数学教育研究, 第 9 号, 上越教育大学, 1994 年, pp.33–42

「メタ知識」の意味

岩崎　浩

1. 緒論

なぜ数学を学べない生徒が多いのか—。これは数学教育上かなり古く、最も基本的な問題である。この問題に対するこれまでの対処の仕方として、例えば、カリキュラム上では、現代化の反省としての内容の軽減、また、実際に教師が指導する場面では、より丁寧な説明、より簡単な内容への置き換えなどが挙げられる。すなわち、この問題に対してこれまで講じられた対処の仕方には、カリキュラム上でも、実際の指導上でも、主に知識の程度の問題に向けられる傾向があることは否定できない事実である。

知識は適切な文脈に置かれたときにはじめて学習される。いくら簡単な内容でも、生徒たちは、自分に関係のないものと考えれば学ばないであろうし、逆に、自分に関係のあること、あるいは、興味のあることと考えれば、多少数学的に難しい内容であっても学習するであろう。文脈には、かような役割— 学習者の既有の知識や興味・関心に内容を結びつけるという役割— がある。

最近、特に、小学校において、問題解決的な概念の導入が多く見受けられるようになってきたが、学年が進むにつれてこの傾向は減少するように思われる。これは、知識に対する文脈の重要性の認識の程度の反映であるとも考えられる。

知識に対する文脈の重要性は、言語は文脈とともに理解されるという言語学での常識に通じる認識であり、あまり目新しいことではないかもしれない。しかし、この常識の重要性が、少なくとも日本の数学教育において十分に基礎づけられてこなかったことに、つまり、なぜ、問題解決の文脈で概念を指導することが大切であるのかが十分に考え尽くされてこなかったことに1つの原因があるとも考えられる。

1969 年に、アメリカの教育学者スミス (Smith, B.O.) は、教育一般の立場から、一般の大衆への学問志向 (知識中心) の教育を批判し、教材を生徒のニーズに応じて指導するためには当該の知識だけでなく、それについての知識、すなわち、「知識についての知識 (knowledge about knowledge)」が必要であると主張した [Smith,B.O.,1969]。これは、その知識を詳細に知っていることと、その知識を教師がどのように捉えているかは別であるという主張である。この主張は、前者の知識に対して、後者を知識についての知識として、些か暗黙的な性格をもつ後者に、知識の地位を与えることで顕在化し、教師が教材構成、授業実践において当該知識を調整する上で果たす暗黙的認識の役割の重要性を明確に指摘したものとして注目される。

さらに、旧西ドイツの IDM の研究者たちは、この区別に着目し、「知識についての知識」の概念を精緻化し、「メタ知識 (Metawissen)」という用語を導入した。なかでもオッテ (Otte,M.) とブロンメ (Bromme, R.) は、メタ知識を概念習得上の問題へと関連づけ、次のように述べている。

> 人は知識と知識についての知識 (メタ知識) を常に同時に獲得する。[Otte, M. / Bromme, R. ,1978, S.167]

ここには、「常に同時に獲得する」とドイツ語の現在形が用いられており、それは1つの法則を表現したものであると考えることができる。[平林,1990,106頁] より明確にいえば、知識はメタ知識とともに獲得されねばならないということである。

すなわち、教師が学問的な知識だけを問題にし、メタ知識を問題にしなければ、子どもたちは適切な学習ができないとまでいっているのである。

このように、メタ知識は冒頭で述べた学習上の問題を基礎づけるためのキー概念であると考えられる。

一方、メタ知識はさまざまな文脈で論じられている。例えば、オッテ (Otte,M.) らは、概念習得の問題の文脈において「科学的概念の論理的位置づけのための知識 (Wissen zum logischen Status des theoretischen Begriffs) [Otte/Brome, 1978, S.191]、また、同じ様な表現であるが、シュープリング (Schubring,G.) は、数学史の新しい意義に言及しながら、「知識の論理的位置づけについての知識 (Wissen über dem logischen Status des Wissens) [Schubring, 1978, S.217]、あるいは、知識の本質 (Natur) と表現している。また、カイテル (Keitel,C.) らは、教師教育の文脈で、教師の持つべきメタ知識として「知識の成立と有効性についての知識」[Keitel/Otte, 1979, S.170] と表現する。ゼーガー (Seeger,F.) らも教師教育の文脈で、「知識の、投入可能性 (Einsatzmöglichkeiten)、応用 (Anwendung)、意義 (Bedeutung)、有効範囲 (Tragweite)、陳述力 (Aussagekraft) についての位置づけ (Orientierungen)」を挙げている [Seeger/Steinbring, 1986, S.13]。

しかし、メタ知識に関わる主張は主に理念的なレベルでのみ述べられるので具体性に欠ける。つまり、これらには、具体的に、メタ知識とは何で、それがどのような場面で、どのような役割を果たすのかということが明確ではなく、したがって、数学教育の実践に反映させるには抽象的すぎるということが指摘できる。

本稿の目的は、メタ知識とは何を意味するのかを具体的に明らかにすることである。これには、メタ知識がどのような経緯で問題にされてきたのかという歴史的背景ともに、メタ知識によって何らかの新しい可能性、あるいは見通しを示すことをも含んでいるであろう。

以下で、メタ知識の思想を歴史的な経緯にそって再構成する。次いで、メタ知識の一つの例を提出し、検討を加える。

2. メタ知識の歴史的背景

2.-1 「知識についての知識」の台頭

前述したように、メタ知識の起源は、アメリカの教育学者 スミス (Smith, 1969) の知識と知識についての知識の区別に求めることができる [IDM, 1981]。ドイツの IDM(数学教育学研究所) のメンバーの1人であるシュープリング [Schubring, 1991] によると、これは、1960年代のアメリカのカリキュラム改革に関する議論に由来しているということである。もう少し正確にいうと、大規模なカリキュラムプロジェクト、とりわけ、数学プロジェクトの失敗の結果であり、その主たる原因は、その根底にあるパラダイムにある。

> そのカリキュラムの教材開発の仮定は、専門科学の専門家をプロジェクトに入れることで十分であり、それゆえに、できるだけ事実にそくして展開された教材を作成することで十分であるということであった。生徒は、その教材によって——教師の内容に関する役目の排除の下に、直接達せられるべきであった。教師は、授業の計画者及び組織者としてのみ考慮されていた。いわゆる、教師を通さないカリキュラム、教師の質や教師の知識に依存しない教育改革に伴う「耐教師」カリキュラムのパラダイムがうまくいくはずであった。
>
> このパラダイムの失敗は、次のことを示し

た。すなわち、教師を避けては通れないということ、そして、教師は、教育改革の主役であるということである。その際、次のことも明らかである。すなわち、教育改革は、単に、古い内容を新しく変えることによっては行われえないということ、そして、知識についての教師の理解 (das Verhältnis des Lehrers zum Wissen)、知識についての教師の見方 (seine Auffassungen über das Wissen) が中心的問題であるということである。つまり：教師教育は、素材に関してではなく、専門化（：内容的な知識を職業上の行為知識 (beruflichem Handlungswissen) に結びつけること）のさらなる発展という意味で改善されねばならない。したがって、カリキュラム改革の主要な結論は、知識と一緒に仲介される知識についての見方が、教師の行為に中心的に影響を及ぼすということである。[Schubring, 1991, S.7]

ここで出てくる知識についての教師の見方というのが、スミスのいう「知識についての知識」に関連する。

「知識についての知識」という言葉は、哲学的問題を連想させるが、実はそうではない。その根底にある思想は、彼の著書のタイトル『実世界のための教師』からもわかるように、非常に現実的な問題意識と深く関係している。

郊外地域 (suburbia) の子どもたちを教えるために、教師は、スラブの子どもを教えるときに要求されるのと、本質的に同じ教材が必要である。子どもがどこの出身であろうと、あるいは、どんな環境であろうと、一個人は、技術社会や都会で、そして科学的な知識、社会的そして政治的な理解、多様な技能や社会的技術を要求する社会で、どのように暮らしていけばよいかを学ばなければならない。—少なくとも学習し続ける必要がある。裕福な子どもたちを相手にしている教師 (teachers of the affluent) は、貧しい子どもたちを相手にしている教師 (teachers of poor) ほど広範な経験、知識を必要としない。ハンディのある子どもたちを相手にしている教師 (teachers of the disadvantaged) が準備する教材を詳しく述べれば、全ての教師が準備する必要のある教材を指摘することになる。[Smith, 1969, p.111]

この引用からは、ハンディのある子どもたちを相手にしている教師の知識の量的な豊かさが強調されているかにみえる。しかし、それは結果的なことであって、教師の知識の質の重要性が強調されているとみた方が、「知識についての知識」の必要性を説くスミスの主張は首尾一貫すると思われる。「知識についての知識」は、教師が学問的な知識を、その本質を保って子どものニーズ等に合うように指導するために、その知識をコントロールする知識を指していると考えられるからである。

経験的にわれわれは、本当にわかっている人、その本質をつかんでいる人の話は、首尾一貫していて分かりやすいと思うことがあるであろう。その理由は、その人が相手に応じて、その内容（知識）をコントロールしているからであると考えることができる。そのとき、その人は、その内容以外にいったい何を知っているのであろうか。おそらく、このような問題意識に対するスミスの回答が「知識についての知識」であったと考えられる。

重要なことは、このような知識は、ある特定の子どもを相手にしている教師にのみ必要であるのではなく、全ての教師に必要であると述べている点である。

スミスが、教師に必要な知識として挙げているものは、学問的背景 (数学教師の場合は数学、教育学、教授学、心理学の基本的な知識)、教材的内容 (教師の行為の中に直接含まれるもの)、というようにまとめて表現できる [拙稿, 1992] が、氏は、これらとは区別して「知識についての知識」を位置づけ、その重要性を次のように述べている。

ようやく最近になって次のことが認められてきた。すなわち、教師の教授活動において、教師に影響を及ぼしうる別の種類の知識が存在するということである。その知識は、教科内容について考えたり、教科内容

を論理的に操作する助けとして必要である。[Smith, 1969, p.125]

2.–3 知識についての知識からメタ知識へ

アメリカの大規模なカリキュラムプロジェクトの失敗という歴史的反省から生まれた認識、「教師の知識についての見方」が教師の教授行為に中心的に影響を及ぼすということの認識は、教師教育にとって重要な第一歩であった。とりわけ、「知識についての知識」としてのその特徴づけは、教師の行為を調整しているかような暗黙的な知識の存在を指摘するだけではなく、それを教師教育の顕在的な対象にしようという試みであったという意味で評価できる。

しかし、スミスは、知識の社会的意義を、その必要性の説明、つまり、なぜ生徒たちはこれらの知識を学ばなければならないかの説明にしか定義していないとシュープリングは指摘している [Schubring, 1991, S.8]。つまり、シュープリングによれば、スミスは、知識の社会的重要性:「教材の関連性や応用についての知識」については十分に認識していたが、なぜ生徒たちはこれらの知識（例えば、数学）を学ばなければならないかという生徒の質問に対するその知識の正当化しかしていないということである。

スミスは、教育学一般の立場から、教師の「知識についての知識」を述べているので、教材の本質的な部分に関わること以外のことも、「知識についての知識」として位置づけている。例えば、教材と生徒のニーズとの関係、教材の社会的「中立」の程度 (その教材が社会の特殊性に関係なくどの程度子どもたちに通用するか) などは、教師がどのような子どもたちを相手にするかによって決まることである。

勿論、これらの見方は大切であるが、それは、子どもを一番よく知っている各教師に委ねるより他はない。「知識についての知識」を教師に必要不可欠な知識の１つとして、より一般的に論じるのであれば、むしろ、教材を子どものニーズに関係させるための、より根源にある認識はいったい何かということの方が本質的である。これは教材の本質に関わる。シュープリングを含めて、ドイツ IDM の研究者たちも、「知識についての知識」のより重要な部分は、教材と直接関わる部分であるとみている。このような認識が、スミスから、つまり、教育学、教授学一般の議論から出てくるのは難しかったであろう。なぜなら、教材そのものに関わるからである。

それでは、それは一体何を指しているのであろうか。シュープリングは言う。

> 教師は、仲介しようと思っている概念や理論を単に詳細に知るだけではなく、科学的概念の本質についてのなにか、あるいは、理論的対象としての概念の性格のこともなにか知るべきである。[Schubring, 1991, S.8]

氏は、これが「メタ知識 (知識についての知識) が仲介されるべき唯一の科学-理論的立場である (括弧内挿入筆者)」[Schubring, 1991, S.8] と述べている。つまり、この立場が「知識についての知識」を科学-理論的に取り上げていくための唯一の立場であるということである。換言すれば、「知識についての知識」のこのような認識論的な側面だけが数学教育学にとって本質的であるということである。「教師は知識を抽象的に知識として教えないし、知識は社会的重要性をもっている」[Schubring, 1991, S.8] というのがその理由である。

スミスの「知識についての知識」は、このように IDM の研究者たちによって認識論的な立場から見直され、数学教育学の専門用語「メタ知識」として導入される。緒言で述べたように、この立場は、IDM の研究者オッテら (Otte, M., Bromme, R., 1978) の「人は知識と知識についての知識 (メタ知識) を常に同時に獲得する。[Otte/Bromme, 1978, S.167] という言葉に集約することができるように思われる。既に述べたように、この言葉

は、知識はメタ知識とともに獲得されねばならないという認識論的な位置づけと、教師が知識だけではなく、メタ知識も考慮しなければ、子どもたちは適切な学習ができないという教授学的位置づけとをもっている。

要約すれば、教師が知識をコントロールするために必要であるとして意識されてきた暗黙的な知識としての「知識についての知識」の認識論的な部分、つまり、数学教育学の対象として重要な位置を占めるメタ知識は、教師のみならず、実は、学習者にとっても、程度の差こそあれ、本質的に、持つべき知識であるということである。

3. メタ知識の例による検討

これまでの考察によって、メタ知識の歴史的背景とともにメタ知識の存在の重要性と、そのいくつかの性質がある程度明らかになってきた。しかし、まだ、メタ知識の存在を具体的に示すことが、前節での１つの帰結であるメタ知識の認識論的側面からの位置づけの問題とともに残されている。

これらのことは、メタ知識の例を提出することと、その例を通して上述のオッテらの教授学的忠告：「人は知識と知識についての知識 (メタ知識) を常に同時に獲得する」の意味を明らかにすることによって解決されなければならない。

この解決の本質的な部分は、IDM の研究者たちによって既になされている (IDM, 1981)。したがって、ここでは、１つの例を通して氏らの解決を検討することが中心とならねばならない。

IDM の研究者たちは、次に挙げる著者と読者とのコミュニケーションの問題に対する１つの回答を提示する中で、メタ知識の認識論的側面からの位置づけ、すなわち、メタ知識が新しい概念の認識にとって必要不可欠であるということを論じている。そこでは、知識とメタ知識の関係がテクストとコンテクストの関係に対比されて論じられるが、それぞれの関係、例えば、コンテクストとメタ知識の関係が明確ではない。これらのことは、ここでの例による検討によって明らかにされるべき問題である。

> あるテクストが著者によって導入された専門用語や概念を含み、そして、それに応じて、あらかじめその意味について著者と読者との間の合意が成立していないときに、このテクストを読者が理解できるということはどのように可能であるのか。定理は、自分で自分自身を解明しない。定理はどのように理解すべきであるかということについて述べない。もしそうなら、学習者が新しい定理を獲得するということは、どのように捉えられるのか。[IDM,1981,S.249–250.]

以下、この問題を、上述の目的のために、例により検討するために、テクストとしてユークリッド原論、特に、次の定義 (第 5 巻, 定義 5) を取り上げることにする。[中村, 1956, 37–38 頁; 1970, 93 頁.]

[定義 A] 第 1 の量と第 3 の量の同数倍が第 2 の量と第 4 の量の同数倍に対して、何倍されようと、同順にとられたとき、それぞれ共に大きいか、共に等しいか、または共に小さいとき、第 1 の量は第 2 の量に対して第 3 の量は第 4 の量に対すると同じ比にあるといわれる。[ユークリッド原論, 1985, 93 頁]

この定義はユードクソスによるものであるといわれている。この定義は現代表記を用いれば次のように表現できる。

[定義 A'] 量の比 $a:b$ と $c:d$ とが相等しいとは、次の条件が成り立つことをいう。すなわち、任意の整数λ,μに対して、

$$\lambda a > \mu b \text{ ならば } \lambda c > \mu d$$
$$\lambda a = \mu b \text{ ならば } \lambda c = \mu d$$
$$\lambda a < \mu b \text{ ならば } \lambda c < \mu d$$

人は、この定義をどのように理解するであろうか。確かに、この定義には、この定義自身をどのように理解すべきかということは述べられていない。われわれはまず、［定義 A'］

の3つの関係式が何を表しているかを知る必要があるであろう。そして、少なくとも、それが正しいことを知る必要があるであろう。

この3つの関係式が比の相等関係を表していることは、定義の記述から明らかである。しかし、それを信じるだけでは、知識として知ったことにはならないであろう。正しいことが確認されねばならない。これは、人があることを知っているとき、それが信念であるか知識であるかを区別する1つの決定的なメルクマールである。知識として知ることを期待するならば、ここでは、この3つの関係式が比の相等関係を正しく表現しているかどうかを確かめる必要がある。

素朴な比の相等関係の定義[1]が既知であるとすれば、今の場合には、この関係と上述の3つの関係式とが同値であることが確かめられねばならない。このことは次のように示される。[白石, 1943, 170–176 頁参照]

> $A : B = C : D \iff \forall p, q$:整数 $pA \gtreqless qB \longrightarrow pC \gtreqless qD$を証明する。
>
> $(\Longrightarrow) A, B$が通約可能であるから、$\exists x > 0; A = mx, B = nx, (m, n$ は整数) とかける。$A : B = C : D$ゆえ、$\exists y > 0; C = my, D = ny$である。
>
> $\forall p, q; pA \gtreqless qB \longrightarrow pC \gtreqless qD$とすれば、$p(mx) \gtreqless q(nx), (pm)x \gtreqless (qn)x$ 故に $pm \gtreqless qn$ である。したがって、$(pm)y \gtreqless (qn)y, p(my) \gtreqless q(ny)$ 故に $pC \gtreqless qD$
>
> $(\Longleftarrow) A, B$が通約可能であるから、$\exists x > 0; A = mx, B = nx, (m, n$ は整数) とかける。今、Cの $1/m$ を yとすれば、$C = my$ である。このとき、$E = ny$とすれば、
>
> $$A : B = C : E \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
>
> $D = E$を示せばよい。$D \neq E$と仮定して矛盾を導く。D, Eのどちらを大きいとしても一般性を失わない。$D > E$とする。$D - E > 0$ ゆえ、$\exists q$:整数; $q(D - E) > C$ すなわち、$qD - qE > C$である。Cを2倍、3倍、$\cdots$としていけば、結局、qEよりも大きくなる。今、Cを p 倍したときに、初めて qEよりも大きくなったとする。
>
> $$pC > qE \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
>
> $qD - qE = e$ とすれば、$e > C$である。p のとり方により、$qE > (p-1)C = pC - C$である。この不等式の左辺に e、右辺に Cを加えても不等式の向きは変わらない。$qE + e > (pC - C) + C, qE + (qD - qE) > pC$ であるから、
>
> $$qD > pC \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$
>
> (1) より、$C : E = A : B$であるから、$pC > qE \longrightarrow pA > qB$ が成り立つ。今、(2) より、$pC > qE$ だから、
>
> $$pA > qB \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$
>
> となる。したがって、(3),(4) により、$pA > qB$と $pC < qD$を同時に満たす整数 p, qが存在することとなり、仮定に矛盾する。ゆえに、$E = D$、つまり、$A : B = C : D$である。

この定義は、例えば、任意の2つの正方形の一辺と対角線との比が等しいことを証明するのに、実にうまく使えるが、ここでは紙面の都合で省略する [例えば、白石, 1943, 175-6 頁参照]。

以上で、上述の3つの関係式が、比の相等関係を表していることと、それが正しいこと、さらに、問題に適用できることを知ったであろう。しかし、まだ、釈然としないであろう。なぜなら、これらの考察が、この定義によってもたらされうる何らかの新しい認識や可能性を示唆していないからである。オッテらは、科学理論学者ビブラーを引用して言う。

> 「その概念のどういうところが、その概念自身によって定義され、他の概念によっては定義されないのか」という概念の定義を見いだすことは重要である。そうでなけ

[1] 2つの量 a, b が、同一の量 x の整数倍になっているとき、すなわち、$a = mx, b = nx$ (m, n は正の整数) となる量 x が存在するとき、a, b は、通約できる量と呼ばれ、$a : b = m : n$ が定義される。ここではこのようにして定められる比の相等関係の定義を素朴な比の相等関係の定義と呼ぶことにする。

れば、人は、おそらく、新しいことを獲得する資格を失うであろう。[Otte/Bromme, 1978, S.164]

新しい概念が獲得されるときには、その概念によって、今までできなかったどのようなことが可能になるのかや、少なくとも、その見通しが示されなければならない。この場合には、なぜこのような複雑な定義が必要であったのか、このように定義することで今までできなかったどのようなことが可能であるのか、あるいは、その見通しが示されねばならないということである。

これは、人が新しく定義しようとするときの信念と目標に関わっている。そして、それは、読者が、この定義の記述(テクスト)に対してコンテクストをつけることと関連する。コンテクストは認識主体の信念や目標と深く関係する[Cobb, 1986, これに関わる詳しい議論は 拙稿,1993 を参照]からである。ここで、認識主体とは、このテクストを読んでいる読者である。したがって、読者がコンテクストをつけることは、読者自身が信念や目標を持つことを意味している。一方、ユードクソスの定義は、それ自体歴史的背景を背負っているので、読者が、この定義を理解するためには、少なくとも、ユードクソスの信念や目標と両立しうるコンテクストを構成する必要があるであろう。ヒースは言う。

> ユードクソスが比の定義を考えついたのは、彼自身の天才的な能力であったかもしれないが、それにいたらしめた歴史的いきさつというのは歴としてあったはずである。ピタゴラス学派は数論と量論を並行していた。ピラゴラス学派の比例論は数論的には基礎づけられていたが、量論的には基礎づけられていなかった。ピラゴラスの定理には比例が使われていた。しかし、この比例は、無理量を含んでいたため、量論的に基礎づけられていないピラゴラスの証明は不当なものとなる。無理量に対しては共約量の存在が仮定できないからである。したがって、この危機を救うためには、共約量の存在を仮定しない比の定義が必要であった。[ヒース, 1959, p.81]

これは、ユードクソスが新しい比の定義を考案するにいたる歴史的コンテクストである。このことが示唆しているように、ユードクソスの目標は、「量 a と b,c と d が通約不可能な場合にその比の相等を単に整数のみを用いて厳密に定義すること」[白石, 1943, 170 頁]であった。

このようなコンテクストと両立しうるコンテクストを作り上げた上で、もう一度、[定義 A'] を眺めてみると、次のような認識に到達することができる。

> **[認識 1]** ユードクソスの比の相等関係の定義は、2つの量の間に共通の尺度(通約量)がない場合にも、比というものを考えることができるように、比の値から直接定義されずに、比の相等関係と同値な関係式によって間接的に定義された比の相等関係の定義である。

この認識は、ユードクソスの定義によってもたらされる新しい可能性や見通しを示唆しているように思われる。ここで注意すべきことは、この [認識 1] は、定義それ自体、あるいはテクストそれ自体が語っているものではないということである。実は、後で示されるが、これがメタ知識である。われわれは、これによって、上述したユードクソスの比の相等関係の意味するところとその正しさ(知識)を、それによってもたらされる新しい可能性や見通しとともに獲得できることになる。「人は知識と知識についての知識(メタ知識)を常に同時に獲得する。」とはこのことを意味している。

> 人は、理解すべく提示されたテクストに対して、しばしば、あるコンテクストを取り込まなければならない。すなわち、提示された理論は、それを包括する(内容豊かな)参照領域の考慮なしには理解できないということである。知識はメタ知識なしでは獲得されないのである。[IDM, 1981, S.250]

一方、［認識 1］を知識というには十分ではないかもしれない。正しいということが確認されていないという意味で、まだ直観的な認識であるからである。この認識が正しいということをより確実なものとするためには反省的思考が必要である。反省的に思考するには、それを照らす参照領域が必要である。以下、これを試みる。まず、

［陳述 α］ $A : B = C : D$

［陳述 β］ $\exists x, y;$

$$A = mx, B = nx, C = my, D = ny$$

［陳述 γ］ $\forall p, q$: 正の整数;

$$pA \gtrless qB \text{ ならば } pC \gtrless qD$$

とする。［陳述 α］ $\rightleftharpoons$ ［陳述 β］は、比の相等関係の素朴な定義である。また、A, Bが通約可能であるという条件の下で［陳述 γ］は、［陳述 β］必要十分条件であることが示されているので、A, Bが通約可能であるという条件の下では、次のように表現できる。

［陳述 α］ $\rightleftharpoons$ ［陳述 β］ $\rightleftharpoons$ ［陳述 γ］

この表現から［陳述 α］は、［陳述 γ］によっても定義できることが示唆される。確かに［陳述 γ］は、A, Bが通約可能であるという条件がなければ、［陳述 β］の必要条件にすぎない。しかし、A, Bが通約可能であるという条件があれば、［陳述 β］と［陳述 γ］は同値関係であり、かつ、［陳述 γ］の関係式は通約量の存在とは無関係である。したがって、どのようにすれば通約不可能な量に対しても比の相等関係を整数のみを用いて定義できるかという問題を解決するためには、［陳述 γ］を比の相等関係を表現するより本質的な性質であるとみること、つまり、［陳述 γ］を比の相等関係の定義にすることが最も都合のよい方法であるといえる。これがいわゆる通約量が存在する場合から存在しない場合への拡張であることは明かである。すなわち、少なくとも、通約量が存在する場合には［陳述 β］による比の相等関係の定義から導かれる全ての定理が、［陳述 γ］による比の相等関係の定義から導かれることを［陳述 γ］と［陳述 β］との同値関係が保証しているからである。

したがって、ユードクソスの比の定義は、逆思考的に、比の相等関係の 1 つの性質 (必要条件) である［陳述 γ］を逆に定義に仕立てたということになる。われわれは、次の認識に達することができる。

［認識 2］ユードクソスの比の相等関係の定義は、通約量の存在を前提とする素朴な比の相等関係の定義から導かれる通約量の存在とは無関係な関係 (［陳述 γ］) を比の相等関係のより本質的な性質とみて、これを逆に比の相等関係の定義とし、内包を縮小 (実際、通約量が存在しなければならないという条件が捨象された) して、その外延を拡張 (有理量を含んだままにして無理量にも適用可能とする) することを意図した、素朴な比の相等関係の定義の拡張である。

［認識 2］がメタ知識である。［認識 1］とはその正当化が含まれているか否かが異なるに過ぎない。注意すべきは、これらは同時に、定義の拡張の方法を含んでいるということである。それは、ユードクソスによる定義の拡張を説明するときに用いられた論理「概念 (定義) を、それより導かれる、より本質的な性質によって定義し直すことで、その外延を拡張する」である。これは、説明のために用いられたという意味では参照領域であるが、［認識 2］と同時に出来上がったとみたほうが正確であろう。なぜなら、われわれは、このような論理を知らなくても人間の合理的思考の助けによってこの認識に至ったからである。このように参照領域とメタ知識の関係は、参照領域を人間の合理的思考一般と考えれば、それによる正当化の結果であるメタ知識とは区別される。一方、参照領域を人間の合理的思考の具体的な結果、つまり、今の場合には、説明に用いられた論理、これを逆思考の論理と表現すれば、この逆思考の論理は、概念に適用された時にはじめて意味をもつものであり、それ自体は意味を持たない。したがっ

て、［**認識 2**］との関係においてはじめて意味をもつ。つまり、逆思考の論理はメタ知識のもっとも本質的な部分であり、「ユードクソスの定義は逆思考である」というのが、この場合、この場合もっとも簡単な上述のメタ知識の表現である。

逆思考は、デデキントが切断によって実数を定義するとき、また、カントルが無限集合の相等性を定義するときにもみられる。学校数学では三角比の定義の拡張において典型的にみられる [拙稿, 1991]。

このように、メタ知識は、数学的概念の性格であり、ある特定のコンテクストから生まれるが、多くの領域を統一する機能をもっている。つまり、その概念 (定義) を一般的に理解させる機能をもっている。

4. 結語

メタ知識の思想をその歴史的経緯にそって再構成し、その意味とともにその重要性を「人は知識と知識についての知識 (メタ知識) を常に同時に獲得する」ということに具体的な解釈を与えることで明らかにしてきた。この解釈において具体的に検討されたメタ知識の意味にかかわる主要な結果は以下のようにまとめられる。

1. 知識はメタ知識とともに獲得される。
2. メタ知識は、その概念がどのように生まれるか、それによって今までできなかったどのようなことができるかを示唆する。(メタ知識は概念の成立及び有効性を他の概念との関係によって位置づけるための知識である)
3. メタ知識は、その知識が置かれている特定のコンテクストとの関係から生まれる。
4. しかしながら、その概念を一般的に理解させる機能をもつ。

ここでの結果は次のことを示唆している。すなわち、コンテクストは、概念獲得において有用であるという程度のものではないということである。むしろ、コンテクストは、概念獲得においては、本質的であるということである。つまり、全ての理論的概念は問題解決的に (問題解決の状位で) 指導することが望ましいというのではなく、問題解決的に指導しなければならないということを示唆している。その前に、おそらく、問題解決的な導入とは何かということも問い直さねばならないであろう。

メタ知識の認識論的、教授学的重要性はある程度述べてきたつもりである。最後に、教育的重要性について述べて本稿を閉じることとする。これはメリン-オルセン [Mellin-Olsen, S., 1987] から示唆されたことである[2]。

以下は、ヘレン・ケラーの教師であるサリバンがケラー夫妻にあてた手紙の一部である。

> 今朝とても大切なことが起こったので、あなたにどうしても一筆書きたいのです。ヘ**レンは、彼女の教育で大事な第二歩を歩み出しました。彼女はすべての物は名前を持っていることと、指文字が自分が知りたいすべてのことへの手がかりになるということ**を学んだのです。… [アン・サリバン, 1973, 34 頁]

引用の中の強調文字は、ヘレン・ケラーが「水」という言葉を獲得したときに、それと同時に得た認識である。これは、言葉–意味の関係からは生じない知識である。つまり、これらの関係を外からみてはじめて認識できる知識であり、水という言葉が実体としての水を表すということ以上のものを含んでいる。それは、水という言葉、一般に、言葉がもつコミュニケーションの道具としての機能、その機能の重要性の認識を意味していると考えられるであろう。そして、この知識を獲得することの教育的重要性は、彼女のその前後での態度の著しい変化から理解できるであろう。

メリン-オルセンは、「知識の機能性」と表現している。これは、その知識を獲得するこ

---

[2] メリン-オルセン自身もメタ知識 (metaknowledge) という用語を用いているが [Mellin-Olsen, S., 1987, 1991]、ここでは取り上げない。氏のそれは、ベイトソンの学習とメタ学習の区別に由来するものである。本稿で述べたメタ知識との関連は今後の課題としておく。

とで、今までできなかったどのようなことが可能となるのか、ということを示唆している。数学に関連していえば、より一般的に数学の知識の機能といえるであろう。数学の知識一般がもっている機能は、個々の概念ももっている機能でもある。水に対するヘレンのメタ知識が彼女の言葉に対する世界観を変えたように、ある概念に対するメタ知識が数学に対する世界観、すなわち、数学観を変えることもあるであろう。

メタ知識と数学観とのこのような関連を明らかにすることは今後の課題である。

参考文献

Cobb,P.(1986), "Contexts, goals, beliefs, and learning mathematics", *for the learning of mathematics*, Vol.6, No.2, pp.2–9.

IDM(1981), "Perspektiven für die Ausbildung der Mathematiklehrer", *IDM - Reihe Band 2*, Untersuchungen zum Mathematikunterricht herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Keitel,C.,Otte,M.(1979), "Probleme der Profession und des Professionellen Wissens des Mathematiklehrers", *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, Band 24, Heft 2.

Mellin-Olsen, S.(1987), *The Politics of Mathematics Education*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Mellin-Olsen, S.(1991), "The Double Bind as a Didactical Trap", in Bishop, A.J., Mellin-Olsen, S., van Dormolen, J. (eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp39–59.

Otte,M.,Bromme,R.(1978),"Der Begriff und die Probleme seiner Aneignung", in; J.Bloch u.a. (Hrsg.) Grundlagenkonzepte der Wissenscaftskritik als unterrichtsstrukturierende Momente, *Intuite für die Pädagogik der Naturwissenscaften(IPN)*, an der Christian- Albrechts -Universität Kiel, Referate des 13. IPN-Seminars.

Schubring,G.(1977), "Die historisch – genetische Orientierung in der Mathematik-Didaktik — Zur Rolle der Geschichite der Mathematik —", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik(ZDM)*, Jr.9, Heft 4.

Schubring, G.(1991), " *Die Entstehung des Mathematiklererberufs im 19.Jahrhundert: Studieen und Materialien zum Prozess der Professionalisierung in Preussen (1810–1870)*, Deutscher Studien Verlag, Weinheim.

Seeger,F., Steinbring,H.(1986), "Neue Anforderunger an dir Tätigkeit der Fachleiter zwischen Allgemeinbildung, Wissenschaft und Unterricht", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik(ZDM)*, Jr.18, Heft 1.

Smith,B.O.(1969), *Teacher for the Real World*, Washington,D.C., American Association of Colleges for Teacher Education.

アン・サリバン(槇恭子訳)(1973),『ヘレン・ケラーはどう教育されたか —サリバン先生の記録— 』, 明治図書.

白石早出雄(1947),『数と連続の哲学』, 共立出版社.

中村幸四郎(1981),『数学史–形成の立場から–』, 共立出版社.

ヒース, T.E.(平田　寛 訳)(1959),『ギリシャ数学史 I』, 共立出版社.

平林一栄(1990),『数学教育学のパースペクティブ』, 聖文社.

ユークリッド(中村幸四郎 他訳)(1985),『ユークリッド原論』, 共立出版社.

拙稿(1991),「数学教育におけるメタ知識に関する研究 —メタ知識の特性とその役割について—」,『数学教育論文発表会論文集』, 日本数学教育学会, pp.103–108.

拙稿(1992),「数学教育における「メタ知識」に関する研究 — B.O.Smith の「知識についての知識」について」,『教育学研究紀要』, 第38巻, 第2部, 中国四国教育学会.pp.182–187.

拙稿(1993),「数学教育における「メタ知識」に関する研究 —「メタ知識」とコンテクストとの関連について—」,『数学教育学研究紀要』, 第19号, 西日本数学教育学会, pp.19–25.