数学教育研究, 第 10 号, 上越教育大学数学教室, 1995 年, pp.11-20.

数学的問題解決における物理的モデルの役割

－四面体の問題についての解決過程の分析から－

布川　和彦

1.はじめに

算数・数学の問題解決における図の利用について、問題場面の構造を視点とした分析が行われてきている(Nunokawa, 1994a, 1994b)。平面図形に関わる問題にとって2次元の図が近表現(Parzysz, 1988)であることを考えれば、立体図形の問題において、その近表現である立体の物理的モデル[1]が有用であろうと予想することは自然である。

ところで、物理的モデルなどの具体的操作物は数学の指導において有効であるとされる(Sowell, 1989)。しかし幾何学の分野では概念の獲得へのその影響が論じられることが多い(Clements & Battista, 1992; Prigge, 1978)。問題解決においても操作物は有効であるとされる(Hembree, 1992)が、問題解決の研究の文脈では、数量に関する問題の解決でのおはじきなどの利用が議論されることが多い(例えば Carpenter et al., 1993)。問題解決方略についての議論でも、図の利用に比べると、操作物の利用はあまり明示的に取り上げられていない(Polya, 1957; Schoenfeld, 1985)。一方、幾何学の問題解決では表現との関係についての議論が多いが、そこではコンピュータグラフィックスも含めた2次元表現との関わり(Dreyfus & Hadas, 1991; Geddes & Fortunato, 1993)や心的表象との関わり(Mariotti, 1993)が扱われてきた。このように、幾何学の問題の解決過程における3次元の物理的モデルの役割についての分析は、あまり行われていないように見える。

そこで本稿では、立体図形(四面体)についての問題の解決における物理的モデルの役割を、実際の問題解決のデータの分析により考えていく。その際、立体図形に関しては物理的モデルが近表現になっていることをふまえ、問題解決における図の利用について問題場面の構造の観点から論じた先行研究の結果を手がかりとしながら、考察をすすめる。

2.データの収集

本稿では、一人の被験者について行われた9回の問題解決のセッションのうちの、第5回(1992年2月28日実施)についてのデータを扱う。被験者は当時大学院の教育学研究科の研究生であったが、大学レベルの数学の教育も受けており、数学に対する関心も高かった。この被験者を(少なくとも学校数学に関しては)エキスパートであると見なし、彼の解決活動を問題場面の構造の視点から分析し、解決過程モデルを構築することが、9回からなる一連のセッションを行った目的であった。なお、この被験者は布川(1993, 1994)および Nunokawa (1993a, 1993b, 1994a, 1994c)で扱われている被験者と同一人物である。

ある程度の数学的知識を持つ被験者に対して、真の意味での問題解決が行われるように、数学オリンピックのアメリカ予選の問題(クラムキン, 1991)が一連のセッションでは用いられた。本稿でとりあげる第5回のセッションでは次のような四面体についての問題が扱われた;

「問題　各対辺同士が等しい4面体$ABCD$がある。すなわち、$AB=CD$、$AC=BD$、$AD=BC$とする。このとき、この4面体の面はすべて鋭角3角形であることを示せ。」(p.3)

なお問題には図は添えられておらず、今回解いてもらうにあたっても図は与えなかった。

被験者はテーブルに座り、実験者はその向かい側に立ち、VTRを操作しながら被験者の話しを聞くという形をとった。最初に解答用紙として用いるB4のコピー用紙が数枚与えられている。次に問題の書かれたカードを示し、その問題を発話思考法により解いてもらった。基本的には実験者は途中で介入しないが、第5回においては、開始後約12分の時点で、解決者が紙を切ろうとする箇所があり、そのときに実験者が近くに偶然あったハサミを被験者に渡している。開始後約22分の時点で解決者本人が自分の意志で解決を終了するまで、他の介入はなかった。解決終了後に事後インタビューを行い、実験者が被験者に解決の流れを説明するよう求め、さらに問題場面に関して気づいたこと、および与えられた問題を元にして新しい問題を作るとすればどのようなものが考えられるかを尋ねた。以上の全ての様子をATR およびVTR各1台により記録した。なお、VTRについては実験者が操作し、基本的に被験者の手元を拡大して撮影するようにした。

記録に関しては、まず、ATRの記録から発話を書き下してプロトコルを作った。次にこのプロトコルに、VTRによる映像データ、すなわちどのような図や文、式をかいたかを補ったが、その際、図のかき方についての情報も含めるようにした(Nunokawa, 1994a)。このようにして作成されたプロトコル、および被験者により書かれた解答用紙、被験者が解決を行っている際に実験者によりとられたメモがここでの分析の対象となる。

3．解決における活動の概要とそこに見られる問題場面の構造の変化

3.1 解決活動の概要

(i)四面体についての見取り図(図1)をかき、各対辺の長さが等しいことを示す記号を書き入れる(例えば辺ABとCDにはともに二本線の印をつける)。ここで「一つの面が示せればいいんだな」と発話した後、見取り図の中の各面を三角形状になぞっていたが、図の下に「1つの面が鋭角三角形ならO.K.」と書く。さらにこの文の右上に「四つの面合同」と書き、先の文と矢印で結ぶ。

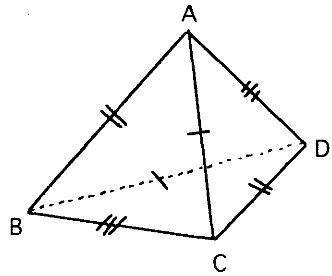

図1

(ii)「切り開いてみようか」と言ってから展開図(図2)をかき始める。かき方は、三角形を次々に四枚つなげていく。次に長さが等しくなる辺どうしに、同じ記号をつけていく。記号は、展開図の外側にある辺(例えばABにあたる2本の辺)に先に記号をつけ、後でこれに対応する内部の辺(CD)に記号をつける。ここで「合同な三角形があればいつでも四面体ができんのかな」という発話をしている。

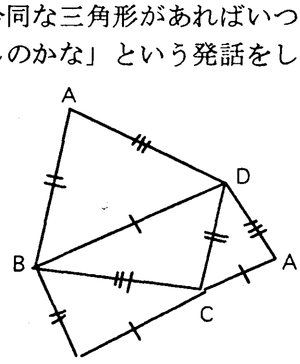

図2

(iii)展開図をかき直しかけるが、最初は三角形を一つだけかいた時点で中断する。次に新たに展開図をかき始める。やはり三角形を一つずつかいてつなげていくが、今回は三角形をかくごとに、辺の長さの相等を表す記号を加えていく。例えば、最初の三角形をかいた時点で、それぞれの辺に、線1本の記号、2本の記号、3本の記号をつけている(図3)。

結果的にできた外側の大きな三角形のある辺(図3の2本線の記号のついた2本の辺のつながった箇所)をなぞりながら「必ずこう三角形になるわけだな」という発話をする。

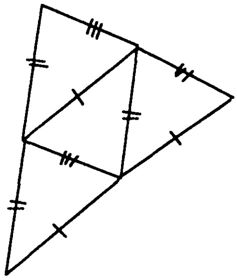

図3

(iv)少し大きめの三角形をかき、その一つの辺の中点のあたりに線を入れ、次にその線で分けられた二つの部分のそれぞれに、線2本の記号を入れる。他の辺についても同様にする(図4)。その後中点どうしを結び、そこにも記号をつける。「四面体ができる条件どうやるんだ」、「どんな三角形でもできちゃいそうだけどなあ」といった発話をする。

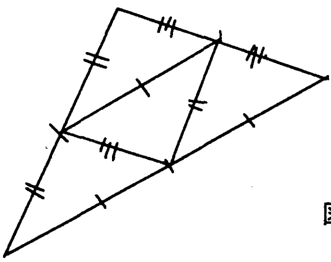

図4

(v)「鈍角三角形の場合考えてみようか」と発話した後で、少し大きめの鈍角三角形をかき、各辺の中点のあたりどうしを結んでいく(図5)。

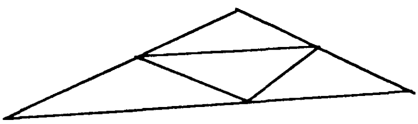

図5

(vi)「できないとしたら、やってみればいい」と発話した後で、新しい解答用紙の端のところから、鈍角三角形を切り取る(辺の長さは175mm、115mm、77mm)。この切り取る時点で実験者がハサミを渡している。各辺を折って中点に印をつけ、中点どうしを結ぶ線をペンでかいていく(図6)。次に$\delta\varepsilon$と$\zeta\varepsilon$の線に沿って折り曲げ(図7)、さらに$\beta\varepsilon$と$\gamma\varepsilon$を無理につけようとし、「くっつかない」という発話をする[2]。初め折り曲げた部分を広げた後、今度は$\delta\zeta$の線に沿って折り曲げる。

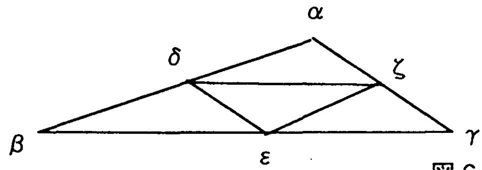

図6

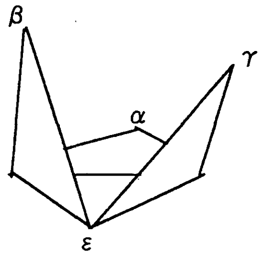

図7

(vii)鋭角三角形(辺の長さは78mm、68mm、65mm)を切り取り、(vi)と同じようにして中点どうしを結ぶ線を引く。線に沿って折り曲げ、四面体を組み立てる。「鈍角だけに注目すればいいんだ」という発話をする。

(viii)「境を考えてみよう」として、解答用紙の角のところを利用して直角三角形を切り取る(辺の長さは105mm、75mm、73mm)。(vi)と同じようにして中点どうしを結ぶ線をかき、それらに沿って折り曲げる(図8)。折り曲げた部分を開いてみたりしながら、折り曲げた紙を見ているが、「わかった」と発話する。

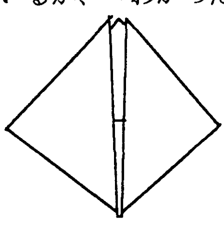

図8

(ix)解答の形でまとめ始める。まず展開図をかくが、鋭角三角形の場合である。大きめの三角形の各辺の中点どうしを結びその後、ま

ず中心にできる小さい三角形に線１本、２本、３本の記号をつけ、次に外側にある辺に対して、該当する記号をつける。図の下に次のように書いた;「今$\triangle BCD$をドン角三角形として／$\angle BDC \geqq 90°$とする／$\angle BDA + \angle CDA < 90°$／より四面体はできない／よって$\triangle BCD$は鋭角三角形」。「終わった」と発話して解決者自身から解決を終了させた。開始より約22分であり、解決終了までの時間は９回のセッション中最短であった。

なお、物理的モデルに関して注意すべきことは、その利用はあくまでも解決者が自発的に行ったということである。実験者が渡したハサミは偶然そこにあったものであり、実験者は物理的モデルの利用を全く考慮していなかった。

3.2 解決過程における問題場面の構造の変化

前節で述べたような解決活動をもとに、解決者が各時点で問題場面(条件を満たす四面体)にどのような構造を与えていたかを考えてみる。

(a)問題文を読んで最初の図をかいた時点においては、四面体の見取り図をかき、等しい辺に記号をつけていることから、字義通りの構造となっている。つまり、四面体があり、各対辺どうしが等しい長さになっているものとして、問題場面の構造が捉えられている。

(b) 見取り図をかいて記号をつけることで、四つの面が互いに合同な三角形であることが見い出されている。(ii)で展開図をかく際には、四つの三角形を次々につなげてかいているが、先に四つの三角形をかき、その後で辺の相等を表す記号をつけている。これは(i)での見取り図のかき方の順序と一致している。したがって、この時点では開くと四つの合同な三角形の集まりになるものという構造が、問題場面に与えられていたと考えられる。

(c)新たに(iii)で展開図をかいている時点では、三角形をかくたびに辺の長さの記号を入れていること、また「これと同じ向きでかいて」という発話があることより、四つの合同な三角形を決まった向きに合わせることに注意が向けられている。これより、四つの三角形をうまく合わせたものという構造が与えられていたと考えられる。さらに、二つの合同な三角形をある向きで組み合わせると平行四辺形になることに気づいており、この情報も付加されていた。

(d) 四つの三角形を組み合わせてできる図形の外側の部分が直線になることに気づく。これは(iii)でその部分を真っ直ぐになぞっていることからもわかる。その結果として、四つの合同な三角形を組み合わせた図形が、大きい三角形であることが見い出される。したがって、この時点での問題場面の構造は、各面が合同な三角形になっており、展開すると大きな三角形になる、といった情報を含む。

(e) (iv)の展開図をかく時点で、構造が大きく変わってくる。つまり、大きめの三角形をかき、各辺の中点を結ぶことで展開図を構成している。また、展開図をかいた時点で「ということはこれができるかって問題なんだね」という発話がある。これらより、この時点では、三角形の各辺の中点どうしを結んでできる展開図を組み立てたもの、として問題場面が捉えられていたと考えられる。

ここで、条件を満たす四面体の展開図の性質を考えることから、ある作り方による展開図を組み立てたものとして条件を満たす四面体を見る、という方向への移行が見られる。また展開図についても、その内部的な性質であった、隣り合う三角形を組み合わせた部分が平行四辺形になることや、結果として外側に大きな三角形ができるということが、(iv)の時点ではむしろ展開図を構成する基本的原理として使われている。このような意味で、(iv)の時点で問題場面の構造の大局的再構成(Nunokawa, 1994c)が生じたと言える[3]。

ただし「どんな三角形でもできちゃいそう

だけどなあ」という発話からわかるように、もとになる三角形（展開図を作る際に最初にかかれる大きめの三角形）について、どのような三角形がよいかの情報は明確には含まれていない。

(f) 鈍角三角形をもとにした展開図を実際に組み立てることで、鈍角三角形は不適切であるという情報が加わっている[4]。図７のように折った後に離れている二つの辺を無理につけようとしていること、また「ここが180度より大きいとくっつかないんだね」という発話より、合わされるべき辺どうしが接合されるかどうかが、四面体が「できる」ことにとって重視されていることがわかる[5]。

(g) (vii) および (viii) では鋭角三角形をもとにした展開図では四面体ができること、直角三角形では不適切であることの情報が付加されている。これより、鋭角三角形をもとにした展開図を組み立てて辺が「くっついた」ものという構造が、問題場面に与えられている。さらに、直角三角形の折った部分を再度折りながら「そうか90度だとこれ足して90度より小さくなんなきゃだめなんだ」という発話をしていることより、折った部分の角の和の大きさが新たな問題場面の構造の要素として付加されていることがわかる。(ix)での解答の記述も考慮するならば、折る部分の角の和が残りの角よりも大きくなるような展開図を組み立てた立体という構造が、問題場面に対して与えられていると考えることができる。

４．解決のアイデアの源泉

前節での問題場面の構造の分析からわかるように、証明の中で用いられた二つの三角形の角の和と残りの三角形の角の大小関係というアイデアは、直角三角形による展開図を組み立てた後で生まれており、それ以前には対応する辺どうしが接合するかどうかに注意が向けられていた。

この点は、事後インタビューによっても確かめることができる。まず、解決の途中で直角三角形をもとにした展開図を組み立てる前には「真っ直ぐ立っちゃうんだろうな」という発話があったが、これに関連して、事後インタビューの際には直角三角形による展開図を図９のように組み立てて実験者に示している。これは、大きい三角形の直角を含まない二つの三角形を線に沿って折り、真ん中に出きる三角形に対してほぼ垂直になるようにした状態である。そして、この時点での説明は次のようなものであった；

> じゃちょうど境界の、90度の三角形はどうだろうとやってみました、あ立っちゃうのかなと思いました初めこういうふうにピッて、そしたらよく考えてみたらこう立つんじゃなくて、[矢印のあたりを指しながら] ちょうどこの90度に重なります、

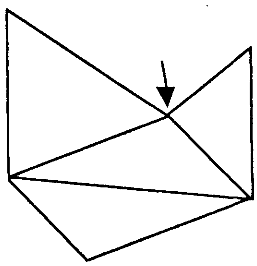

図９

解決過程のこの時点では、対応する辺どうしが接合するかどうかに注意が向けられていたこと、また直角三角形の場合を鈍角と鋭角の境目と考え、鋭角では接合が適切になされ、鈍角では辺の接合がなかったことを考慮すると、直角三角形について予想されたのは、対応する辺どうしは接合するが、面としては垂直に立ってしまうような状況ではないかと考えられる。

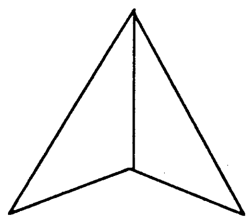

図10

ところが、展開図を組み立てたときに、予想に反して現われた状態を、解決者は「ちょうどこの90度に重なります」として、折り曲げられた三角形の重なり具合として表現している(図8)。この説明の中に、辺の接合から角の重なり具合への注意の移行が見られる。

この注意の移行は、事後インタビューの中では鈍角三角形にまで遡及して適用されている。解決過程においては、鈍角三角形による展開図を組み立てた際、図7のような状態は次にように表現されていた(括弧内の数字は開始からの時間を表す);

(13:35)なるほど、なるほどなるほど、大きくなるとすると、くっつかないんだ、なるほど、
(13:54)ここが180度より大きいとくっつかないんだね、

ところが、事後インタビューの中で解決の流れを説明する時点においては、鈍角三角形および直角三角形をもとにした展開図を組み立てた状態を、次のように表現している;

初め鈍角三角形っていうのはこういうふうになって、鈍角三角形こう折ってみる中点で折ってみてなってみるとこういうふうになって[図11の黒丸のあたりをおさえながら]<u>ここ余ってしまって</u>できないと、

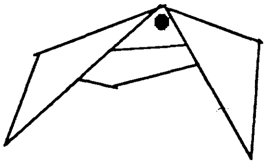

図11

つまり「くっつかない」として表現されていたものが、事後では「余ってしまって」と表現されるようになっている。

そして、こうした議論を経て、結局証明の基本的なアイデアを、まずは次のように説明している;

ここ90度で残りはぜ全部180度なんだから重なっちゃいますということは90度を境にしてこう重なるようなやつ、あるいは余っちゃうようなやつはできないんだと、ってことは180度余っちゃう、ってことは証明、書き下すと、結局鈍角三角形を一個とってきて、ときにこう折り曲げたとき、すなわち角*BDC*、に対して角*BDA*と角*CDA*を折り曲げるわけですけど、そのときに<u>この角度よりも折り曲げた角度、すなわちここの角度とここの角度、*BDA*と*CDA*を足した角度が、大きくならない限り</u>、四面体は一つの稜、すなわち一つの稜、稜線ですよね、稜線を作ることができない、それを示せれば鈍角三角形ではダメと、

この折り曲げる二つの三角形の角の和に関する説明に対し、実験者が再度説明を求めた際に、鈍角では「余る」ことを述べ、次に直角について次のように説明する;

もっと言えばここ[図9の矢印の箇所]が90、ちょうど90度の時に、完全に余らない、だから重ならないピタッて平面になっちゃう、

ここでは「重なる」の意味が事後インタビューの前半とは変わってきている。その上で、直角三角形の場合は「平面になる」と表現されている。さらに鋭角三角形の場合は次にように説明される;

ここをもってきたときに、こうやって今度はそれをおっきいから、その分こう重なる分がこう出て出る、ってことは四面体にできる、

このとき図12のように折り曲げてから「その分こう重なる分がこう出て」と言いながら折り曲げた部分の角を指している。さらに、折り曲げた二つの三角形を少し開くようにすることで、四面体の稜を作っている(図13)。

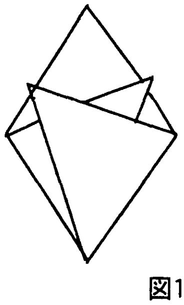

図12

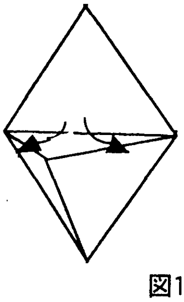

図13

これらそれぞれの場合の説明を受け、最終的に証明のアイデアを次のように説明している；

> っていうことはここの角度に対して、残りの角度が重なるかどうかを考えればいいんだから、重ならないようなやつすなわちこの真ん中の角度が鈍角だったら重ならないから、それはだめ、っていうことで90度、以上の場合は90度以上の場合すなわちこの真ん中の角度が90度以上の場合は、四面体ができないから、要するに少なくとも鈍角ではないってことは示したわけ、だからできるとすれば鋭角三角形しかない、

ここでは「余る」と表現されていたものが、「重ならない」という表現に変えられている。つまり、重なるかどうかが最も重要な要素として導入されたことになる。「余る」か「余らない」かの区別は、そのまま辺が「くっつく」かどうかの区別に一致する。一方、「重なる」か「重ならない」かの区別は「くっつく」かどうかの区別とは一致しない。これより、この事後インタビューでの説明の中においてすら、辺が「くっつく」ことへの注意が残存し、それが徐々に別の特徴に対する注意へと移行していったことがうかがえる。(ix)で書かれた証明中の角の大小関係についての不等式は、この「重なり」を示すものであったことがわかる。

さらに注意すべきことは、解決過程の途中の展開図の組み立て方と、図12に示されるような事後インタビューでの組み立て方との違いである。解決の中で、直角三角形の展開図を考える以前に鋭角三角形の展開図を組み立てる際には、外側の三つの三角形を外から内に折り曲げて合わせることで、四面体を組み立てていた。これに対し事後インタビューの後半では、二つの面を一旦内側へ完全に折り畳んでしまってから、その後それを外側へ開くことにより四面体の一部分を組み立てている。この組み立て方は重なった分があると立体ができることを示すものであるが、角の重複した分の解消ということであり、角の大小関係の文脈において意味を持つ組み立て方である。逆に、外から内に折り曲げることは離れていたものが「くっつく」ことであり、辺が「くっつく」かどうかの文脈で意味を持つ。

以上より、辺の接合へ着目することから、折り曲げられる箇所に集まる三つの角の大小関係、そしてそれと関わる角の重なり具合へ着目することへの移行が、解決の中で確かにあったと考えられる。そして、最後の証明はこの角の大小関係というアイデアに依存しており、このアイデアが解決の途中での直角三角形についての探求以前には見られなかったことを考慮するならば、直角三角形による展開図を実際に組み立てたことが、解決の基本的アイデアの源泉になっていると考えられる。

5．物理的モデルにおける自然に生成される要素とそれに対する意味づけ

DreyfusとHadas(1991)は、生徒の直観と実際に構成された正確な図との間に生ずる葛藤が学習を支えること、またこの葛藤は分析的な議論により解消するものであることを述べている(p.94)。これに従うなら、直角三角形による展開図を組み立てる前の予想(図９あるいは図10の状態)と、組み立てた結果(図８の状態)との間に違いが生じたことが、解決の上で何らかの役割を果たしたのではないかと考えられる。

実際、直角三角形を組み立てた後で、解決者は組み立てた展開図に対して、何かを調べているような様子を見せている。解決者は直角三角形による展開図を組み立てようとした後、まず展開図の一端をつまんで、ぶらさげて眺めていた。次に、折り曲げた二つの小さい三角形の辺(鈍角の場合で言えば図７の$\beta\varepsilon$と$\gamma\varepsilon$にあたる辺)をつまんで折り曲げたり伸ばしたりする。さらにそれらの辺を合わせようとし、それを斜め上から中をのぞいていた。最後に図８のように折り曲げた小さい三角形を少し開いてのぞき込み、再度閉じると

いうことをした。

それでは、直角三角形による展開図を組み立てたときに起こることは何であろうか？また、折り曲げた三角形を少し開いてみることで解決者に見えるものは何であろうか？

図10の状態を考慮するならば、辺が接合することは予想通りであったことになり、予想との違いは折り曲げた面が「ピッと立つ」か「ピタッて平面になる」かである。事後インタビューの最初の説明では「こう立つんじゃなくて、ちょうどこの90度に重なります」と表現していることから、この状態は、折り曲げた三角形の角が直角の部分を覆うような状態として捉えられていたと思われる。そして、折り曲げた三角形を少し開いてみたことは、覆われた状態を見るための行為であったと解釈すると、解決者の行動を合理的に説明できる。

直角三角形による展開図を組み立てた場合には、後の証明の中で大小が比較される三つの角が自然に一箇所に集まるのであり、しかも折り曲げられる三角形の角が残りの角をちょうど覆うことで、両者の大小関係に注意が向きやすくなる。しかし、このとき角が一箇所に集まること、あるいは二つの三角形の角が残りの角を覆うことは、解決者の意図とは無関係に起こったことである。それは、この状態が解決の予想に反したものであることからわかる。解決者が行ったことは、その時点での問題場面の構造、すなわちある展開図について外側の小さい三角形を内側に折っていくと辺が「くっつく」という情報にしたがって、展開図に対して操作を施しただけである。つまり、直角三角形での角の「重なり(被覆)」は、展開図を組み立てるという操作により、自然に生成された要素であったことになる。

Nunokawa(1994b)は、自然に生成された要素は、結局解決者により問題場面の構造の中に取り込まれなければならないとしているが、本稿の事例でもそうした解決者の努力が見られる。それは、事後インタビューの中での各三角形への意味づけが徐々に変化している点である。前節で述べたように、鈍角三角形と直角三角形はそれぞれ「余っちゃうようなやつ」「重なるようなやつ」として表現されていた。この「余る」「重なる」が、折り曲げられた二つの三角形の角と残りの三角形の角の状態に対する、この時点での解決者の意味づけである。一方実験者の求めに応じて再度説明した時点では、これらの三角形は「重ならないようなやつ」として表現されており、角の状態は「重ならない」として意味づけられている。ここで「重なる」の意味自体も変化している。そしてこれらとの対比で、鋭角三角形の場合の折り曲げた三角形の角の状態は「重なる」として意味づけられている。

これによって問題場面(条件を満たす四面体)について、その展開図が「重なる分」を持つという新たな情報が獲得されている。先に述べた、一度完全に折り畳んでから外へ向かって開いていくという新たな組み立て方が、「重なる分」を徐々に解消することとして理解されることを想起するならば、この「重なる分」という素朴な意味づけが、実は解決そのものに密接に結び付いていると考えることができる(Nunokawa, 1992参照)。

結局、直角三角形をめぐる活動において生じていたことは、操作により自然に生成した要素に対して、解決者が自分なりの意味づけを行い、自分の問題場面の構造に取り込むことであった、ということになる。こうした、自然に生成される要素とそれへの意味づけの結果、問題場面の構造の変化が引き起こされる、という流れは、2次元の図が問題場面の構造の変化を引き起こす際の一つのあり方(Nunokawa, 1994b)との類似を見せている。

また、前節で述べたような組み立て方の変化が、辺の接合しうる展開図を組み立てた立体という問題場面の構造から、重なりの生じうる展開図を組み立てた立体という構造への

変化に伴って生じていたことは、組み立てるという物理的モデルへの操作が、問題場面の構造を反映するものであることを示している。このことは、図のかき方がその時点での問題場面の構造を反映するという、問題解決における図の利用についての知見(Nunokawa, 1994a)との一致を見せる。

さらに四面体に対する図2のような展開図は、Mariotti(1991)によれば小学生から高校生にまで共通して現われるものであり、彼女はこれが四面体を展開する心的操作に基づくものとしている。本稿の被験者も、「切り開いてみようか」という発話や、一つの三角形をかいてからその回りに三つの三角形を付け加えることで最初の展開図をかいたことより、底面を固定しそれ以外の面を開いていく操作に基づいて、展開図をかいていたと考えられる。つまり、展開図自体が、操作により自然に生成される要素を多分に含んでいたことになる。そして、展開図のかき方が変化したことは、その背後にある操作の仕方の変化とも捉えられる。

このように見てくると、図をかくという活動と物理的モデルを操作するという活動を対比して考えることにより、物理的モデルについての本稿の分析は、図の利用についての議論と対応づけながら行うことができることがわかる。そして、物理的モデルの場合にも、組み立てるなどの操作により自然に生成される要素があり、それが問題場面の構造を変化させていると言えよう。

なお展開図の外周が大きい三角形になることに関連して、事後インタビューで「ここだからうまくこう線でかいちゃったところがよかったのかもしれません」と述べ、図2の真っ直ぐな部分をなぞっている。これは面となる三角形をかいていった結果(偶然かもしれないが)、外側に長い線分が現われたのであり、平面の図についてではあるが、やはり自然に生成された要素が解決に影響を与えている。

6.おわりに

事後インタビューの「これ作らなかったらできなかったと思うたぶん」という発言からもわかるように、解決者自身が物理的モデルを構成したことが解決にとって重要な役割を果たしていたことは認めている。だからといって、物理的モデル自体を根拠として証明が行われているわけではない。物理的モデルは、折り曲げる箇所に集まる角の大小関係が、四面体ができることにとって決定的な条件であることを示唆した。つまり、展開図のもとになっている鋭角三角形に関するどのような数学的な性質が重要なのか、証明に有効な数学的なアイデアが何であるのかを物理的モデルが示唆していたのである。

Devlin(1994)は「コンピュータ・グラフィックスは、伝統的な[数学の]テクニックの正しい組み合わせを見つけるのに必要な直観を数学者に与えることができる」(p.7)と述べているが、本稿で分析した事例では解決者が作った物理的モデルがその役割を果たしており、結果的に問題場面の構造の変化を促すものとしてのストラテジー(Nunokawa, 1990)の機能を果たしていたことになる。その際には、操作により自然に新たな要素を産み出すという物理的モデルの一つの機能が関わっているとともに、場面となる空間に対する人間の理解や意味(Bishop, 1983)が重要であった。そうした側面まで含め、物理的モデルが図と類似の役割を問題解決の中で担う可能性が、本稿の分析により示されたことになる。

註および引用・参考文献

1. 本稿で用いられる「物理的モデル」とは、紙や板などで作った、幾何学的図形のモデルを指す。なお解決後半でモデルを組み立てるために展開図を切り取っているが、これもモデルの変形された形として、含めて扱う。
2. ギリシア文字は記述のために筆者が導入したものであり、解決者本人は使っていない。
3. この前後で解決の方針が変わっている。これ以前は与えられた条件を満たす四面体の内部の特徴を求め、そこから各面が鋭角三角形であ

ることを示そうとしていたと思われる。一方これ以後は、どのような条件を満たす三角形により展開図をかけば条件を満たす四面体になるかを考えている。しかし前半での活動の成果により、展開図が制御しやすくなっており、その意味で本稿の事例においても初期活動の影響(布川, 1994)を見ることができる。

4. 以下の展開図の組み立てに関して、実際に展開図をつくり組み立てることは、解決者に何が「見えた」のかを理解する助けとなろう。
5. 鈍角三角形について図7以外の折り方をした場合には、後で鋭角三角形において四面体ができる理由として述べられる、角の重なりが生ずる。(但し、折る方向の関係で辺どうしの接合はうまくできない)。(vi)の時点で角の重なりが問題とされないことは、ここではあくまでも辺どうしの接合に注意が向けられていることを、逆に物語るものと言えよう。

Bishop,A.J.(1983). Space and geometry. In R.Lesh & M.Landau(Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.175-203). Orland, FL: Academic Press.

Carpenter,T.P., Ansell,E., Franke,M.L., Fennema, E., & Weisbeck, L.(1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem- solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (5), 428-441.

Clements,D.H. & Battista,M.T.(1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.420-464). New York, NY: Macmillan.

Devlin,K.(1994). *Mathematics:The science of patterns*. New York, NY: Scientific American Library.

Dreyfus,T. & Hadas,N.(1991). STEREOMETRIX- A learning tool for spatial geometry. In W. Zimmermann & S.Cunningham(Eds.),*Visualization in teaching and learning mathematics* (pp.87-94). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Geddes,D. & Fortunato,I.(1993). Geometry: Research and classroom activities. In D.T.Owens(Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp.199-222). New York, NY: Macmillan.

Hembree,R.(1992). Experiments and relational studies in problem solving:A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education,23* (3),242-273.

クラムキン, M.S.(1991). 数学オリンピック問題集：アメリカ編(国際数学オリンピック日本委員会訳). 東京図書.

Mariotti,M.A.(1991). Age variant and elements in the solution of unfolding problems. *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp.389-396). Assisi.

Mariotti,M.A.(1993). The influence of standard image in geometrical reasoning.*Proceedngs of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp.177-182). Tsukuba.

布川和彦.(1993). 大局的再構成の生じた解決の特徴. 第26回数学教育論文発表会論文集, 321-326.

布川和彦.(1994). 数学的問題解決における初期活動の影響: 問題場面の構造の再構成の観点から. 第27回数学教育論文発表会論文集, 323-328.

Nunokawa,K.(1990). Roles of heuristic strategies in mathematical problem-solving. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 9* (B), 41-54.

Nunokawa,K.(1992). Solvers introduce extra information: Its positive roles in the problem solving process and the instruction. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 12* (B), 25-36.

Nunokawa,K.(1993a). Prospective structures in mathematical problem solving. *Proceedngs of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp.49-56). Tsukuba.

Nunokawa,K.(1993b). Solvers' spontaneous balancing of the level of difficulty in mathematical problem solving. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 12* (B), 47-56.

Nunokawa,K.(1994a). Improving diagrams gradually: One approach to using diagrams in problem solving. *For the Learning of Mathematics,14* (1),34-38.

Nunokawa,K.(1994b). Naturally generated elements and giving them senses: A usage of diagrams in problem solving. *Proceedngs of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp.376-383). Lisbon.

Nunokawa,K.(1994c). Solver's structures of a problem situation and their global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior, 13* (3), 275-297.

Parzysz,B.(1988). "Knowing" vs "seeing":Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19* (1), 79-92.

Polya,G.(1957). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Prigge,G.R.(1978). The differential effects of the use of manipulative aids on the learning of geometric concepts by elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education, 9* (5), 361-367.

Schoenfeld,A.H.(1985).*Mathematical problem solving*. Orland,FL: Academic Press.

Sowell,E.J.(1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (5), 498-505.