数学教育研究, 第10号, 上越教育大学数学教室, 1995年, pp.21-32.

「メタ知識」の実現へ向けて

岩崎　浩

1　はじめに

「メタ知識(Metawissen)」の起源は、教師が知識をコントロールするために必要であるとして意識されてきた暗黙的な知識を「知識についての知識(knowledge about knowledge)」[1]として顕在化しようとする努力の中に求められる。これはアメリカの大規模なカリキュラムプロジェクトの失敗という歴史的反省から生まれた認識―教師の知識についての見方が教師の教授行為に中心的な影響を及ぼすということの認識―の1つの重要な結果であり、教師教育に関わる研究において重要な第一歩であった。とりわけ、「知識についての知識」としてのその特徴づけは、教師の行為を調整しているかような暗黙的な知識の存在を指摘するだけでなく、それを教師教育の顕在的な対象にしようという試みであった[2]。このように「知識についての知識」が教師の知識の重要な1部分として意識されてきた一方で、IDMの研究者たちによって、「知識についての知識」が認識論的な観点から反省され、用語「メタ知識」が導入された[3]。メタ知識は、教師のみならず、学習者にとっても、程度の差こそあれ、本質的に持つべき知識であるという認識が含まれているとみることができるという意味で、「知識についての知識」のより本質的な部分を表現している。

IDMの研究者たちによって、メタ知識を教師が持つことの重要性が、主に理論的水準で大局的に明らかにされてきた。一方、メタ知識を考慮にいれた数学教育をどのように実現していくかは、これとは別の水準の問題として残っている。このようなメタ知識の実現の問題に取り組むための出発点は、研究者と実践家である教師とが問題意識を共有することであるが、そのとき、メタ知識の意味やその重要性を例証するよい事例を開発することは本質的であると考える。メタ知識を授業において実現していくのは個々の教師であり、教師にとって、理論的説明よりも、事例の方が説得力があるからである。

このような局所的、具体的にメタ知識の意味と重要性を明らかにする試みの1つとして、メタ知識の認識論的側面に関わる意味と重要性についてのIDMの研究者たちの見解が1つの具体例を通して検討されてきている[4]。本稿では、そこでの結果[5]を基本的な枠組みとしながら、メタ知識の教育的側面を2つの事例を通して考察し、次いで、実際の授業場面を分析を通して、メタ知識の教授学的側面を考察する。

2　メタ知識の教育的側面

2.1　メタ知識の獲得と自主性

メタ知識の教育的側面を最も明確に、しかも印象的に例証しているのは、耳と目が不自由に生まれた、ヘレン・ケラーの物語、特に、彼女が10才のときに、「水」という指文字を学んだ時のエピソードである[6]。

以下は、ヘレン・ケラーの教師であるサリバンがケラー夫妻にあてた手紙の一部である。

> 今朝とても大切なことが起こったので、あなたにどうしても一筆書きたいのです。ヘレンは、彼女の教育で大事な第二歩を歩み出しました。彼女はすべての物は名前を持っ

ていることと、指文字が自分が知りたいすべてのことへの手がかりになるということを学んだのです。… 冷たい水がほとばしって、湯のみを満たしたとき、ヘレンの自由な方の手に「w-a-t-e-r」と綴りました。その単語が、たまたま彼女の手に勢いよくかかる冷たい水の感覚にとてもぴったりしたことが、彼女をびっくりさせたようでした。彼女はコップを落とし、くぎづけされた人のように立ちすくみました[7]。

このエピソードは、ヘレン・ケラーが、(a)「水」という指文字を学んだときに、それと同時に、(b) すべての物には名前があるということと、(c) 指文字が自分が知りたいすべてのことへの手がかりになるということも学んだということを示している。

(a) は、水を表す指文字とその指示対象、つまり、実体としての水との対応関係、つまり、対象間の関係に関わっているのに対して、(b)、(c) は、ヘレンにとって指文字は一体何であるのか、指文字によって、外界を認識する上で、どのようなことが新たに可能になるのかということを表現しているという意味で、水を表す指文字とその実体「水」との関係と認識主体との関係に関わっている。

これは、指文字–指示対象の関係からは生じない知識である。この認識は、指文字–指示対象の関係を外からみてはじめて認識できる知識であり、自分の意志がうまく伝えられないもどかしさと自分の意志をよりうまく伝えたいというヘレンの目標、文脈がなければ、成立しえない。それは、「水」という指文字が実体としての水を表すということ以上のものを含んでいる。すなわち、「水」という指文字、一般に、指文字がもつコミュニケーションの道具としての性格と、その性格の重要性の認識である。前節での考察から明らかなように、(a) と (b)、(c) との間の関係は、知識とメタ知識の関係に対応している。

この場合のヘレンによるメタ知識の獲得とは、彼女の中で指文字が認識論的に位置づけられたこと、すなわち、これまで彼女が外界を認識する上で採用してきたさまざまな方法の中に、コミュニケーションの道具としての特別の地位 (status) が、指文字に対して与えられた、あるいは、確立されたことを意味している。

メタ知識の獲得が、教育的にみて、彼女にどのような効果をもたらしたか、つまり、メタ知識の教育的側面は、彼女がメタ知識を獲得する前と後とでの著しい態度の変化が明確に物語っている。

メタ知識を獲得する前にも、ヘレンは、自分が何かの名前を知りたいときには、知りたいものを指さし、そして、サリバン先生の手をたたくことができし、サリバン先生が、ヘレンの手に湯のみ (mug) を触れさせ、それに対する指文字を書くように指示すれは、ヘレンは、サリバン先生の手に指文字「湯のみ (m-u-g)」を書くことができた。しかし、その行動は、もっともよくしつけられた動物の行動に例えられるものであった。ところが、メタ知識を獲得した後のヘレンは、きわめて人間らしい行動をするようになる。サリバン先生は、その様子を手紙の中で次のように表現している。

ある新しい明るい表情が顔に浮かびました。彼女は何度も、「water」と綴りました。それから、地面にしゃがみこみその名前をたずね、ポンプやぶどう棚を指さし、そして突然ふり返って私の名前をたずねたのです。私は「Teacher」と綴りました。ちょうどそのとき、乳母がヘレンの妹を井戸小屋に連れてきたので、ヘレンは「baby」と綴り、乳母を指さしました。家にもどる道すがら彼女はひどく興奮していて、手にふれる物の名前をみな覚えてしまい、数時間で今までの語彙に三十もの新しい単語をつけ加えることになりました[8]。

要するに、メタ知識の獲得の前後の彼女の学習態度の変化は、外発的な動機づけによる学習から内発的な動機づけによる学習への変化として最もうまく特徴づけることができる。言い換えれば、メタ知識の獲得によって、彼

女の中に指文字そのものに対する知的興味関心の覚醒が起こり、これがその後の彼女の指文字の学習をより持続的でより自主的なものにしているということである。

2.2 メタ知識の獲得と知的自律性

メタ知識の教育的側面が主に内発的動機づけとの関連で述べられてきた。メタ知識の教育的側面を例証するもう1つの例は、フロイデンタール(Freudenthal,H.)が、一般教育における数学とは一体何であるかを一般の人々に説明するときに好んで用いるという、メレが彼の友人であるパスカルにあてた手紙[10]の内容である。

> AとBという2人が、互いに平等な条件で一連のゲームをする約束をしていた。最初に5ゲーム取った方が掛け金をもらうことになっていた。ところが、Aが4ゲームを取り、Bが3ゲームを取った時点で、2人にはどうすることもできない事情で、取り止めなくてはならなくなった。掛け金はどのように分けられるべきなのか。4:3がフェアーであるという人たちもいれば、$(5-3):(5-4)$の方がよいという人たちもいた。どちらが正しかったのか。これが、メレのパスカルへの質問であった。これに対してパスカルは、両方とも正しくないと答え、次のような代案を示した。2人がさらに2回ゲームをしたとすると、「Aが勝ち、Aが勝つ場合」「Aが勝ち、Bが勝つ場合」「Bが勝ち、Aが勝つ場合」「Bが勝ち、Bが勝つ場合」の4つの可能性がある。4つの場合のうち3つの場合においてAは掛け金を取れるのに対して、Bは1つの場合だけである。したがって、掛け金は、3:1に分けるべきであるというものである。

このメレとパスカルとのやりとりについてフロイデンタールは次のように評価している。

> このメレの問題は、数学指導上の重要な問題に、突如として予期せざる光を投げかけている。メレは、確かに教育を受けた男であったし、間違いなく、数学を学んできていた。しかし、彼は、数学を応用しなければならないような事態に立たされたとたん、それができない。彼は、自分の知っている数学、私が子どもの頃、三数法(the rule of three)と呼ばれていたような種類の数学を応用した。…かわいそうにメレは、今日のまじめな生徒たちのように、彼が学んできた数学を応用したが、そのことによってかえって損をした。おそらく彼は数学を全く学んできていなければ、もっとうまくやってのけたであろう!その場合には、彼が学んできた数学ではなくて、彼が自分で創り出さなければならなかったであろう数学を応用するチャンスがあったであろうから[11]。

メレにとって最大の失敗の原因は、フロイデンタールが皮肉にも、数学を学んでいなければしていたであろうことをしなかったところにある。つまり、問題をより深く考えようとしなかったことである。

メレが比例を応用して失敗したのは、比例という数学的概念が問題であるのではなく、それを無闇に適用してしまった人間の側にある。確かに、この問題には、比例が関係している。しかし、比例が適切に表現しうるのは、AとBが取ったゲームの割合までであり、それを掛け金の分配にまで応用することは、この問題の場合、比例の過剰な応用であり、よりよい対処の仕方であるようには思われない。それではなぜ、メレは比例の過剰な応用をしてしまったのか。

この比例の過剰な応用の背後には、数学(比例)を使っていさえすれば、問題に合理的に対処できるという数学に対する誤った信念があるように思われる。なぜなら、A,Bという2人の人の身になって問題を考えるために比例が適用されたというよりも、問題の表面的な数値を適当に処理するために比例が用いられていると考えられるからである。このために、4:3と$(5-3):(5-4)$という2つの解答のうちのどちらかでよいと考え、それ以上考えなくなってしまっている。

メレは、比例という数学を学習したときに、同時に獲得すべきであったメタ知識を欠いている。それは、数量の関係を手がかりにしてある問題により合理的に対処する方法、

道具を考え出すことが数学であり、比例はその方法の1つであるという認識である。

メレは、数学が有用であると考えていたので数学を応用した。しかし、その数学の性格を十分に理解していないために、その数学(比例による解法)が適切かどうかを自分で判断できない。このような判断は、問題に照らしての数学の適・不適であり、数学に責任があるのではなく、それを適用する人間に責任がある。そして、この判断は、数学とはいったいどのような性格をもったものであるかを知らなければ下せない。

メレの例は、数学が一体どういう性格のものであるか—メタ知識—を獲得することが、知的自律 (intellectual autonomy)[12)]—これは、教育の最も重要な目標の1つであろう—にとっていかに重要であるかを示している。

3 メタ知識の教授学的側面

前節での考察によって、メタ知識の教育的重要性が、学習者の自主性、知的自律性との関係で明らかとなった。このことは、教師がメタ知識をもつことが重要であるということと同時に、学習者もメタ知識を獲得すべきであるということをより一層強調している。

それでは、学習者にかようなメタ知識を獲得させるにはどうすればよいのか。その解決の出発点は、実際の授業において起っている教師と生徒との相互作用の中に、学習者のメタ知識と教師のメタ知識どのような形で生起しているかを分析することであると考える。

以下で、実際の授業場面を提示する。それを知識ーメタ知識の観点から分析し、どこに問題点があると考えられるかや、それに対してどうすべきであるかを考察する。

まず、考察の対象とする授業場面[13)]を簡単に描写する。

3.1 授業場面の描写

授業は、三角形の合同条件(決定条件)の2辺と1角の場合の検討の場面である。生徒たちは、$\mathrm{AB}=5.6cm$ $\mathrm{BC}=5cm$ $\mathrm{CA}=4.1cm$ $\angle\mathrm{A}=60^\circ$ $\angle\mathrm{B}=45^\circ$ $\angle\mathrm{C}=75^\circ$ の三角形 ABC と合同な三角形 DEF を作図する様々な方法を考えている。これまでに、3辺の場合に三角形が1つに決まることが、作図によって検証されてきている。3辺の場合には1通りであったが、ここでは図1のように5つが提出された。

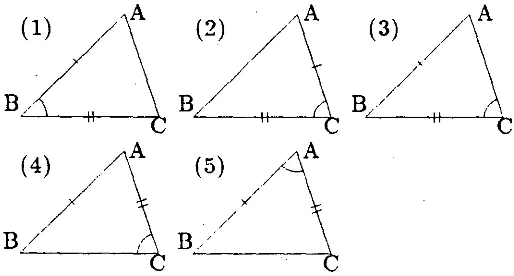

図 1: 生徒から出された条件

これらは、その視覚的類似性から (1), (2), (5) と (3), (4) の2つの組に分けられた。まず、前の組が検討の対象となった。(1) の場合を教師は丁寧に黒板に作図し、その仕方から1つに決まることが確認された。この仕方から、(2), (5) も同じようにできることは明らかであった。

次に、(3), (4) が検討の対象となった。教師は、これらの条件で三角形が定まらないことを示すために (3) を選んだ。(4) が反例にならないことは、教師にとって明きらかであったように思われる。ところが、実際に描く段

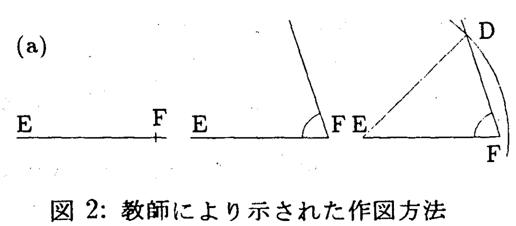

図 2: 教師により示された作図方法

階に入って、これも反例にならないことが明かとなり、結局、(3) は反例を見つけるために必要な作図の方法を生徒たちに示すために

用いられた。教師は、図 2のように描いた。一方、生徒は、このとき、(3) の条件が正しいかどうかの検証としてこの作図の方法を眺めている。描き終えた直後、教師は、次のような発問をした。

T_1 「今のように描けるんですが、今の私のような描き方わかりますか。大丈夫ね。描けるんだね。実際大丈夫ね。いい、大丈夫かな。(4) も大丈夫かな。今君達が見つけたのはみんな描けるという感じがしますので、私の方で (条件を提示しますので:筆者加筆) こんなものを描いて下さい。今と同じようにこんなのもう 1 つ描いてもらいます。」

教師は、今の描き方を生徒に説明しながら、コンパスを使って第 3 番目の点を見つけるよう指示し、反例となる組み合わせ ($AB = 5.6cm, CA = 4.1cm, \angle B = 45°$) を板書し、次のように問いかけた。

T_2 「これを作図してほしい。コンパスで計って描いたときに、次の点が 1 点だけしか見つからなければ描けるんだね。1 つしか決まらないんだから。」

しばらく、教師は机間巡視をしながら、個別指導をし、目星をつけた生徒を指名し、黒板で作図してみるようにいった。生徒は次の図 3のように作図をした。教師は、コンパスで最

(b)

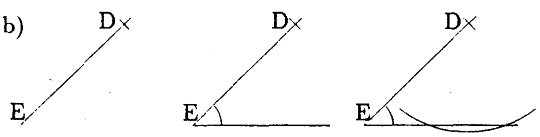

図 3: 生徒による作図

後の点を決めるときに 2 点で交わってしまうことを強調し、最後に、次のようにまとめた。

T_3 「2 つの辺と 1 つの角で三角形を描いたら、このようにうまく描ける場合もあったのですね。ところが、場所のとり方によって 2 つの図ができてしまう場合もあります。いつでも 2 つできるわけではありません。1 つの場合もあります。2 つの辺と 1 つの角だけではどうやら 1 つに決まらない場合も出てきてしまう。$\cdots$ そうすると、2 辺と 1 つの角で三角形が合同になる、それを調べただけで合同な三角形が必ず描けるというわけにはいかない。2 辺と、実は、間の角のときだけ合同になります。」

3.2　問題点の顕在化　上述は、ごく普通の日本の中学校で行われている授業の 1 場面である。ごく普通のというのは、扱われている内容が日本の教科書の内容と首尾一貫していて、しかも、改まった研究授業ではなく、普段のスタイルで行われたという意味である。T_3の中の最後の表現から、この場面で、教師は、(3), (4) のような場合には反例があることを示し、2 辺と 1 角の場合においては、2 辺夾角相等の関係だけが成り立つということを生徒に理解させること意図していたことがわかがわれる。

一方、生徒達は、(3),(4) の条件で描けると考えており、そのことは (a) によって検証される。

教師の側に立てば、T_3のように結論づけるのに十分な反例を示したことになる。一方、この場面が示唆している問題意識は、「(3),(4) の場合は (a) のように三角形が 1 つに決まるのに、なぜ、教師が提示した条件では、(3),(4) と同じような位置の組み合わせであるにもかかわらず、(b) のように 2 つの三角形ができるのか?」というように考える方が自然であり、これは同時に、生徒の文脈、あるいは問題意識と両立すると考えられる。問題点は、この場面が示唆している自然な問題意識が取り上げられることなく、教師の意図する方向に収束させられてしまっている点にある。

この問題点は、数学的知識のレベルと数学的メタ知識のレベルの両方から明らかにされるが、これらはともに教師のメタ知識の問題に帰着される。ここでの分析は、事実そのものを問題にし、明らかにするということを意図していない。したがって、論点がより明確になるように、以下で、この授業場面を再定式化することにする[14]。

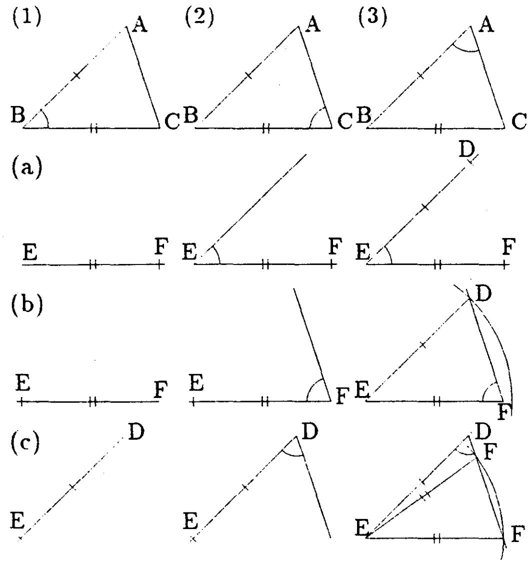

図 4: 再定式化された場面

3.3 問題点の分析

3.3.1 問題場面の再定式化

以下は、上述した授業場面と同じように、三角形の合同条件が、与えられた三角形と合同な三角形を描くための条件、つまり、決定条件の探究の活動を通して発見的に指導されているという設定での2辺と1角の場合の検討である。

今、仮に、$AB = 5.6cm$ $BC = 5cm$ $CA = 4.1cm$ $\angle A = 60°$ $\angle B = 45°$ $\angle C = 75°$ の三角形 ABC と合同な三角形 DEF を作図する様々な方法を考えているとしよう。そして、図4の通り、(1),(2),(3) の3つが提出され、それぞれが (a),(b),(c) の作図によって確かめられているとしよう。

実際の指導場面を想定したとき、この場面はどのような解釈がなされ、どのような指導が展開されるであろうか。

一般に、教師が数学をどう捉えているか、つまり、数学観によって、その指導が異なってくることが知られており、教師の数学観や数学の哲学と指導法との間の整合性[15)16)17)]が指摘されてきた。また、教師が知識中心ではなく問題解決的に数学を捉えていることが学校数学のプログラムの実質的な変革や進歩に導くということも指摘されてきた[18)]。

以下での分析も、これらの研究に関連しており、ある意味では、絶対主義的数学観と両立する知識中心の数学の捉え方と相対主義的数学観と両立する問題解決的な数学の捉え方で場面を解釈しているとみることもできるであろう。しかし、知識中心や問題解決的ということが何を意味しているかが明確でないのと、一人の教師をある数学観で捉えることは難しいので（実際、前節で取り上げた場面の教師は、所々みられる重要な意志決定をするところをみれば知識中心とみれるが、教材全体の構成をみれば問題解決的である）ここでは、3.1 節の授業場面と両立しうる教師の知識とメタ知識を定義[5)]に基づいて同定し、この観点で、3.1 節の教師の教授行為を解釈し、その問題点をより明確に捉えていくことにする。

3.3.2 場面における教師の知識とメタ知識

知識とメタ知識の関係を、この場面の教師の三角形の合同条件にかかわる知識に適用すれば、教師の三角形の合同条件の知識は、3辺相等、2辺夾角相等、1辺両端角相等という関係とその（作図による）正当性を含んだ知識体系として同定できる。一方、このときの教師のメタ知識は、この教材の構成、文脈をみることで明らかになる。それは、三角形 ABC と合同な三角形 DEF を描くには、三角形 ABC のどこを調べればよいか。そして、なるべく少なくするにはどうするかという教師側が設定した問題意識と関係している。ここには、三角形の合同条件とは、なるべく少ない確実に規定できる要素（辺と角）で全体（無限に多くの三角形間の同値関係）を規定する方法であるという教師のメタ知識があると考えられる。これはユークリッド原論に通じる考え方であり、平林がギリシャ的な考え方と呼んでいるもの[19)]と首尾一貫している。

3.3.3 場面の知識的解釈による問題点

3.1 節で、教師は、三角形の合同条件は、3辺相等、2辺夾角相等、1辺両端角相等であり、これを発見させ、定着させることが三角形の合同条件の指導であるという立場と両立する立場に立っていたことが明らかにされた。この立場は、再定式化された場面と上述の知識-メタ知識との関係から捉えると、図4を知識で解釈しているとしてみることができる。この立場でみると、この再定式化された場面は、2辺夾角相等の合同条件の成立と、それ以外の2辺1角の条件に対する反例があり、このことを指導する格好の場として捉えられるということが理解できる。ここでは、この立場を、図4を知識から捉え、評価しているという意味で、これを知識的解釈と呼ぶことにする。また、知識的解釈は前節で述べた教師の指導スタイルの特徴を明らかにしていることにも注意したい。

もし、この立場に終始するとすれば、この場面が示唆しているもう1つの重要な関係を見落としてしまうかもしれない。というのも、その背後には、2辺と1角の場合の合同条件は、2辺夾角相等だけであるという認識がこの立場の前提としてあるからである。

その示唆している関係、それは、(2) の条件では1つに決まるのに、どうして (3) の条件では1つに決まらないのかという素朴な問題意識と関係している。

上述のように知識的解釈でみると、(1) とそれ以外として (2),(3) が捉えられるであろう。一方、そのような先入観をもっていない生徒たちには、視覚的類似性から (1) と (2),(3) を区別してはいても、(2),(3) を同じ関係にあるものとしてはみていない可能性がある。

上述の問題意識は、このような純粋な目で、(b),(c) の作図活動を見つめたときにはじめて見えてくる問題意識であるように思われる。

一方、メタ知識の観点でみていれば、これに気づくことは、そう難しいことではないことが理解できる。なぜなら、この立場では、この場面を、なるべく少ない確実に規定できる要素（辺と角）で全体（無限に多くの三角形間の同値関係）を規定する方法を考えているとしてみているので、この素朴な問題意識も他と同じように検討すべき問題として受け入れられるからである。ここでは、この立場を、図4をメタ知識から捉え、評価しているという意味で、これをメタ知識的解釈と呼ぶことにする。

実は、この問題意識は、次節で述べる SsA 合同定理へと発展しうる問題意識である。

3.3.4 SsA 合同定理について

前節での問題意識、すなわち、(2) の条件では1つに決まるのに、(3) ではどうして1つに決まらないのか——。これを、もう少し反省してみよう。この問題意識は、換言すれば、(b) の場合は、最後にコンパスで決定される点が1点であるのに、どうして (c) では2点になってしまうのかという問題である。つまり、条件の通り、辺、角と作図して、最後の条件であるもう一方の辺の長さをコンパスで決めるときに定まる点が、与えられた角を形作っている半直線上 ((b) の場合には、半直線 FD) に1点しかとれないか、2点とれるかの問題である。このことが2辺の長さに関係していることは、円弧を描く活動から明かであろう。すなわち、最後にコンパスでとる辺 ((b) の場合には ED、(c) の場合には EF) の長さが、もう一方の辺 ((b) の場合には EF、(c) の場合には ED) の長さよりも長い場合には、(b) の場合のように、2点目をとろうとしても、点 F を越えていってしまうので、原理的に半直線 FD 上には1点しかとれない。一方、その長さの関係が逆の場合、すなわち、(c) のような場合には、半直線の端点 ((c) の場合には点 D) を越えることは不可能であるので、その手前で交差し、結果的

に２点とれてしまう。

前者の場合、すなわち、原理的に１点しかとれない場合を定式化すると、これが SsA 合同定理である。すなわち、

「２つの三角形の対応する２辺 (**S***ides*) と、その長い方の辺に対する角 (**A***ngle*) がそれぞれ等しいならば、その２つの三角形は合同である。」

この定理は、一般には "SSA" 合同定理と呼ばれている。上では "SsA" と真ん中の文字を小文字で表現されている。これは、ヒルシュホルン (Hirschhorn,D.B.) が提唱している表現[20]で、短い方の辺を表している。おそらく、記憶のしやすさからであろう。実際、氏がこう捉えているかどうかはわからないが、図５のようにみればよいであろう。この定理は、

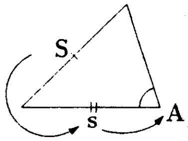

図 5: SsA の解釈

直角三角形の合同条件の１つ「斜辺と他の一角」の関係を含んでいる。SsA の指示する角が直角のときがそれにあたる。直角三角形において、直角の対辺は他の辺よりも長いからである。この指示する角が鈍角の場合も同様になり成り立つ。また、この定理によって、(2) に示されている角は、２辺のうち長い方の辺に対する角である、(3) は、短い方の辺に対応する角であるとして区別することができるであろう。

この定理の演繹的証明[21]は、ここでは述べないが、実際に、中学校で指導する際には、先ほどの考察が適切であろう。例えば、ドイツのギムナジウムの教科書には、作図を通して、この定理が３つの合同条件と対等に位置づけられている[22]。

3.3.5　メタ知識レベルの問題

これで、前節で顕在化された問題点が数学的知識の観点から明らかにされた。ここでは、知識的解釈のもう１つの問題点を明らかにする。それは、このときに獲得されるであろう学習者のメタ知識を考慮することでより明確に捉えられる。われわれは知識を獲得するときに常に同時にメタ知識も獲得している[23]。そして、この主張は、Bateson,G.(1973) がパブロフの伝統における動物の実験の分析において、原-学習 (proto-learning) と第２次学習 (deutero-learning) を区別した上で立てた仮説とある意味で首尾一貫している。それは、機械的な反復学習においてさえ、学習に対してメタレベルの学習が生起しているというものである[24]。ここで、ある意味でというのは、研究目的や対象としている内容は異なるが、どちらも、水準の異なる学習が当該学習と平行して生起しているということを述べているということを指している。

この立場に従えば、この授業場面からも生徒はメタ知識を獲得しようとしているということになる。つまり、生徒は確かに合同条件の学習をしている。実際、２辺夾角の合同条件の知識を獲得している。一方、それと同時に合同条件についての知識、合同条件とは自分にとって何であるか、つまり、合同条件と認識主体との関係についての知識―メタ知識―も獲得しているということになる。それでは、この場合、生徒のメタ知識レベルでどのようなことが起こっていると考えられるのか。

例えば、この三角形の合同条件の学習において、生徒が、ある混沌としたものを有限で確実なもので捉える方法を与えるものとしての数学の性格を発達させたとすれば、前述した教師のメタ知識と両立しうるメタ知識を学習者が獲得したことになるであろう。ところが、既に述べてきたように、場面から示唆される新しい問題は取り扱われず、教師の方から教科書と両立しうる結果を導きうる新たな問題が提出される結果になっているので、このメタ知識とは首尾一貫しない。むしろ、２辺夾角の合同条件を学習したと同時に、例

えば、合同条件は教科書や教師にあり、最終的に教師が導いた結果、あるいは、教科書に載っている事実であるという信念（誤ったメタ知識）と首尾一貫しており、このようなメタ知識を発達させている可能性がある。

3.4　知識的解釈の限界とその打開策

問題点が数学的観点およびメタ知識の観点の両方から明らかにされた。その原因は、場面が示唆している問題、SsA 合同定理を取り上げることができなかったこと、あるいは、取り上げなかったことに起因している。

このことから自然に導かれる打開策は、SsA 合同定理とその重要性を教師が知っていれば、この問題を扱うことができた、あるいは、取り扱っていたという立場である。実際、既に前に例証してきたように、SsA 合同定理を知っていれば、この授業場面そのものが示唆する問題：(3), (4) の場合はなぜ 1 つに決まったかは、SsA 合同定理への出発点となる問題意識であり、(a), (b) の描き方の比較は、その解決として捉えられる。つまり、SsA 合同定理を知っていれば、この場面が SsA 合同定理が生まれるための条件を含んでいることは明らかであったと考えられる。このことから導かれる打開策は、教師がより詳細に教材を分析することである。

しかし、このことは打開策として十分ではない。教師がより詳細に教材を分析していたとしても、それ以外の関係を見失ってしまう危険性を常に伴っているからである。実際、本稿で、SsA 合同定理を話題にしてきたが、ヒルシュホルンが主張しているように、その幾何学的有用性から、SsA 合同定理を教科書に導入すべきであるとか、SsA 合同定理を教師が知っていることが必要であるということを主張するためではなかった。知識的解釈の限界、したがって、詳細に教材を分析することの限界を指摘するためであった。このことは、教師が数学的知識を広範に、しかも、詳細にもつことを否定するものではない。ただ、一方で、それ以外の関係を見失ってしまう危険性を常に伴っているということを指摘したのである。また、たとえ、ある程度この限界が克服できたとしても、前節で指摘した学習者のメタ知識レベルの問題は依然として残る。

このことは、メタ知識的解釈の必要性、したがって、教師のメタ知識の重要性をより一層強調している。結局、ここでの問題点の打開策は教師のメタ知識の問題に帰着される。というのも、これまでの考察から示唆される、ここで取り上げた問題点を打開しうる教師の実際の指導のスタイルを実現するためには、教師のメタ知識が必要にして不可欠であるからである。

その指導スタイルは次のように表現できるであろう。すなわち、いったん教師の目標と両立しうる問題を何らかの方法で設定したら、教師は教師のあらかじめ定まった目標からではなく、その問題場面が示唆していること、つまり、そのとき生徒がもっていると考えられる目標、文脈に照らして、生徒から出される数学をみること、そして、常に、開かれた姿勢で、新しい問題意識に積極的に目を向け、生徒と一緒になって考えるということである。

このような教授スタイルを実現するために教師に要求される最も重要なことは、生徒たちの考えや解法を含む活動が三角形の合同条件の成立に向かう活動であるかどうかを評価することである。これは、三角形の 3 つの合同条件をどう指導するかという指導法の問題ではなく、三角形の合同条件とはいったい何であるか、三角形の合同条件に関わる数学的活動は何かということを反省することである。メタ知識的解釈は、その定義から、生徒から出された考えや、生徒たちの解法を含む活動が三角形の合同条件の成立に向かう活動であるかどうかを評価する、より強力でより広範な判断基準である。

つまり、教師は、メタ知識を実現していくために、メタ知識を持っていることがまず必要である。しかし、これまでみてきたように、それ以上に、それで生徒たちの活動を評価する必要がある。したがって、教師は、メタ知識を単に持っているだけではなく、それを明確な形で意識していることが必要であり、さらに、メタ知識の観点から生徒の活動をみることが必要であるということである。

4 考察の結果

まず最初に、メタ知識の教育的側面を2つの事例を通して考察した。その結果は次のようにまとめられる。

Ed.1 メタ知識の獲得には、認識主体（学習者）による数学的知識（体系）の性格の発見とその性格の重要性の意識の両方が含まれる。

Ed.2 メタ知識の獲得は、認識主体（学習者）の自主性、知的自律性にとって本質的である。

次に、教師がメタ知識を授業においてどのように実現するかという問題に取り組むための出発点として、実際の授業において起こっている教師と生徒との相互作用を取り上げた。そこで生起している問題点の考察を通して、メタ知識の教授学的重要性を示した。ここでは、ある意味で、教師のメタ知識と学習者のメタ知識との関係を論じた。その結果はつぎのようにまとめられる。

D.1 生徒のメタ知識の獲得を考えた場合、教師は、生徒の考えや解法を教師のあらかじめ決まっている目標としての解法から妥当であるかそうでないかを評価するのではなく、常に、問題場面との関係において評価することが必要である。

D.2 その際、教師のメタ知識が必要となる、つまり、メタ知識は、教授学的には、授業の中での生徒の考えや解法を含む活動が当該知識の獲得に本質的であるかどうかを解釈し、評価するときに重要な役割を果たす。

D.3 したがって、教師は、メタ知識を持っていることがまず必要となる。しかし、メタ知識の観点から生徒の活動をみることがさらに必要であるので、単に持っているだけではなく、それを明確な形で意識していることが必要である。

これらの結果とともに、本稿で取り上げた事例は、それぞれの側面を典型的に例証する事例として重要な意味をもっている。特に、最後に取り上げたSsA合同定理に関わった事例は、メタ知識の教授学的重要性を授業場面との関係で示す典型的な事例の開発として、ここでの重要な結果の1つである。この事例は、知識の定着をねらうことが、時として、重要な関係の探求を見落とす原因になることを示唆しており、それが教師のメタ知識の問題に依存しているということを示すものであった。ただ、ここでの典型性は、SsA合同定理の関係が教師が用いている教科書で取り扱われていないということと、それにも関わらず日頃の授業において生徒から出される関係であるという特徴によって引き出されているということに注意したい。このことは、ここでの有効性を作り出している一方、それが限界にもなっているからである。例えば、この典型性はドイツでは通用しないであろう。

5 メタ知識の実現へ向けての課題

メタ知識の意味とその重要性が明らかになってきた一方、そのことによって、これからの研究課題もまた明かとなってきた。ここでは、本稿での考察の限界に関わって、特に、メタ知識の実現へ向けての2つの課題を述べて本稿を閉じることにする。

まず第1は、メタ知識を顕在化していく研究である。本稿では、授業場面において想定しうる教師のメタ知識を顕在化したが、より広範な文脈で三角形の合同条件の性格をみて

いく必要がある。例えば、空間における感覚的知覚を論理的に分析するという文脈[29]でみれば、２つの三角形が重なるという感覚的知覚に対して、決定条件、つまり、ある条件による作図で三角形がユニークに決定されるかどうかを調べることは、そのこと自体、その論理的分析の１つの手段として重要な位置を占める。したがって、決定条件を考察することの目的をはっきりさせるためには、合同条件と決定条件との関係が授業の中での議論の一部として含まれねばならない。ところが、考察した授業場面では、少なくとも顕在的には、合同条件と決定条件とが同一視されているため、この議論がなされていない。つまり、より広範な文脈で、三角形の合同条件とは人間にとって何であるかを明らかにし、それを授業の目的や課題設定及び授業構成との関係で考察することが必要である。

第２は、メタ知識を授業において実現していく方法の研究である。D.1–D.3 の結果は、教師がメタ知識をもっていることとそれを実現することとは別の問題であるということを示唆している。実際、本稿でも、メタ知識の実現の問題を取り上げたが、取り上げた意図は、むしろ、教師のメタ知識の重要性を授業場面との関係で示すためであった。そのために、授業場面の問題点を顕在化する際に、教師の教授行為と両立するメタ知識を学習者が獲得するということを仮定していた。このことはもっともらしいと思われるが、実証的に、教師と生徒との相互作用の詳細な分析を通して明らかにされるべき問題である。特に、長期にわたる授業の分析が必要であるように思われる。本稿の分析から示唆される授業分析の焦点は、(1) 教師の当惑場面における対処の仕方のパターン及びその際の教師と生徒の間の相互作用のパターンを明らかにすることである。実際、この授業場面も教師が当惑した場面であった。また、もっと一般的に (2) 繰り返される教師と生徒の間の相互作用のパターンをみていくことも必要であろうと考える。このような分析によって、教師のメタ知識が子どもたちに十分に伝わらない原因が解明され、教師がメタ知識をどう実現していくかという問題を解決する手がかりが得られると考える。

引用文献及び註

1) Smith,B.O., *Teacher for the Real World*, Washington,D.C., American Association of Colleges for Teacher Education, 1969.

2) Schubring, G. , *Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19 . Jahrhundert : Studieen und Materialien zum Prozess der Professionalisierung in Preussen (1810–1870)*, Deutscher Studien Verlag, Weinheim, 1991, S.7.

3) IDM, Perspektiven für die Ausbildung der Mathematiklehrer, *IDM - Reihe Band 2*, Untersuchungen zum Mathematikunterricht herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1981.

4) 拙稿, 「メタ知識の意味」, 『数学教育研究』, 第９号, 上越教育大学数学教室, 1994.

5) Ep.1 メタ知識は、当該知識 (体系) の性格である。
   Ep.2 知識が対象間の関係に関係しているのに対して、メタ知識は、対象間の関係と認識主体との関係に関係している。
   Ep.3 知識はメタ知識とともに獲得される。
   Ep.4 メタ知識は当該知識が置かれている特定のコンテクストとの関係から生まれる。つまり、メタ知識は当該知識がどのようにして生まれるかによって決定される。
   Ep.5 しかしながら、その概念を一般的に理解させる機能をもつ。逆に、メタ知識は、当該知識のより一般的な理解である。
   (これは、その後の考察により加筆修正したものである。)

6) これはメリン-オルセン (Mellin-Olsen, S.) から示唆されたことである。氏は、この例を、個人による機能性の発見の例として挙げている[26]が、ここでは、これをメタ知識として明確に述べていない。一方、氏自身も、ベイトソンの学習 (learning) とメタ学習 (metalearning) の区別[27]に由来して、用語「メタ知識 (metaknowledge)」[28]を用いており、その用法を考慮すると、メタ知識をさしていると解釈できるが、IDM の研究者たちが強調する知識の性格よりも、その重要性の意識の方を強調しているように思われる。

その理由は、おそらく、氏が教師のメタ知識よりも学習者のメタ知識を問題にしているからであると考えられる。

7) アン・サリバン (槙恭子訳),『ヘレン・ケラーはどう教育されたか —サリバン先生の記録— 』, 明治図書, 1973, 34–35 頁.

8) 上掲書, 35 頁.

9) Mellin-Olsen, S., *The Politics of Mathematics Education*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987, p.52–53.

10) Freudenthal,H., *Mathematics as an Educational Task*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1973, pp.581–614.

11) *ibid.*, p.585.

12) Kamii, C.K., *Young Children Reinvent Arithmetic*, Teachers College Press, New York and London, 1985, pp.39–51.

13) 1993 年 9 月 9–13 日に、新潟県内の公立中学校の第 2 学年の教室で行われた三角形の合同条件の導入の授業の一部である。授業は通常のスタイルで行われ、その全過程が VTR,ATR により記録された。

14) 事実を明らかにすることに焦点をあてれば、例えば、ここでの問題意識を取り上げることの重要性を教師が認識していながらも、社会的な制限等によって、取り上げないこともありうるであろう。そうすると、教師をとりまく様々な社会的問題へと議論が展開してしまい、本稿のねらいである、教師にとって大切な数学についての理解は何かという問題からそれてしまうであろう。それにもかかわらず、ここで、このように実際の授業場面を取り上げたのは、以下の再定式化が現在の日本の数学教育の現状と無関係ではないということを示すためである。

15) Ernest, P., Philosophy, Mathematics and Education, *International Journal of Mathematical Education Science and Technology* , Vol.20, No.4, 1989, pp.555–559.

16) Thompson,A.G., *Teachers' Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching : Three Case Studies*, Unpublished Doctoral Dissertation, University of Georgia, Athens, 1982.

17) Thompson,A.G., Teachers' Beliefs and Conceptions : , *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM, 1992, pp.127–145.

18) Lerman, S., Problem-solving or Knowledge-centred: the Influence of Philosophy on Mathematics Teaching , *International Journal of Mathematical Education Science and Technology* , Vol.14, No.1, 1983, pp.59–66.

19) 平林一榮, 図形の指導内容の概観と問題点の考察, 能田伸彦, 福森信夫 (編) 『新・中学校数学指導実例講座 第 3 巻 図形』, 金子書房, 1991, 22–23 頁.

20) Hirschhorn D. B., Why is the SsA Triangle-congruence Theorem not Included in Textbooks?, *Mathematics Teacher*, Vol.84, No.5, 1990, pp.358–361.

21) Yeshurun, S. & Kay, D. C., An Improvement on SSA Congruence for Geometry and Trigonometry, *Mathematics Teacher*, Vol.76, No.5, 1983, pp.365.

22) Athen, H., Griesel, H., Postel, H., *Mathematik heute* für Gymnasien in Baden–Württemberg (Mathematik Sekundarstufe I, 8 Schuljahr) , Schroedel Schulbuchverlag, 1985, S.61–65.

23) Otte, M. , Bromme, R. , Der Begriff und die Probleme seiner Aneignung, in ; J.Bloch u. a. (Hrsg.) *Grundlagenkonzepte der Wissenscaftskritik als unterrichtsstrukturierende Momente*, Intuite für die Pädagogik der Naturwissenscaften (IPN), an der Christian - Albrechts - Universität Kiel, Referate des 13. IPN-Seminars, 1978, S.167.

24) Bateson, G., *Steps to an Ecology of Mind*, Jason Aronson Inc., Northvale, 1972, 1987.

25) 拙稿,「数学教育におけるメタ知識に関する研究 —メタ知識の特性とその役割について—」,『数学教育論文発表会論文集』, 日本数学教育学会, 1991, pp.103–108.

26) Mellin-Olsen, S., *op.cit.*, p.52.

27) これは、ベイトソンの原文[30]では、それぞれ原-学習 (proto-learning)、第 2 次学習 (deutero-learning) と表現されているものである。

28) Mellin-Olsen, S., The Double Bind as a Didactical Trap, in Bishop, A.J., Mellin-Olsen, S., van Dormolen, J. (eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991, pp39–59.

29) この文脈、あるいは問題は、ヒルベルトの「幾何学の基礎」の根底にある考え方であるが、それは、幾何学の公理を設定し、その相互関係を研究することであり、ユークリッド以来、数学の文献における数多くのすぐれた論文において論究されている問題である。(寺坂英孝・大西正男訳,『ヒルベルト 幾何学の基礎 クライン エルランゲン・プログラム』, 共立出版, 1970, 4 頁, 序参照。)

30) Bateson,G., *op.cit.*, p.167.