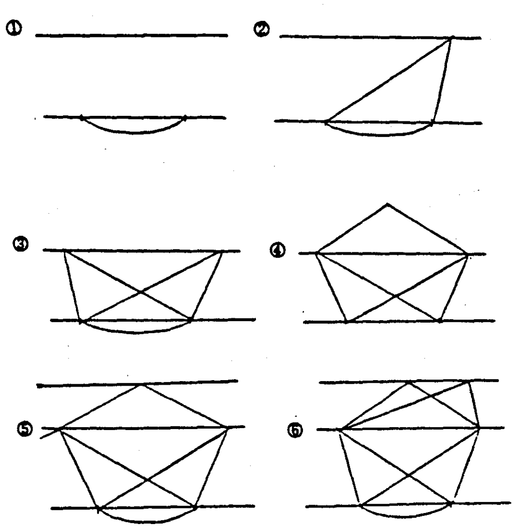

図7

同様に、頂点 D を通り線分 CE に平行な直線を引き、$\triangle CDE$ の等積変形も考慮されるが、こちらは、すぐに「うまく行かない」として放棄されている。

(g) 次には「もっと言えることないか」として新たに図をかくが、そこでは、最初の頃に注目していた三角形の重なりに注意が向けられる。この時点での図は正五角形をかき、次に対角線を引いて、三角形の重なった部分のみに斜線をつけたものである（図8）。

一方で、図の上でも $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle CDP$, $\triangle BEP$ および平行な2線分 CD と BE、さらに、$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ をなぞっており、発言でも平行や等積変形への言及があることから、図のかき方は最初期のものでも、そこでの構造には、平行線とそれに基づく等積変形に関わる情報が付加されていたと考えられる。

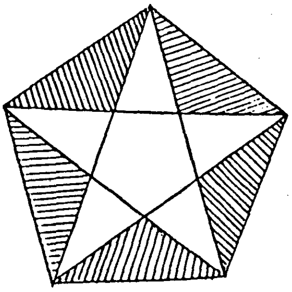

図8

(h) この後今度は、再び5組の平行線により五角形をかこうとする。ただし、今回は、どこまで自由に線分が引け、どこから自由に引けなくなるかを意識している。したがって、5組の平行線からなるという構造に対して、何らかの制限に関する情報が付加されたと考えられる。もう一度同様にしてかき始めるが、このときは図5の第3段階までかいて止めている。三度目は、この構造の下で、辺の長さを a, b などの文字でおき、辺と対角線の幅をそれを用いて表していくが、予想以上に多くの文字が必要となることから、この試みは断念している。

また、四辺形 $BCDE$ の部分を台形として意味づけており、この点でも構造が変化したと言える。

(i) ここから後の部分では、基本的には図7と同じ構造であった。最初、正五角形について面積を計算した後、正五角形という条件をはずし、一般の場合を考えている。その際、正五角形という条件をはずしても、$\triangle BEp$ と $\triangle CDp$ が相似であるという関係が保たれる

こと、ただし相似比は五角形により変化することに言及しており、これらの情報を含めた構造が与えられている。

結局は、辺 CD の長さを a、$\triangle CDP$ の高さを t とし、これを利用して、五角形の面積を表すが、その際は、台形 $BCDE$ の面積に、$\triangle ABE$ の面積 1 を加えるという方法で計算しており、五角形全体は、台形と「ぼうし」を併せたものという構造が基本的に与えられていると考えられる。

3.2 構造の変化の大局的な様相

前項で記述した問題場面の構造の変化を見ると、おおよそ四つのタイプに分類される。上の記述に沿って分類すると次のようになる。

(a) では、問題文の字義通りに五角形とその内部の五つの三角形という構造であった。これをタイプ A とする。

(b) の前半では、いくつかの情報が付加されているが基本的な構造は同じであるので、タイプ A_1 とする。[4)]

(b) の後半では、三つの三角形の集まりとしての構造が与えられており、これをタイプ B とする。

(c) では、前半はタイプ A_1 の構造であるが、後半は、正五角形の中に辺と対角線の平行関係を認め、その幅を共通の高さとして持つ二つの三角形が基本となった構造へと変化している。これをタイプ C とする。

(d) では、5 組の平行な線分によって構成される図形としての構造が、与えられており、これをタイプ D とする。

(e) では、再び (c) と類似の構造に戻り、そこにいくつかの付加的な情報が加わっている。これをタイプ C_1 とする。

(f) では、基本的にはタイプ C の構造であるが図をかく際に、五角形を先にかくよりも、平行線とその間にある三角形を先にかき、その後で「ぼうし」を加えている。さらに、点 A を通り線分 BE に平行な直線が引かれることで、平行線を基本とした構造がより濃く現れている。そこで、これを C と区別するためにタイプ $\hat{C}$ とする。

(g) では、最初の構造に戻っているが、いくつかの情報がさらに付加されているので、タイプ A_2 とする。

(h) では、5 組の平行線を基本とした構造に、いくつかの情報が付加されているので、タイプ D_1 である。

(i) では、基本的には (f) と同じ構造であり、これに四辺形 $BCDE$ を台形とするといった情報が付加されたものと見て、タイプ $\hat{C}_1$ とする。

以上をまとめると、前項で述べた問題場面の構造の変化は、おおよそ次のようになっている；

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow B \Rightarrow A_1 \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow C_1 \Rightarrow \hat{C} \Rightarrow A_2 \Rightarrow D_1 \Rightarrow \hat{C}_1\text{。}$$

これを時間を含めて図示すると、次のようになる。[5)]

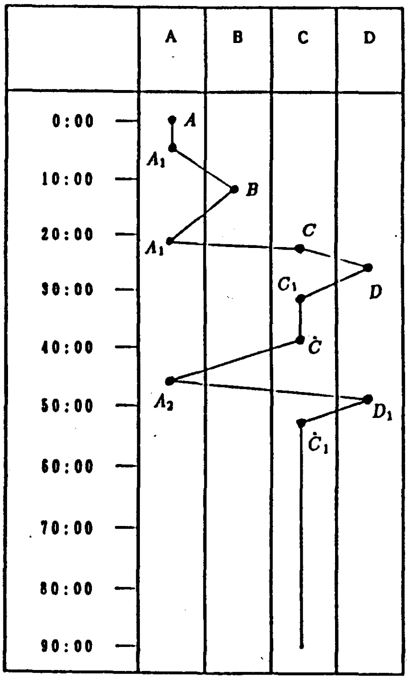

図9

これより、まず、次のような変化の様相が

見いだせる; 26 分すぎに各辺と向かい合う対角線が全て平行になることを見いだしてからは、問題場面の構造は、タイプ C と D の間を移行しながら、結局 C へと収束して行っている。ここで、タイプ C が辺 CD とそれに平行な線分、およびそれにより等積変形の関係にあるいくつかの三角形を基本とした構造であり、一方、タイプ D が五角形を 5 組の平行線からなる図形とする構造、すなわち、平行線の関係を最大限利用した形での問題場面の構造であることに注意したい。結局は、両者とも平行関係を基本として、問題場面の構造を構成したものなのである。

ここで、C と D の間を移行しているということは、つまり、平行という関係を極力全体へと押し拡げようとする試み (D) と、平行関係を中心としながらも、それを適度な範囲に抑えて問題場面の構造を構成しようとする試み (C) との調整をはかっていることになる。確かに、46 分すぎに一度タイプ A に戻っている。しかし、この移行が「もっと言えることないか」として、新たな情報を探索しようとする中で生じたものであり、その行き先が平行というアイデアが生まれたタイプ A の構造への移行であることを考慮すれば、上で述べた調整に関連した情報を求めて、アイデアの源泉に戻ったと考えることができる。また、同じタイプ C であっても、解決の後の方では、平行線を基本とした構造がより明確に現れている $\hat{C}$ へと移行していることも、平行というアイデアをできるだけ生かそうとする方向性を示唆している。

一方、その平行というアイデアの生まれた、タイプ A の構造では、問題文をそのまま図示したときに五角形の内部に現れる、いくつかの三角形について探求が行われた。そして、$\triangle BCD$ と $\triangle CDE$ とが共通な底辺 CD を持つ高さが等しい三角形として意味づけられ、その結果として、$CD \parallel BE$ が得られている。つまり、問題場面の内部の探求から平行というアイデアが生まれている。確かに、解決の前半では、まず五角形をかき、それから探求が行われていたのである。これに対して、解決の後半では、むしろ平行などの性質を利用して五角形を構成しようとしたのである。平行ということは、五角形の内部で成り立っている性質から、五角形を構成する基本原理へと、身分を変えていっている。

以上の二点をまとめると次のようになる。最初、ほぼ字義通り構成された問題場面の構造における、内部的な探求から得られたアイデアを、後半になって問題場面のできるだけ広い部分へと拡大しようと調整がはかられる。そして、最後には問題場面の構造を基本的にそのアイデアで構成しようとする、という形で、問題場面の大局的な再構成がなされている。

3.3 他のセッションでの再構成

第 7 回のセッションについては、使用した問題および解決の部分的な記述については、布川 (1992b,c) で行っているが、このセッションの解決でも、類似の様相が観察される。

すなわち、最初は字義通りの構造の構成から始まり、次に座標をいれて計算を試みるが、これは途中で中断する。その後、再び字義通りの構造へ戻った後、交点のところに現れる角の大きさが等しくなるという情報が加わり、これと軌跡が円になるという情報とが結合して、交点のところに現れる角に円周角という意味づけがなされる。この円周角と軌跡の円との関係が初めは問題場面全体に広げられようとするが、途中でいくつかの場合分けが必要となることがわかり、修正がはかられる。しかし、修正の際に新たに現れる角も、結局は元の円周角と関係づけられ、全体として、元の円周角を基本とした問題場面の構造が構成されているのである。

これより、ここでも第 2 回のセッションと同じ仕方で、再構成が行われている、と考えることができる。

4．大局的再構成と数学的意味づけ

布川 (1992a) は、問題場面の構造の収束先として、問題場面の要素間の関係が、解決者の持っている数学的知識により意味づけられた構造をあげている。このことと、本稿で述べた問題場面の構造の大局的な再構成とを関連づけることで、本稿の結論を、問題場面の構造に基づく解決過程論の中に位置づけておきたい。

3.1 と 3.2 で議論した事例についてまず検討してみる。そこでの大局的な再構成は、一定条件を満たす五角形という問題文の字義通りの図形から、5 組の平行線により構成される五角形という構造を経て、一組の平行線により等積変形の関係にある二つの三角形と「ぼうし」という構造への移行として記述された。つまり、最初は単にともに面積が 1 として考えられていた二つの三角形 $\triangle BCD$と $\triangle CDE$ が、一組の平行線に基づく等積変形という、図形と図形の間の変換により関係づけられている。また、「ぼうし」として一時的に分離された三角形 ($\triangle ABE$) についても、それを分離した背景には、点 A を通り辺 BEに平行な直線を引くことで面積 1 の三角形を自由に作るという考えがあった。このように見ると、五角形が互いに平行な 3 本の直線（点 A を通る直線, 直線 BE, 直線 CD）に基づく等積変形を中心として意味づけられていることが分かる。しかも、この等積変形を利用して、ある範囲の五角形群も互いに結び付けられている。

図形の変換に関する知識は、いくつかの図形からなる場面における、関係に関する情報を数学的に意味づけるものという意味で、図形自体よりも高次の数学的な意味づけであると考えることができる（布川,1992a）。そして、このことより、この五角形の問題での大局的再構成は、最初の字義通りの構造よりも、より数学的な意味づけを含む構造が再構成されていたのである。

同じことは、3.3 の事例についても言える。そこでは、問題場面の構造の再構成は、回転する半径とそれに伴って動く交点という字義通りの構造から、交点のところにできる角の相等関係に基づき、その角の移動する場面へと再構成された。このときの角は、推測された答えである円についての円周角であり、したがってこの考え方の背後には、移動する角と軌跡となる円との間の関係が想定されている。しかも、円周角の定理は共通の弦の上の一群の角についての定理である。さらに、解決の途中で定式化された二つの場合は、円に内接する四角形の対角の性質に基づいて関係づけられている。つまり、解決の後半において再構成された問題場面の構造は、交点のところにできる角の相等関係を基本とし、それらの角を他の要素に関係づけることにより、問題場面全体が意味づけられている。

ここでも先ほどと同様、図形の間の関係に関わる数学的知識を用いた、より数学的な意味づけを与えるものに、構造が向かっていたと言える。

このことは、前節に述べた再構成への大局的な過程から、説明することができる。再構成への過程は、問題場面の一部で成り立つ関係がまず数学的に意味づけられ、その関係を逆に問題場面のより多くの部分に広げていくことで、問題場面全体の新たな構造が構成されるという順序をほぼとってきたのである。このように、部分的に見いだされた関係の数学的意味づけを拡大していくことは、結果的に数学的知識による意味づけを多く含む、問題場面の構造の再構成へとつながる可能性を持っている。

つまり、本稿で述べたような問題場面の再構成は、問題場面の数学的知識による意味づけを促す方向に向かい易いものであり、その意味で、これまでに述べられてきた、問題場面の構造の観点から見た、数学的問題解決の方向性と一致するものである。逆に言えば、数学的問題解決の方向性を布川 (1992a) のよ

うに捉えた場合、大局的な進むべき方向として、本稿で述べたような、部分的な数学的意味づけを問題場面の全体へと波及させていくことを通した、問題場面の構造の再構成を考えることができることになる。

5. おわりに

本稿では、エキスパートによる問題解決のプロトコールを分析することにより、問題場面の構造の大局的再構成に関する一つの様相を見いだした。それは、問題場面の内部的な探求で見いだされたアイデアを、適当に調整しながらより広い部分へ押し拡げ、それにより場面の構造を再構成しようとするものである。

こうした大局的な構造の変化の様相と、これまでの局所的な構造の変化の特徴とを関連づけていくことにより、問題解決過程のモデルが構築されてくるであろう。

註

1) その後の会話の様子では、被験者は最後まで問題の出典には気付いていないようであった。
2) この方法の目的は Ginsburg ら (1983) によれば「知的な成人における複雑な問題解決を構成する統合的な活動を引き出し、それを記述する」(p.8) ことであり、本研究に適していると考えられる。この方法については発話と思考が共存しにくいという指摘も確かにあるが (Pirie,1991)、その一方で近年新たにその可能性が見直されている面もある（赤堀,1992）。
3) ここで小文字の g は、解決者によってではなく、筆者が記述の都合上導入した文字であることを示す。
4) ここでの添え字は情報が付加されて多少変化していることを示す。以下の添え字およびハット記号も同様のニュアンスである。分析ではむしろ大文字の方に着目するが、これは本稿の目的が解決過程全体にわたる大局的様相を調べようとしていることによる。また、構造の変化が段階的なものとここで仮定しているわけではなく、この点についても、大局的な様相を調べるために、全体の解決の流れの中で特徴的な構造を取り出している。
5) ここでは添え字、ハットは無視している。理由は 4) で述べた通りである。

引用文献

赤堀侃司 (1992). Reading Protocol による図形文章の理解過程の分析. 電子情報通信学会技術研究報告, *91*(531), 27-32.

Davis,G.(1992). Cutting through chaos: A case study in mathematical problem solving. In W.Geeslin & K.Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth PME conference*(vol. I, pp.177-184), Durham.

Ernest,P.(1992). Problem solving: Its assimilation to the teacher's perspective. In J.P.Ponte et al. (Eds.), *Mathematical problem soliving and new information technologies.* Berlin: Springer Verlag.

Ginsburg,H.P. et al.(1983). Protocol methods in research on mathematical thinking. In H.P.Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* Orland,FL: Academic Press.

Goldin,G.A.(1992). Meta-analysis of problem solving studies: A critical response. *Journal for Research in Mathematics Education, 23,* 274-283.

Greeno,J.G.(1991). A view of mathematical problem solving in school. In M.U.Smith (Ed.), *Toward a unified theory of problem solving: Views from the content domains.* Hillsdale,NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hembree,G.(1992a). Experiments and relational studies in problem solving: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 23,* 242-273.

Hembree,G.(1992b). Response to critique of meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 23,* 284-289.

Kintsch,W. & Greeno,J.(1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92,* 109-129.

クラムキン,M.S.(1991). 数学オリンピック問題集：アメリカ編. 東京図書.
(Klamkin,M.S.(1988). *U.S.A. mathematical olympiads,1972-1986.* Washington,D.C.: The Mathematical Association of America.

Mason,J. & Pimm,D.(1984). Generic example: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289.

布川和彦 (1989). 数学の問題解決におけるストラテジーと解決過程との関わり. 筑波数学教育研究, *8-A*, 89-99.

布川和彦 (1991a). 数学的問題解決過程における数学的知識の問題場面の構造への作用について. 筑波数学教育研究, *10*, 45-55.

布川和彦 (1991b). 学校数学におけるストラテジー指導に関わる問題点について—ストラテジー指導に対する批判を手がかりとした新しい方向性の探求—. 筑波大学教育学系論集, *16*(2), 83-95.

布川和彦 (1992a). 問題場面の構造の収束についての一考察－数学的問題解決の特性に着目して－. 筑波数学教育研究, *11-A*, 29-41.

布川和彦 (1992b). 数学的問題解決における解決者による情報の創出. 日本科学教育学会年会論文集, *10*, E216.

布川和彦 (1992c). 解決過程における問題場面の構造の先取りとその意義. 日本数学教育学会第 25 回数学教育論文発表会論文集, 379-384.

Nunokawa,K.(1992). Solvers introduce extra information: Its positive roles in the problem solving process and the instruction. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 11-B*, 25-39.

Pirie,S.(1991). Peer discussion in the context of mathematical problem solving. In K.Durkin & B.Shire (Eds.), *Language in mathematical education: Research and practice.* Buckingham: Open University Press.

Resnick,L.B.(1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*, 162-169.

Schoenfeld,A.H.(1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J.F. Voss, D.N.Perkins, & J.W.Segal (Eds.), *Informal reasoning and education.* Hillsdale,NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld,A.H.(1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Schroeder,T.L. & Lester,Jr.,F.K.(1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P.R.Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics.* Reston,VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Stanic,G.M.A. & Kilpatrick,J.(1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R.I.Charles & E.A.Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving.* Reston,VA: The National Council of Teachers of Mathematics.