数学教育研究，第8号，上越教育大学，1993年，pp. 37-48

作図ツールを用いた探究例と問題例

今町先生と松沢先生の問題に関連して　－

愛知教育大学
飯島　康之

0．はじめに

Geometric Constructor を使った授業を現在，上越地区（上越教育大学附属中学校，板倉中学校），愛知地区（愛知教育大学附属名古屋中学校，豊田市石野中学校），神奈川地区（川崎市白山中学校），北海道地区（北海道教育大学附属札幌中学校他）で実践していただいている。

Geometric Constructor のようなツール型のソフトを授業で使う場合，教材開発に当たって，教材の発展の可能性，そこに盛り込める活動の可能性等を検討を伴うが，まず教師である私達自身がソフトを使った探究を実践し，紙と鉛筆を使ったときの探究とどこが違うのかを明らかにする必要がある。生徒の活動を予想し，適切な学習過程を設計するためには，いろいろな角度から検討することが必要なため，私達自身がいろいろと面白い発見を体験することが少なくない。

今回の共同研究の中で，自分の探究の過程，あるいは教材の中に盛り込もうとする過程を明確に表現し，伝えることが，意外に難しいことが明らかになってきた。逆に，他の人が考えていることを理解することも，そう簡単ではないことが分かってきた。一般の教材の場合，それに関連する教材を扱った経験があったり，また似たような問題を扱った経験があるため，意志の疎通が容易なのに比べると，ソフトを使った探究の場合，これまでの教材の扱いとは異なる面が多いため，全く初めてのことが多いことに起因するようだ。

これらのことは，特にツール型のソフトを利用していく場合，探究過程や教材をどのように表現し，記録していくか，そしてそのような記録を蓄積していくかが大きな課題であることを示唆している。

そこで本稿では，今回の共同研究の中で，教材に関する検討を行った記録の中から２つを取り上げることにする。最初は，今町先生（板倉中学校）から，提示された問題について私自身が行った教材研究の過程をそのままの形で述べる。これは，私自身の探究過程を翌日文章化したものである。もう一つは，松沢先生（上越教育大学附属中学校）の問題に関連して，いろいろと問題を考えてみた結果を挙げる。この問題は，以前にいろいろと検討し，松沢先生に提案したものであったため，探究過程の記録ではなく，ある程度教材化された形，探究を支援するための問題と，それに対する解決案という形で提案した。こちらは，Geometric Constructor の環境の中で，「問題」あるいは「解決」を利用者が容易に参照できるようになっている。

両方とも，最終的な教材の形にはなっていない。もっとまとまった形式に整理すべきというご批判もあるかと思う。しかし，今回は，次の点を考慮し，できるだけ忠実な形のままにしておくことにする。

(1) ソフトを利用した探究過程をそのまま記述したものは非常に少ない。また，あっても短い探究過程のものがほとんどである。今町先生の問題に関わる探究過程は，ある程度長時間にわたる探究の記録の例として検討していただきたい。

(2) ソフトに関連した教材研究の過程を記録

したものもほとんどない。また，ソフトに適した教材の在り方も未知の部分が多い。松沢先生の問題に関する問題例を，一つの表現方法として検討していただきたい。

(3) 最終的な授業に関しては，明治図書『数学教育』に連載されるものを参照されたい。

1．今町先生の問題に関する探究過程

今町先生から提示された問題は，通常次のような形で与えられる問題であった。

問題 1

平行四辺形ＡＢＣＤの中に点Ｅをとる。このとき，

$\triangle EAB + \triangle ECD = \triangle EBC + \triangle EDA$

$= \frac{1}{2}\square ABCD$

となることを証明せよ。

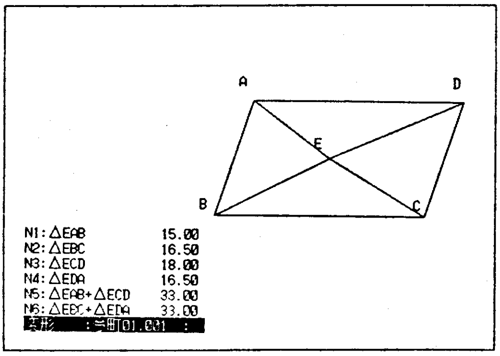


図１　測定値の観察

この問題は不変性が興味深いので，Ｅを動点化することにより，まず次のような問題に変えることができる。

問題 2

平行四辺形ABCDの中に点Ｅをとり，EA, EB, EC, EDを結ぶ。Ｅの位置をいろいろと変えたときに，ΔEAB, ΔECD, ΔEBC, ΔEDA Aの変化について観察せよ。

すると，発見するはずのこととして，

水平に動かすと　ΔEBC, ΔEDA は不変

ΔEAB, ΔECD は逆に変化

垂直に動かすと　ΔEAB, ΔECD は不変

ΔEBC, ΔEDA は逆に変化

四角形の内部ならば

$\triangle EAB + \triangle ECD = \triangle EBC + \triangle EDA = \frac{1}{2}\square ABCD$

が考えられる。

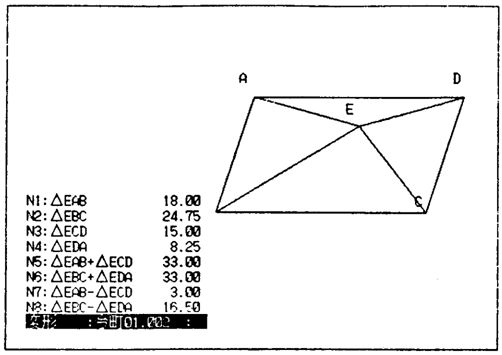


図２　和が一定

この問題２の発展として，次の問題３も当然考えらる。

問題 3

平行四辺形ABCDの中に点Ｅをとり，EA, EB, EC, ED を結ぶ。Ｅの位置を四角形の外部まで動かしたときにΔEAB, ΔECD, ΔEBC, ΔEDA の変化について観察せよ。

この場合，Ｅの位置によって異なるが，$\triangle EAB \pm \triangle ECD$, $\triangle EBC \pm \triangle EDA$ のなかのいずれか二つが$\frac{1}{2}\square ABCD$になる。通常の授業の中での問題の提示としては，問題３のように提示する方法の他に，

問題 4

次の図において，

$\triangle EAB + \triangle ECD = \triangle EBC - \triangle EDA = \frac{1}{2}\square ABCD$

となることを証明せよ（図略）

あるいは，

問題 5

問題１の点Ｅを図のような場所に変えたとき，やはり$\frac{1}{2}\square ABCD$となる関係式を見つけ，それを証明せよ。

というような形になるのではないだろうか。

さて，問題３を追究すると，成立する関係式によって，領域を下図のように分割することができることが分かる。

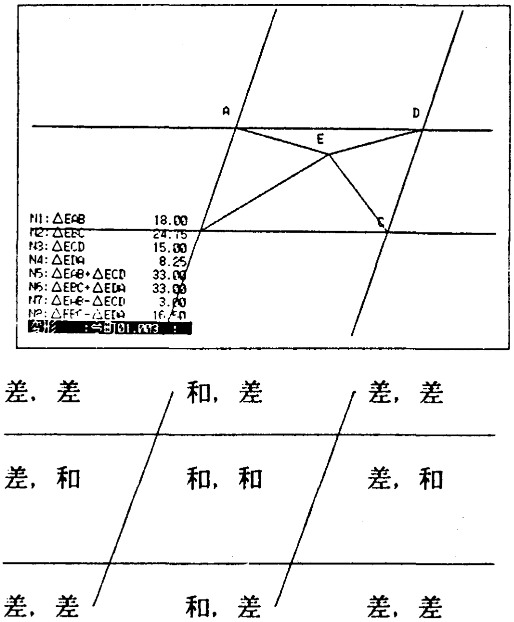


図３　領域への分割とその意味

平行四辺形について一応の結果を得たので，他のいろいろな四角形について調べてみることにした。最初に調べたのは台形である。次のような問題文が考えられる。

問題６

AD // BCの台形ABCDの中に点Ｅをとり，EA, EB, EC, EDを結ぶ。Ｅの位置を四角形の外部まで動かしたときにΔEAB, ΔECD; ΔEBC, ΔEDA の変化について観察せよ。

すると，

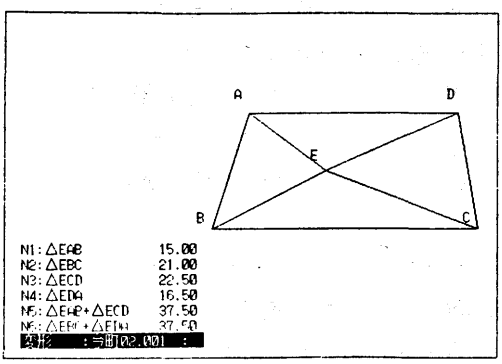


図４　台形の場合

水平に動かす　ΔEBC, ΔEDA は変わらない。
　　　　　　　ΔEAB+ΔECD, ΔEBC+ΔEDA は変わらない。
垂直に動かす　すべて変化する

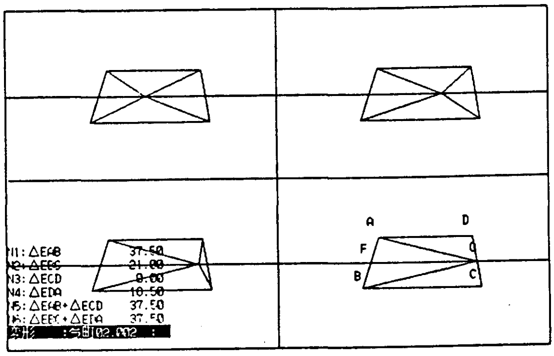


図５　補助線の追加

ということが分かる。そして，

ΔEAB ＋ΔECD ＝ΔEBC ＋ΔEDA

となるのは，ADとBCに平行で中間になる直線上になる。例えば，ABとCDのそれぞれの中点F, G を結んだ直線上ということになる。

さらに，より一般の場合について調べてみることにした。つまり，

問題７

四角形ABCDの中に点Ｅをとり，EA, EB, EC, EDを結ぶ。Ｅの位置を四角形の外部まで動かしたときにΔEAB, ΔECD, ΔEBC, ΔＥＤＡの変化について観察せよ。

予想としては，一般の四角形では，せいぜい一点のみで，この関係が成立するのではないかと思っていた。

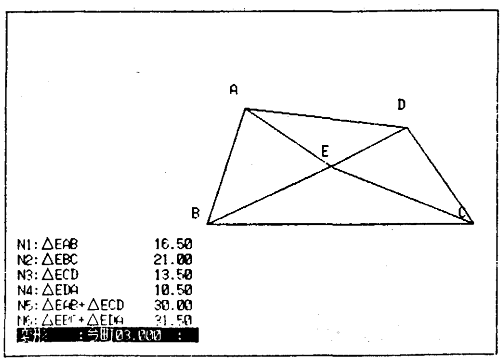


図６　一般の四角形

実際，台形のときの直線上でも等しくなくなっている。これは台形のとき，縦に同様の直線を作ってもその直線上ではうまくいかないことを考えると当然の結果であった。

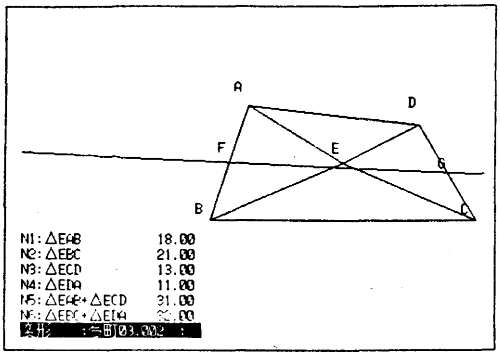


図７　一般の四角形での横の直線

そのため，次の問題は，この「一点」の発見であった。つまり，

問題８

四角形ABCDの中に点Ｅをとり，EA, EB, EC EDを結ぶ。

ΔEAB ＋ΔECD ＝ΔEBC ＋ΔEDA

となるＥの位置はどこか

平行四辺形のときの結果と台形のときの結果を踏まえると，

平行四辺形　：四角形内部（平面）

台形　　　　：平行線の中間の直線（直線）

一般の四角形：どこかの一点（？）

という予想が立ち，これが包含関係になっているとすれば，台形のときの直線のある一点だろうと考えられた。

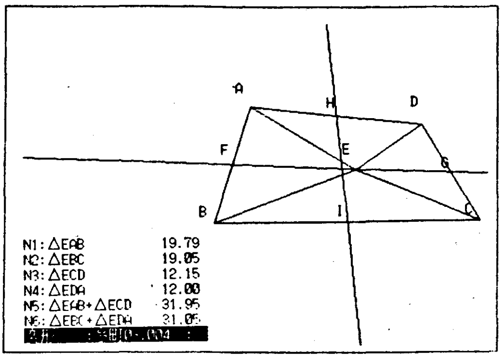


図８　２つの直線

そのような直線は二つ考えられるのであるから，対辺の中点同士を結んだ直線の交点が候補として考えられた。これはいわば四角形の重心である。

実際，測定値はその推測が正しいことを裏付けている。

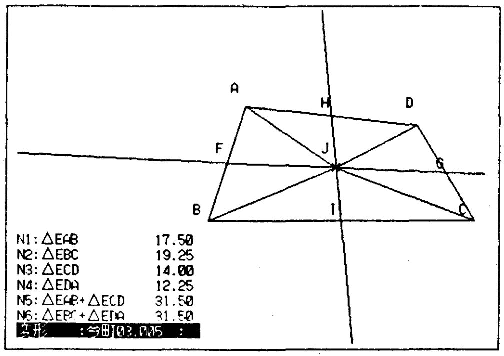


図９　二つの直線の交点での測定結果

流れとしては，当然これを証明することとなる。つまり，

問題９

四角形ABCDのAB, BC, CD, DA の各中点をE, F, G, H とし，EGとFHの交点をM とする。このとき

ΔMAB ＋ΔMCD ＝ΔMBC ＋ΔMDA

となることを証明せよ。

しかし，5分ほど考えたが，分からなかった。

あまり進展しないのと，測定結果からは明らかそうに思えることなので，あまり動機づけにもならなかったため，もう少し調べてみることの方を先にすることにした。つまり，これらの関係の分布を調べることにした。

平行四辺形のときには，

差，差	和，差	差，差
差，和	和，和	差，和
差，差	和，差	差，差

という分布があった。このときは三角形の和と差のどちらが不変になるかという関係の追

究であったが，同様のことを△ＭＡＢ＋△ＭＣＤと△ＭＢＣ＋△ＭＤＡの関係について調べてみてはどうかと思った。四角形の内部のみを考えると，平行四辺形の場合，

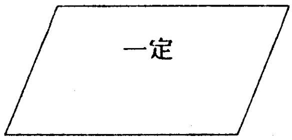


図10　平行四辺形の場合

となっている。台形の場合には，

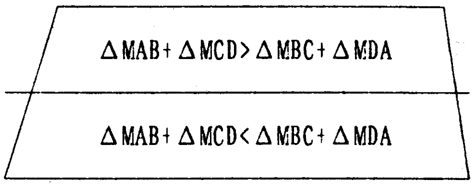


図11　台形の場合

直線上で△MAB+△MCD=△MBC+△MDA

となっている。

同様のことを一般の四角形について考えてみると，

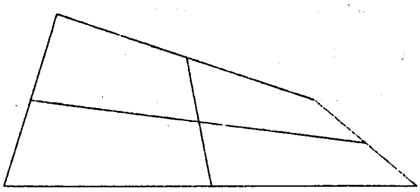


図12　一般の四角形の場合

この４つの領域に適当に＜＞が分布し，ただ一つの特別な点として，交点を捉えることができるのではないかと考えた。

次の課題は，それを裏付けることである。

しかし，実際にＥをいろいろな点に動かしてみると，どうも事情が違うのである。

△MAB　＋△MCD，△MBD　＋△MDA　という二つの数値を観察していると分かりにくいので，

△MAB　＋△MCD　－△MBD　－△MDA

という数式を作り，その符号を観察しながら調べることにしたのだが，領域によっては，＋，－がはっきりしているのだが，そうでないところもあるのである。これは予想外のことであった。もし，＋－が逆転しているのが本当ならば，両者が等しい点も見つかってしまうからだ。

問題10

四角形ABCDの中に点Ｅをとり，EA，EB，EC，EDを結ぶ。

△EAB　＋△ECD　＝△EBC　＋△EDA

となるＥはＭ以外にもあるらしい。

どこか。

その結果，次のような点を見つけた。

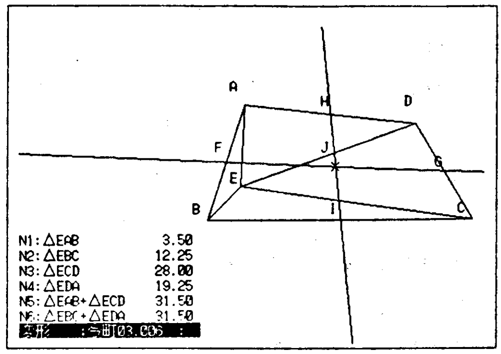


図13　和が等しくなる点の発見（１）

問題11

この点はどのような点か。まだ他にもあるのか。

他にも見つかった。

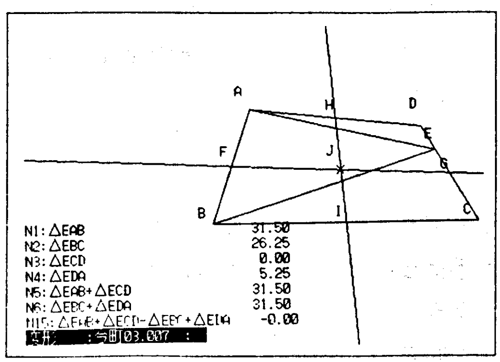


図14　和が等しくなる点の発見（２）

この２点を通る直線上の点があやしい。近似的でしかないのだが，両方の点に重なりそうな２つの点を新しく作り，それを通る直線を作り，その直線上に重ねてみた。

どうもこの直線上では両者が等しくなりそ

うである。

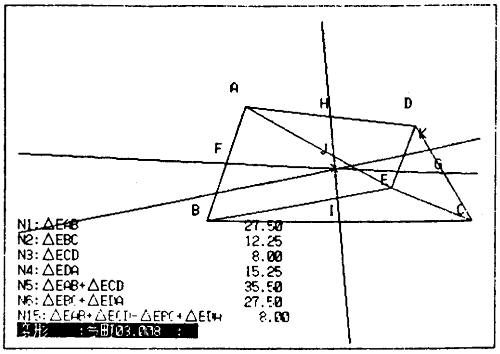


図15　２つの点を通る直線

問題12
これはどんな直線なのか

しかし，この直線の正体が分からない。なにしろ，適当に調べていたら見つかったという程度の点である。分かることは，重心を通るらしい。ということだけだ。もう一点が見つかればいい。頼りになるのは辺である。この場合の辺の上の点に注目したが，

事実13
四角形を変えるとこの辺の上は通らない

ことが分かった。どうも考えても無駄のようだ。そこで直線の性質を考えてみた。

問題14
四角形の面積を２等分する直線として特徴づけできないか。

しかし，考えてみると，重心を通る直線はすべて面積を２等分してしまうはずである。何か手はないだろうか。そう，簡単な場合を考えよう。

問題15
似た問題はないか。

四角形を三角形にしたらどうなのか。そこで思い出したのは，松沢先生が上教大附属中の本の中で扱っていた問題であった。つまり，

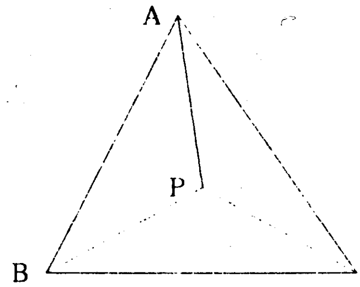


図16　松沢先生の問題

で，ΔＰＡＢ＝ΔＰＢＣ＝ΔＰＣＡとなる点Ｐの位置を求めようという問題である。三角形の内部の場合はＰは重心となるわけだが，この中で，ΔＰＡＢ＝ΔＰＢＣという条件のみを考えると，Ｐが中線上にあればいいことがわかる。

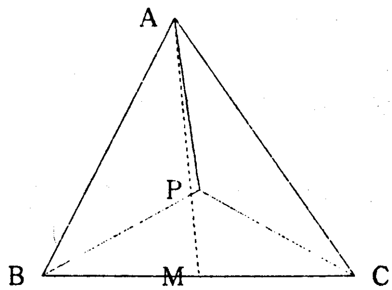


図17　ΔＰＡＢ＝ΔＰＢＣとなる点

これは使えないだろうか。台形にしてみた。

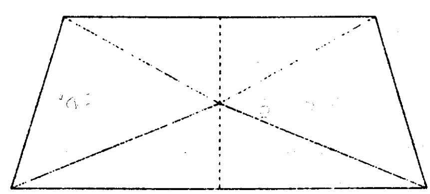


図18　台形への一般化

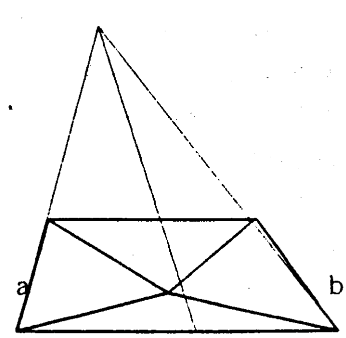


図19　　b　　　　a

左右に等しい三角形を作ることはできそうだ。平行でない場合には使えないだろうか。のばして三角形にしたらどうだろう。

太線部がまずあったとしたら，対辺の長さを元にして，底辺をb：aに分けておけば，ここを通り，延長した直線の交点を通る直線上にPをもっていけば両方の三角形は面積が等しくなる。

ここまで一般化したのは良かったのだが，元の問題にかえって考えてみると，両方の和を考えようとしているのだから，ここでは使えないことが明らかになってしまった。

どう生かせるかはまた後で考えることにして，中線を生かせないかどうかに絞って考えることにした。つまり，まず考えている四角形の中で，同様の部分を考えると，

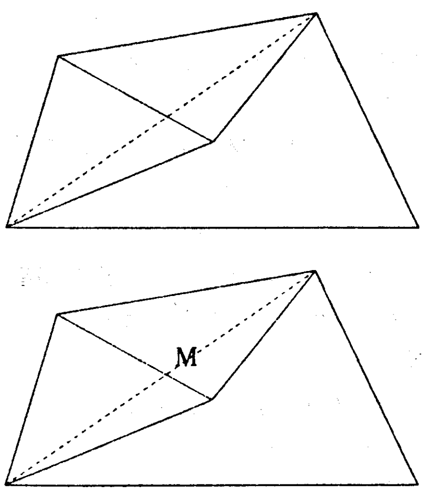


図20　中線

BDの中点Mを考えると，PがAM上にあれば，ΔPAB＝PADとなるのである。対角線に対して反対側にある二つの三角形についても同じだから，対角線の中点Mは，この関係を満たす点の一つなのである。

そして，半直線AM：ΔPAB＝ΔPAD

半直線CM：ΔPCB＝ΔPCD

として，特徴づけることができ，両方を成立させる点として，対角線の中点を特徴づけることができた。

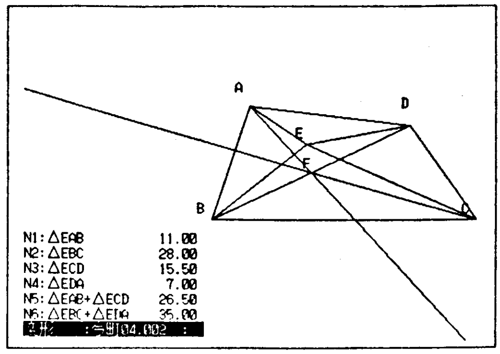


図21　2つの中線と対角線の中点

しかし，対角線は2つある。もう一つの対角線ACとその中点Nを考えると，

半直線BM：ΔPBA＝ΔPDC

半直線DM：ΔPDA＝ΔPDC

として，特徴づけることができ，両方を成立させる点として，対角線の中点を特徴づけることができた。

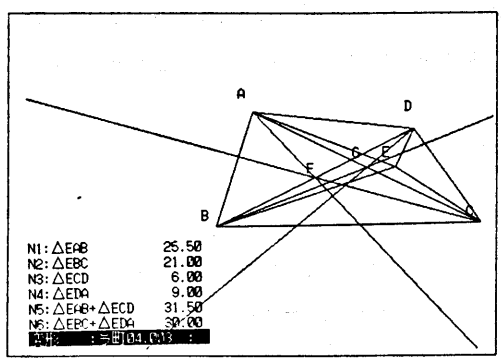


図22　2つの対角線の中点を結ぶ

ここで，条件を満たす二つの点が見つかった。これによって，候補となる直線を作ることができたのである。

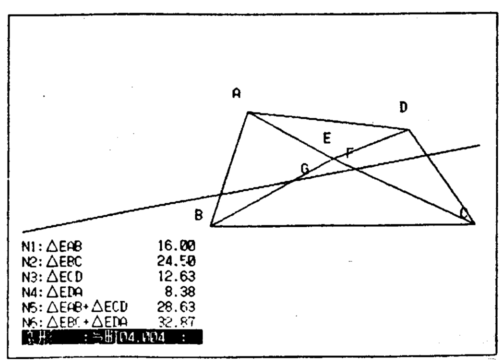


図23　2点を通る直線

推測16

対角線のそれぞれの中点をM，Nとするとき，直線MN上で成立する

そこで，次のような図を作り，直線MN上に点Pを制限してみたところ，この直線上では関係が成立することがほぼ裏付けられた。

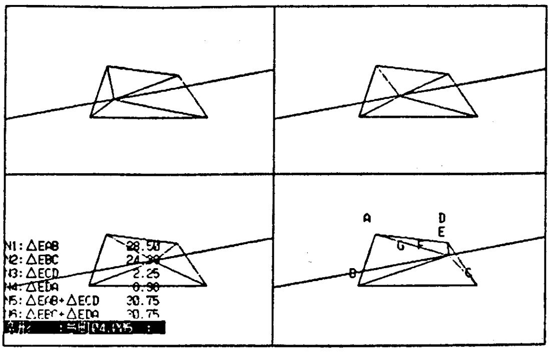


図24　直線上の点を動かして確認

証明することが次の課題のようにも思えたが，その前に，特殊な図形のことを振り返ってみることにした。

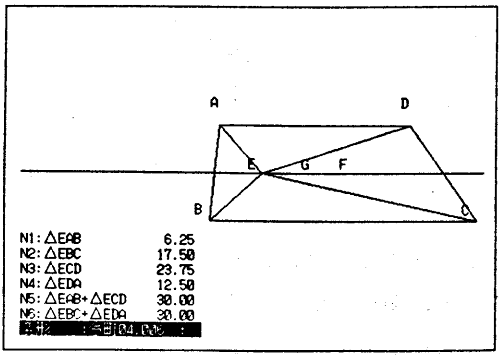


図25　台形の場合

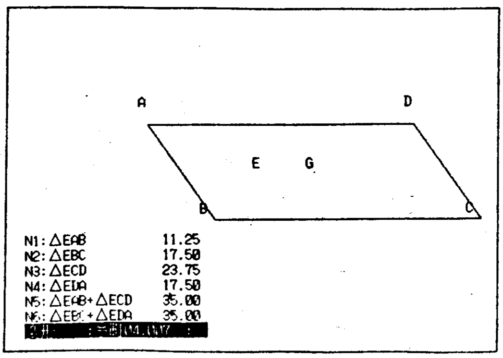


図26　平行四辺形の場合

すると，台形の場合は，M，NがAD，BCに平行になるため，台形のときに注目していた直線はMNが特殊な位置になった場合であった。

平行四辺形の場合は，M＝Nとなってしまう。そのため，MNを結ぶ直線はない。この問題の場合は，「ない」というよりも，すべての直線で成立すると考えた方がよいようだ。

最後に，この証明を考えることにした。まず，問題は，次のようになる。

問題17

四角形ABCDの対角線のそれぞれの中点をM,N とするとき，直線MN上に点Eをとる。EA, EB, EC, ED を結ぶ。

$\Delta EAB + \Delta ECD = \Delta EBC + \Delta EDA$

となることを証明せよ。

難しいので，次の補助問題を考えた。

問題18

問題17において，E＝Mの場合について証明せよ。

これは明らかだ。それぞれの三角形の面積が等しいため，両者を加えたものは等しい。

問題19

M，Nという2点の存在を使えないか。

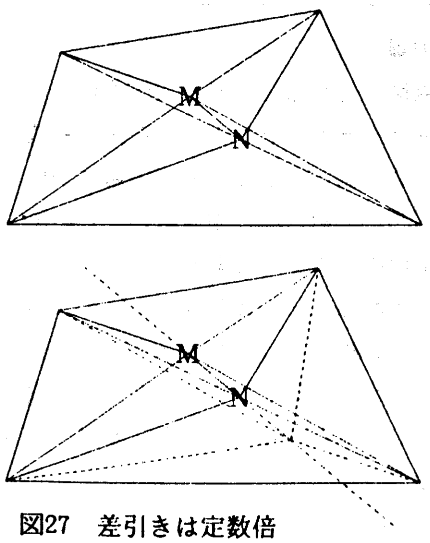


図27　差引きは定数倍

このときの差引きを考えると，左図の定数倍として右の差し引きが考えられるため，一般の場合にも証明できることが分かった。

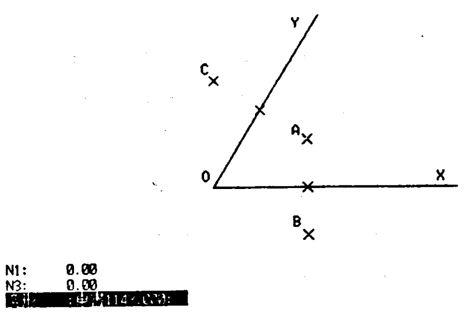
また，もう一つの考えとしては，任意の直線上での$\Delta+\Delta-\Delta-\Delta$によって定義される関数が一次関数になることが証明できれば証明できそうなことが分かった。

2．松沢先生の問題に関連する問題例

松沢先生にお願いしたときには，「変換」，「移動」などを自然に扱える問題の探究ができないかという提案をした。

次の問題を考えてみよう。

∠XOY の内部に点A があります。辺OX,OY についてA と対象な点をそれぞれB,C とします。∠XOY=25° のとき，∠BOC は何度になりますか。（東書，中1,p.148）



角度の計算だけでこの問題は解ける。図を静的に分析すれば解ける。しかし，Geometric Constructor を使って図を動かすといろいろな追究が可能であり，その中で，自然に変換や移動の概念を使う問題になる。それを，次のような形で提案した。なお，実際には，図は印刷せず，ファイルのままで提案した。また，次の文書は，まとめて印刷した形にもしたが，Geometric Constructor の環境内で，F5キーを押すことによる文書参照によっても参照可能になっている。

―――――― 問題1.DOC ――――――

∠XOYと点Pがあります。今，OXに関してPと線対称な点をQとし，OYに関してQと線対称な点をRとします。

(1) Pを動かしてみましょう。
どんなことに気がつきますか。

(2) Yを動かしてみましょう。
どんなことに気がつきますか。

(3) Oを動かしてみましょう。
どんなことに気がつきますか。

自分なりの追究が終わったら，それぞれ，解決11，解説12，解決13を見てください。

―――――― 問題2.DOC ――――――

「松沢01.011」を選択していますか。

さて，この図で，Pを動かしてみましょう。どんなことに気がつきますか。

特に，PとQの場合，QとRの場合は似ているのに，PとRでは異なってしまうことがあると思うのですが，どうでしょう。

自分なりの理由が見つかったら，「解決2」を見てください。

―――――― 問題3.DOC ――――――

Pを動かしたときの軌跡について，いくつかのことが今までに分かってきました。

Pが上下，左右に動いたときの様子を知ることができました。しかし，それ以外のときのことは，まだよく分からないままです。

そこで次のことについて調べてみましょう。

(1) Pがある直線上を動くとき，Q,Rの軌跡はどうなるか。

(2) Pがある円上を動くとき，Q,Rの軌跡はどうなるか。

このそれぞれについて，「松沢01.041」と「松沢01.051」で調べてみましょう。

調べて自分なりの考えが持ててから，「解決3」を読んでください。

―――――― 解決11.DOC ――――――

Pを動かしたときに気がつくこと。

Pを動かしたときに，QとRの動きに注目すると，面白いことが分かります。

(1) Qの軌跡は，Pの軌跡と線対称になる。
もっとも，これは当たり前ですね。

(2) Rの軌跡は，Qの軌跡と線対称。
これも当たり前ですね。
(3) Rの軌跡は，Pの軌跡を回転したものになる。
どうしてでしょう。
「松沢01.011」を見てください。
そして，「問題2」を見てください。

解決12.DOC

どんなことに気がつきましたか。次のことを見つけたのではないでしょうか。
(1) Qの位置は変わらない。
まあ，これは当たり前ですね。
(2) Rの位置が円を描いているようだ。
どうしてでしょう。
解決11の場合と同様に，今度も，「松沢01.011」を使って考えてみると分かりやすいと思います。

解決13.DOC

今度はどんなことに気づいたでしょう。
まず0を横に動かした場合を考えましょう。
このときは，
(1) Qの位置は変わりません。
(2) Rの位置は円を描いているようです。
どんな円なのでしょうか。
候補となるような円を自分なりに書き加えて考えてみるといいと思います。
「松沢01.021」を見てください。
そして，解決14を見てください。

解決14.DOC

どうですか。そう，Rの軌跡は，Yを中心として，Rを通る円になっています。
どうしてでしょう。まだ私には分かりません。きっと松沢先生が教えてくれると思います。しかし，もしかしたら，3年生の知識を使わないと無理なのかもしれません。
さて，0を上下に動かすと，どんなことが起こるでしょうか。
まず，「松沢01.002」に戻ってから調べてみましょう。それから必要があれば，「松沢01.021」を使っても構いません。
自分なりの結果が出てから，「解決15」を見てください。

解決15.DOC

Qの軌跡の方は，どうも円になりそうです。
どんな円でしょうか。補助線を入れて確かめてみましょう。
補助線の円を書き込んだ図は「松沢01.031」に保存しています。
さて，Rの方はどんな軌跡になるでしょう。これは変わった曲線になりますね。私にもどういう性質を持つ曲線なのかは分かりません。しかし，軌跡を精密に描くことにより，どんな形の曲線になるかを知ることはできます。

解決2.DOC

次のことに気がつくのではないでしょうか。
(1) ∠POQは変わる。
(2) ∠QORも変わる。
(3) なのに，∠PORは変わらない。
もっと詳しく考えると，
(4) ∠POR = 2 ∠XOY
どういうことを意味しているのでしょう。
一つの解釈は，こういうことです。つまり，点Pのみが動いているとき，X,O,Yは変わらないので，∠PORは一定。つまり，Rは，常に，PをOを中心に，2∠XOYだけ回転したことになっているわけです。
もっと追究するためには，Pの位置をいろいろと変えてみてください。

解決3.DOC

どうでしょう。
「松沢01.041」では，直線上をPを動かしてみると，軌跡としての直線が3つできたのではないでしょうか。
これらはどんな関係にあるのでしょう。
「松沢01.051」では，円上をPを動かしてみると，軌跡としての円が3つできたのではないでしょうか。
これらはどんな関係にあるのでしょう。
また，I,Jという点で，直線や円が決まっていますから，これらの点を動かすことによ

って，元になっている直線や円を変化させ，やはり変わったことが起こるかどうか調べてみましょう。

動かし方がよく分からないときには，「松沢01.042」や「松沢01.052」を使ってみてください。

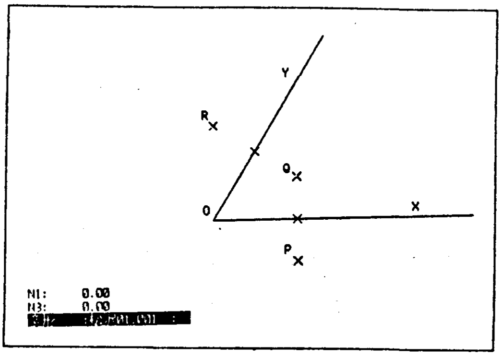


図28「松沢01.001」

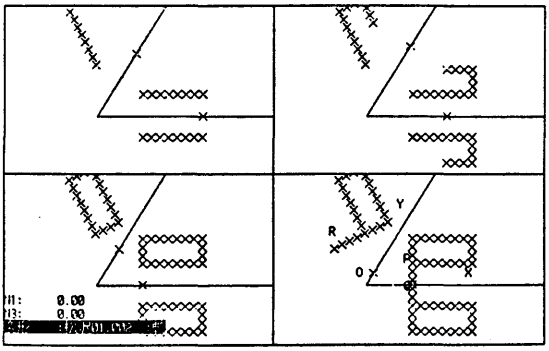


図29「松沢01.002」のPを動かす

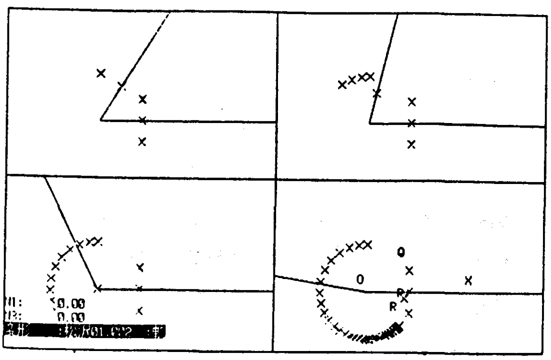


図30「松沢01.002」のYを動かす

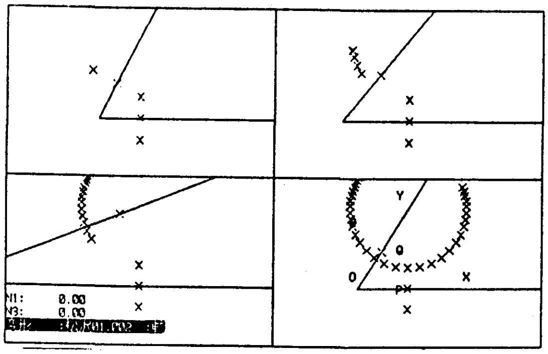


図31「松沢01.002」のOを左右に動かす

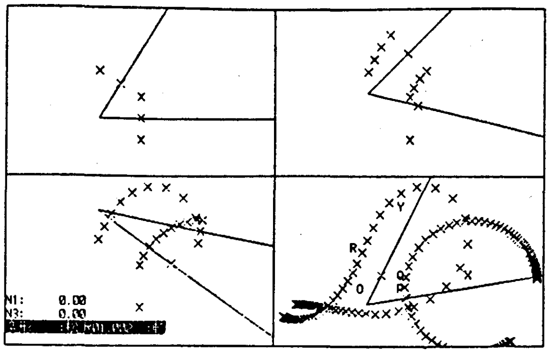


図32「松沢01.002」のOを上下に動かす

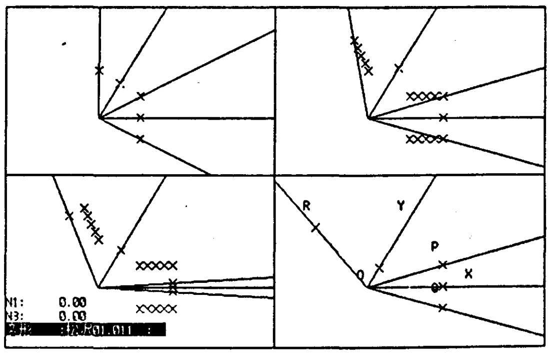


図33「松沢01.011」のPを動かす

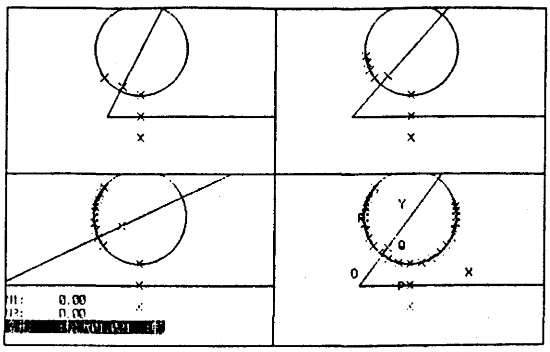


図34「松沢01.021」のOを左右に動かす

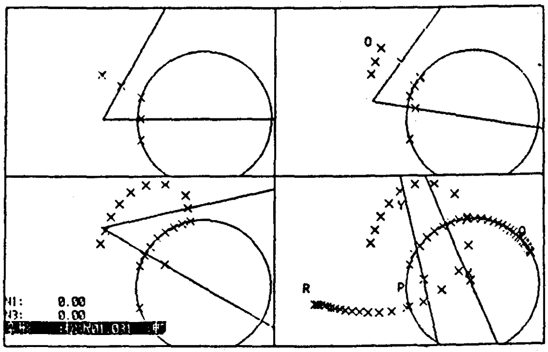


図35「松沢01.031」のＯを上下に動かす

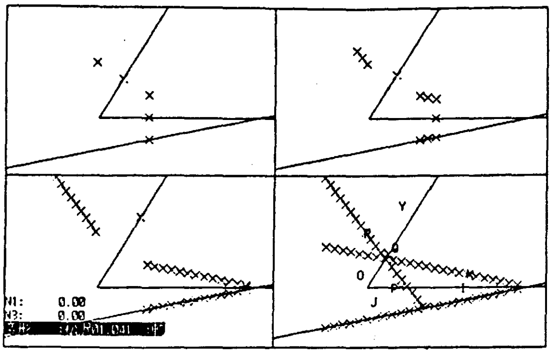


図36「松沢01.041」でＰを動かす

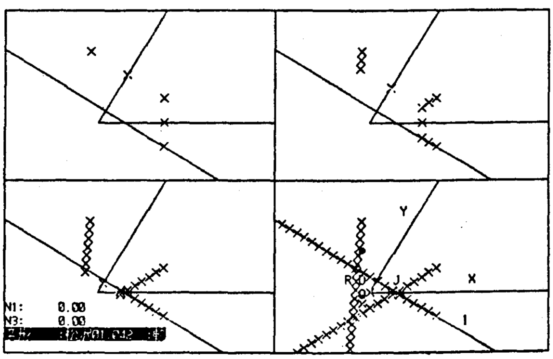


図37「松沢01.042」でＰを動かす

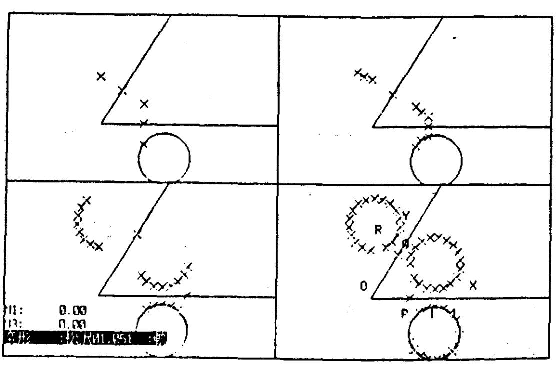


図38「松沢01.051」でＰを動かす

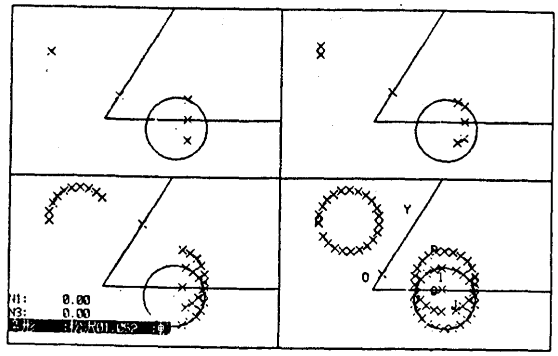


図39「松沢01.052」でＰを動かす

3．おわりに

従来の道具を新しい道具（作図ツール等）に変えることによって，探究の様相が大きくかわる。その様相を明らかにすることが大きな研究課題となるが，その基礎資料作成の一つである「探究過程の記録」を収集する際にも，新しい道具をどう使ったがよく分かるようにするため，そして複数の人が記録し，複数の人が利用できるようにするためには，適切な記録の仕方を考案することが必要になる。また，生徒の学習を支援する教材作成においても，これまでとは異なった形式でのワークシートの作成，あるいはソフトという環境下での参照可能な資料の作成などを考案することが必要になる。

本稿では，探究の記録という形式によって記述したものと，問題例という形式によって記述したものとをそれぞれ一つずつ提示した。共同研究の中での今町先生，松沢先生とのやりとりをそのまま提示したものであり，今後再検討するためのたたき台という性格が強い。より適切な形式を検討しながら，資料の収集を蓄積していくことが今後の課題として残っている。また，今回は，これらの記録等を分析することはできなかった。それらを分析しながら，探究の様相を明らかにし，作図ツールに適した学習過程を明らかにすることも今後の課題である。