数学教育研究, 第 11 号, 上越教育大学数学教室, 1996 年, pp.21–30.

# 問題場面の構造の構成に対する下位目標からの制約

布川　和彦

## 1.はじめに

「問題場面の構造」を視点として行われてきたこれまでの解決過程の分析では、ある程度成功的な解決過程が扱われてきた(布川,1993,1994b,1995; Nunokawa,1993a,1994c)。本稿ではこれに対じ、あまり成功的ではなかった解決過程を取り上げる。その際に、そこでの問題場面の構造の変化を理解するための一つの視点として、解決者により生成される下位目標を考える。

これまでの研究では、問題の解法を基に前もって下位目標を設定し、それを視点として生徒の解決の進展を記述したり(Resnick, 1988)、指導の計画を行ったり(馬場ほか, 1989)してきた。またそうした下位目標を生徒が自分で生成できるよう、ストラテジーとして指導することを提唱する立場も見られる(Jensen, 1987)。

これに対し清水(1989)は「問題の変容」を分析の観点とし、解決者により自主的に生成された下位目標に焦点を当てている。清水(1989)は下位目標をメタ認知の生起のメルクマールとして用いているが、本稿では生成された下位目標どうしの内容的な関連に注目することで、問題場面の構造の構成との関わりを探求する。

## 2.データの収集および解決の概要

### 2.1データの収集

本稿で分析されるデータは、9回のセッションからなる問題解決過程についての調査からのものである。これは布川(1993,1994,1995)およびNunokawa(1993a,b,1994a,c)で取り上げられている調査と同一であり、被験者も同一人物である。本稿では、第9回における解決が取り扱われるが、そこでは次のような問題が扱われた。

> 問題:与えられた4面体の内接球面が、その4面体の4つの面すべてにそれぞれの重心で接しているとする。このとき、その4面体は正4面体であることを証明せよ。(クラムキン, 1990, p.15)

なおデータの採集に関しては布川(1995)を参照されたい。

### 2.2解決の概要

第9回のセッションでの解決は、おおよそ以下のような流れであった。

(i)四面体の図をかき問題の意味を確認した後、「[底面の接点を通る]垂線の一直線上に頂点があればそれで終わりか?」と発話している。「何が言えればいいんだろ」と考えて、「二等辺三角形が言えれば十分」としている。次に4つの接点を結ぶことを考えるが、うまくいかないらしく、今度は一点をとり、そこから等しい長さの三本の線を出した図、さらには一点から4本の線を出した後、それらの端点を結んだ四面体らしきものの図をかいている。

(ii)「手がかりがつかめない」としてから2分ほどして図1をかき、「2対1」、「ここ

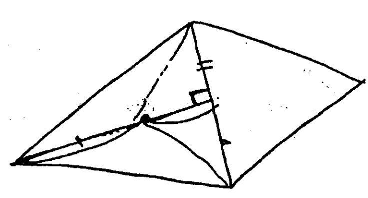


図1

垂直だって言えれば終わりなんだ」といった発話をしている。

次に「三垂線の定理」と言った後、いくつかの面の位置関係を調べているが、「この平面[図2の矢印をつけた面]がこの直線(図2の底面の中線)を含んでいればいい」、「ずれてないってこと言えばいい」といった発話をする。さらに、「もう一回きれいにかこう」として図3をかき、側面の中線の足の部分が「∠R」になることを言いたいとする。

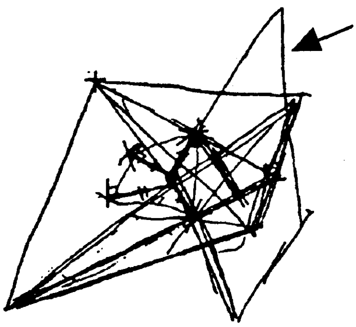


図2

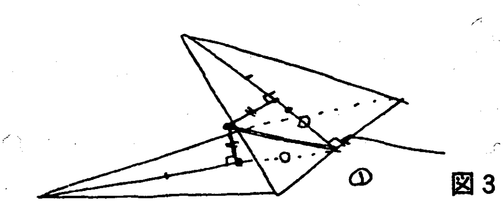



図3

(iii) 図4をかき、2つの三角形が合同になることから、結局2つの面の中線の長さが等しいことを見いだす。また「[球の中心の部分での2本の半径の]開き具合がわかんないから」全部の中線が等しいとは言えないことにも気付く。

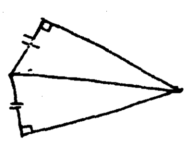


図4

次に、小さい三角形をつなげて展開図らしきものをかくが、その際に長さの等しくなる中線も記入している(図5)。さらに今度は大きな三角形をかき、その辺の中点を結ぶことで展開図を作っている。今度は等しい辺の長さに同じ印をつけ、最終的には四面体の面にあたる4つの三角形が全て合同であることを見いだす。「正四面体」の定義を考え、全部の面が「正三角形じゃなきゃだめ」とする。

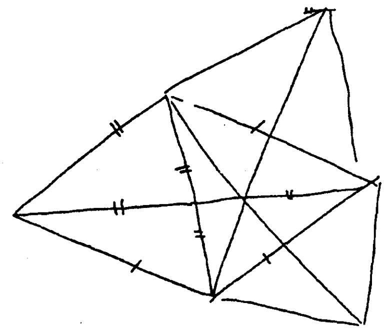


図5

(iv) 図3を「開いた形」として図6をかき、「これが菱形ならいい」とする。図3をもとに「一周するかな」と言いながら中線の相等関係を調べているが、「わかんない」として「∠R」を示すことに戻る。図3と類似の図を新たにかき考えているが、「なんだできた」として解答をまとめ始める。解答ではまた図3と類似の図をかき、球の半径が各面と垂直になっていること、よって球の中心と2面の接点でつくられる平面(平面$\alpha$と呼ばれる)は2面の交線と垂直になっていること、よって平面$\alpha$に含まれる底面の中線はその交線(=底面の一辺)と直交する、という論理が利用される。しかし解答を書いている途中で、底面の中線上にある四面体の頂点が平面$\alpha$上にあるとは限らないことを見いだしている。

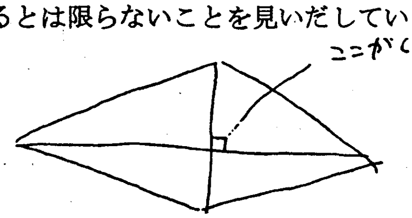



図6

(v)「だめだ」としながらも「言えそうか」と考えていたが、結局「二等辺三角形を証明するには他にはどんなこと証明するんだろう」として、∠Rや「底角が等しい」に言及して

いる。次に「違う方法を考えよう」として、新たに展開図をかく。ここでは大きな三角形の中線が一点で交わること、それが同じ長さであることが言えれば「終わり」であることを見いだしている。さらに一旦図7のような図をかいた後、今の展開図に戻り、組み立てたときの辺の接合関係(例えば図8の矢印をつけた2辺は接合される)に着目して、中線の相等関係をさらに調べている(図8)。

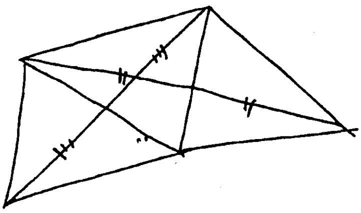


図7

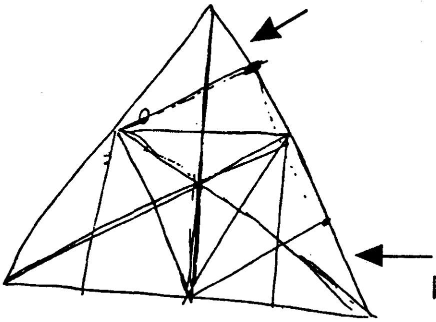


図8

(vi) 合同な三角形なら「正四面体と言えんのかな」として、鈍角三角形の形に紙を切り取り、組み立てようとする。また切り取った残りの紙の角の部分を利用して、組み立てようとする行動も行っている。結果として「鋭角三角形だ」ということを見いだしている。次に「できそうでできんな」として、図3と類似の図を新たにかく。さらに、図6のような図をかき、「[2本の中線を接続したものが]一直線になんねー」としている。また球の中心Oが2本の中線で作られる平面上に乗っているかが問題だと発話している。

(vii) 2面の交わり方を図で考えているが、Oが乗かってるかどうかを心配している。次に図9をかき、「乗かってるはずだ」としながら、どうしてかはわからないと発話している。また、乗かっていることに対して、「こうビシンと折ったときにaとd[各面の接点]が重なればいい」との発話もなされる。

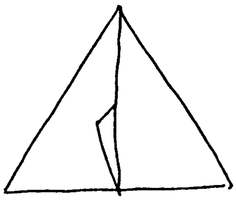


図9

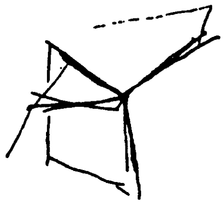


図10

(viii)「三つの面の関係でいくのかな、二つだけでやるのが無理あんのかな」と発話した後、「乗かってる」ことを示す方法を考えているが、「大体Oってのはどうやって定義するんだ」として、図10および3平面の交わった図をかく。そして「3平面で交わるような点」として球の中心Oを規定する。「3平面ってどうなってるんだ」と考えるが、「わかんねえな」とした後は、点が平面上にあることを示す方法をいろいろと考える。最終的には実験者から「終わりにしますか」と介入し、これに解決者が応ずる形で解決が終了された。所要時間は98分であった。

### 2.3 解決過程における問題場面の構造の変化

解決において見られる問題場面の構造の変化は次のようになる。

(a) (i) の最初においては、まず字義通りの構造、つまり四面体があり、その内部に内接球があり各面の重心で接している、という構造が構成された。その後「位置関係同じだから」、「一つの面どっかが二等辺三角形って言えればいい」との発話が見られ、何らかの対称性についての情報が構造に付加されている。

(b) 1点をとり、そこから等しい長さの線分を出した図をかいており、球の中心と接点を結ぶ半径が新たな要素として付加されている。また、その部分のみが取り出されて描かれているので、それらの半径が当該四面体の「骨

格」のように、四面体の構造を反映するものと見られていたと思われる。

(c) 最初の四面体の図の底面に2本の中線が引かれ、中線、辺の中点という要素が付加され、また重心について中線の交点という意味づけがされる。

(d) 図1の左の三角形をかく段階では、重心の意味は中線を2:1に内分する点になる。中線と辺の交点に直角の印がつけられており、中線と辺の交わった部分の角が新たな要素として付加されたことがわかる。また図1の右の三角形をかく際には「面がこうくっついてる」と発話しており、面どうしの接合が考えられている。

(e) 図2の段階では、矢印をつけた面(球の中心と2つの面の接点を含む面)が要素として付加されている。

(f) 図3の段階では、問題場面の部分構造として2面を取り出したものが捉えられ、2本の中線、中線と辺が交わる部分の角、球の中心、中心と各接点を結んだ半径、接点の部分の角が要素とされる。先の対称性の情報を考慮すれば、元の四面体には、この部分構造の組み合わせからなる、という構造が与えられていたと考えられる。また、中線と辺の交点と球の中心を結ぶ線が付加され、この線と球の半径、中線の一部が、図4のような合同な直角三角形として意味づけられている。2本の半径の「開き具合」に言及しており、半径により作られる角も要素であったと思われる。

(g) 図5は三角形をつなげてかいており、四面体は三角形の面のあつまりとしての構造を与えられている。辺を共有する面の中線はペアとして記入されるが、途中からはまとめて2面にまたがる長い1本の線分を引いており、2本の中線は1本の直線の折れ曲がったものとして捉えられている。また図5にみられるように、2本の中線およびある辺の中点を挟む2つの部分に、長さが等しいことを示す印がつけられ、さらに三角形の辺に「対辺等しい」といいながら印を付けている。これより、ある2面のペアを平行四辺形として捉えていると考えられる。

(h) (iii)の後半では展開図のかき方がかわっており、三角形の中点を結んで出来る展開図を組み立てたもの、という構造が構成されている。また各面が合同であるという情報も付加されている。

(i) 図6では2つの三角形を合わせるようにかかれおり、2つの面を合わせたものが四面体の重要な部分構造とされている。このとき、2つの三角形は合同になっている。また図3で中線の相等関係を「一周するかな」と発話して調べていることから、中線が四面体の周りに張り巡らされているといった構造も構成されていると考えられる。

(j) (iv)の解答をかく段階では図3と類似の図をかいており、図3のような部分構造が組み合わされたものとして、問題場面の構造が構成されている。ただし、平面$\alpha$が面の中線を含むことが暗黙に仮定されており、その仮定を含む先取り的構造(Nunokawa, 1993a)が構成されていると見ることができる。

(k) (v)でも大きな三角形の中点を結んで出来る展開図を組み立てたもの、という構造が四面体に与えられるが、ここでは大きい三角形の中線は、元の四面体の面の中線を2本合わせたものと等しいとされている。また大きい三角形の中線の交点としての重心が、要素として付加されている。

(l) 図7をかく際にも2つの三角形をつなげるようにしてかいている。ただし、左下の三角形を付加する際には、まず中線を先に引き、そこに辺に当たる線分を加えている。ここでは、中線の相等関係を元に三角形をつなぎ合わせることでできる展開図を組み立てたもの、という構造が構成されている。

(m) 図8の図をかく段階では、基本的には

(k) と同じ構造が構成されていたと考えられるが、組み立てたときに共有される辺を考え、そこで交わる中線の相等関係についての情報が付加されている。(i) での構造と同様、四面体の周りには中線が張り巡らされていると、考えられていたと見ることが出来る。

(n) (vi) で紙を折っている段階では、大きい三角形を切り取り、各辺の中点を結ぶように折っているので、(k) と基本的に類似の構造と考えられる。各面が鋭角三角形であるという情報が付加されている。

(o) (vi) の後半で図3と類似の図をかいた段階では、(f), (j) と同様の構造が構成されていたと考えられる。

(p) (vi) の後半で図6と類似の図をかいた段階では、(i) と類似の構造が構成されていたと考えられるが、ただし、2本の中線が接合されても必ずしも1本にはならない、という情報が付加されている（(i)の段階ではこの点は暗黙の前提となっていた)。

(q) 図9の時点では、図3のような部分構造が、図9のようなより部分的な構造の組み合わせとして捉えられている、と考えられる。

(r) 図10のかかれた時点では、球の中心と面での接点を結ぶ4本の半径のうちの適当なペアにより作られるような、3つの平面が四面体の内部にあり、その交点に球の中心Oがある、という構造が考えられている。

これらの問題場面の構造を見ると大きくは5つのタイプに分けられる；タイプI：字義通りの四面体の構造およびこれに付加的な構造の加わったもの＝(a), (b), (c), (e), (r)；タイプII：四面体が図3のような部分構造からなるとするもの＝(f), (j), (o), (q)；タイプIII：四面体を図6のような部分構造からなるとするもの＝(d), (i), (p)；タイプIV：図5のような三角形をつなげた展開図を組み立てたとするもの＝(g), (l)；タイプV：大きい三角形の中点を結んでできる展開図を組み立てたとするもの＝(h), (k), (m), (n)。

## 3．下位目標の生成から見た解決の特徴

### 3.1 解決過程で生成された下位目標

元の問題の目標（**A**で表す）は、与えられた条件を満たす四面体が正四面体であることを示すことである。しかし、プロトコルを分析すると、解決過程において解決者により多くの下位目標が生成されていることがわかる。そこで、解決過程の特徴を捉えるために、生成された下位目標を分析してみる。具体的には、次のような下位目標に言及している。

**B**: 四面体の底面における球の接点を通る垂線の上に、四面体の頂点があることを示す。

**C**: 全ての面が正三角形であることを示す。

**D**: (**C**のために) 一つの面が二等辺三角形であることを示す。

**E**: (**D**のために) ある面の中線が底辺に垂直に交わっていることを示す。

**F**: (**E**のために) 側面の接点を底面に投影したものが底面の中線に重なることを示す。

**G**: (**F**のために) 側面と底面の二つの接点と球の中心で作られる平面が底面の中線を含むことを示す。

**H**: (**G**のために) **G**の平面と中線がずれていないことを示す。

**I**: (**E**のために) 二つの面を合わせてできる四角形が菱形になることを示す。

**J**: (**C**のために) 下位目標**G**での平面の上に底面の頂点が乗っていることを示す。

**K**: (**J**のために) 隣接する面の2本の中線で作られる平面上に球の中心が乗っていることを示す。

**L**: (**D**のために) 面の二つの底角が等しいことを示す。

**M**: (**C**のために) 展開図として現れる大きな三角形について、その各中線の長さが等しくなることを示す。

**N**: 全ての面が合同になることから正四面体になることを示す。

**P**: (**D**のために) 隣接する二面の中線を接続したも

のが一直線になることを示す。

Q: Kであることをベクトルを用いて示す。

R: Kであることを球の中心と平面の距離を計算して示す。

S: (Kのために) 隣接する面を折り畳んだときに互いの接点が重なることを示す。

T: (Kのために) 球の中心Oの定義を考える。

U: (Tのために)点Oを規定する三平面の状態を調べる。

V: (Kのために) 点から平面に垂線を下ろし、その高さが0になることを示す。

W: (Kのために) 平面上の点と点Oを結んだ線分と、同じ点と点Oを平面上に射影した点を結んだ線分とが、同じ長さであることを示す。

### 3.2 問題場面の構造と下位目標の系列

前項で抽出した下位目標と、解決の進展を示す問題場面の構造の両者がどのような関連になっているかを考えるために、時系列に沿って対応づけてみると、図11のようになる。

これを見ると、D→Eという下位目標の系列がかなり支配的であることがわかる。実質的に、このD→Eの系列に属さないのは、図11で斜線を付けた部分に過ぎない。つまり、この第9回の解決は、「中線と辺が直交することを示すことで、各面が二等辺三角形であることを示す」という下位目標に強く方向づけられていたと言うことができる。

また図11によりわかるように、このD→Eの系列は、タイプIIおよびタイプIIIの問題場面の構造と対応していることがわかる。

ところで、解決過程において解決者により27個の図がかかれている。最初の10分間で四面体自体および内接球の中心と接点との関係を調べる図が5個かかれた後は、タイプIIおよびIIIに対応する図が12個(他に図9に関連すると思われる2面の交わりを考える図が2個)ある。また、タイプIVおよびVに対応する図が4個あるが、図7のかき方、図5や図8での探求の仕方を見ると、辺を共有する2

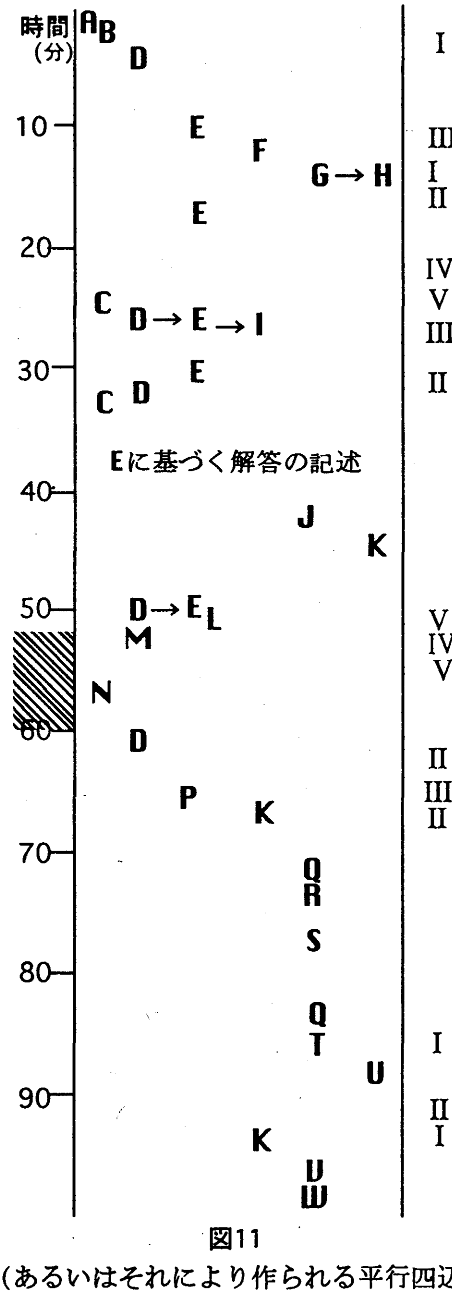


図11

面(あるいはそれにより作られる平行四辺形)を一つの単位としていることがわかる。

したがって、タイプIVおよびVまでを含めて考えるならば、図11からわかるように、解決の多くの部分では、辺を共有する2つの三角形を基本的な構造とするような、問題場

面の構造が構成されていたことになる。

3.3 下位目標からの影響

問題場面の構造は、解決者が問題場面をどのように捉えているかということであり、したがって下位目標の設定にも影響を与えうると考えられる。つまり、図3に代表されるような問題場面の構造を構成していたために2つの面を貫通する1組の中線に注意が向けられ、その中線が辺と直交することを示そうという下位目標が設定されたとする立場である。しかし本稿で扱っている解決過程では、むしろ逆に、D→Eという下位目標の系列が、問題場面の構造の構成を制御したと考えられる。

そのように考える第一の理由として、図11にも示されるように、時間的に下位目標が先行しているという点があげられる。タイプIIIの問題場面の構造にあたる図1がかかれるのは、解決開始より10分以上後であり、タイプIIにあたる図3がかかれるのは開始後約15分である。これに対し各面が二等辺三角形であることを示すという下位目標Dが言及されるのは約3分後である。また、図1がかかれる以前に、四面体自体の図で2つの面をペアにして探求する様子は見られなかった。一方で図1がかかれた後では、最初にかかれた四面体の図においても、底面と一つの側面をペアにして考察するようになっている。

第二の理由は、図1をかく際には、2番目の面は付加的に追加されていることである。つまり、最初に図1左側の三角形がかかれ、そこに中線、辺につけられた長さが等しいことを示す記号、および垂直の記号が全て先に記入されている。さらに「ここが垂直だって言えれば終わり」と下位目標Eへの言及もある。その後になって、「面がこうくっついてる」として右側の三角形がかかれている。これより、右側の面は、垂直であることを示すことを考える必要上から付加されたものと考えられる。

以上のことより、本稿の解決過程においては、下位目標の系列が問題場面の構造の構成に影響を与えていたと考えることができる。

## 4. 解決の可能性と下位目標による阻害

4.1 解決の可能性

本稿で言及している解決者は、元の問題が結局、内接球の中心と2つの面の中線とが同一平面上に乗っていることを示す、という下位目標に帰着できることを見いだしながら、ここで行き詰まり、解決に至らずに終わっている。しかし一方において、今回の解決過程においては、別の解法を成立させるだけの十分な情報が獲得されていたと考えられる。

まず、別の解法として以下のようなものを考える[1]；

(i) 隣り合う2面においては、共有する辺の中点を通る2本の中線の長さは等しい。

(ii) 四面体の1つの頂点に集まる3つの面においては、共有する頂点を通る3本の中線の長さは等しい。

(iii) (i), (ii) により、各面において3本の中線の長さは等しくなり、各面は正三角形になる。

このうち、(i) については今回の解決において既に見いだされている。

(ii) の一つの頂点に集まる3つの面で中線の長さが等しくなることは、隣接する2面の場合と同じ論理で示すことができる。すなわち、共通の点(今の場合は共有する頂点)と球の中心を結ぶ線分、球の半径、および当該の中線で作られる直角三角形を考え、斜辺共通、他の一辺である球の半径が等しいことから、それらの三角形の合同を示し、中線の相等を示すことができる。

(iii) に関連しては、まず解決の途中において、四面体の全ての面を考慮した上で、どの中線とどの中線が等しくなるかを調べていることがあげられる。調べる途中では「ああそれで一周するかな」といった発言も見られ、ここで、中線の相等関係を問題場面のできる

だけ広い範囲に広げようという試みをみることができる[2]。また、展開図として現れる大きな三角形を調べる際には、全ての中線の長さが等しくなれば正三角形になるという点に言及されている。

こうした情報に気付いていたことを考慮するならば、解決者が一つの頂点に集まる３つの面に注目することにより、問題の解決に至った可能性は十分あったと考えられる。

### 4.2 下位目標による解決の阻害

前項で考えた解決への可能性にとって、**D**→**E** という下位目標の系列は、少なくとも以下の２つの仕方で解決を阻害していたと考えられる。

3.3で述べたように、今回の解決では**D**→**E** という下位目標の系列が、問題場面の構造の構成に影響を与え、具体的にはタイプIIおよびIIIの構成が多くなっていた。例えば、図３では隣接する２面しか表現されておらず、しかも一方の面は底面という特殊な位置にあるように見えるので、１頂点に集まる面に注目しにくい表現といえる[3]。また、タイプIVやVの場合でも、四面体の展開図はかかれているが、２つの面からなる平行四辺形を基本の単位とするものとして探求がなされていた。さらに、これ以外の図では、最初にかかれた四面体の図以外では、より下位の目標を考えるのに必要な要素（１面、球の半径等）のみが抽出された図となっており、１頂点に集まる面あるいは中線への着目がしやすい図はかかれていない。

第二の仕方は、四面体の１頂点に集まる３本の中線が図の上に現れた際、それらを「１つの頂点に集まる中線」として意味づけすることを阻害することである。図８においては、展開図を組み立てた際に接合される辺に着目しながら、同一の辺に交わる中線どうしをペアとして記入していったが、この結果として１つの頂点に集まる３本の中線が自然に生成される要素 (Nunokawa, 1994b) として現れている。しかしそこでの、辺を共有する２面を基本単位とした探求の仕方が、この要素への意味づけを阻害したと考えられる。

### 4.3 成功的な解決との比較

ここで、同一の解決者によって、本稿で扱った第９回のセッションよりも成功的にアプローチがなされたと考えられる問題解決との比較を試みる。ここで成功的であったとして取り上げるのは第２回 (Nunokawa, 1994c)、第５回 (布川, 1995)、第７回 (Nunokawa, 1993a) の解決である。

布川 (1994b) が示すように、第２回および第７回のセッションでの解決においては、初期活動が失敗に終わった時点で、問題場面自体の様子を探求する活動が行われている。すなわちある条件を満たす五角形（第２回）やある条件の下で作られる交点（第７回）の様子の図をかき、その探求を行っている部分が見られる（布川 (1994b) で[部分２]とされている活動)。そして、この活動の中で後の解決の中で中心的な役割を果たすアイデアが見いだされ、問題場面の構造の大局的再構成を経て解決がなされている。

一方、第５回のセッションでは、ある条件を満たす四面体の展開図が考えられ、その中で先に大局的再構成が生ずることで、問題の四面体はある構成のされ方をした展開図を組み立てたものとして、新たに意味づけられる。この時点で、新たな意味づけを持った四面体、つまりある構成のされ方により出来る展開図を組み立てたものが、どのような様子になっているのかを、実際に展開図を作り組み立ててみることで、探求している。

このように、同一の解決者によるある程度成功した解決においては、解決過程の途中で、問題場面（問いの問われている場あるいは対象）の様子を探求するという活動が行われていることがわかる。初期活動で得られた情報

のいくつかは、そこでの探求活動を支えている（布川, 1994b）ものの、初期活動での下位目標は特に保存されていない。

これに対し、本稿で分析している第９回のセッションでの解決では、上述したように、**D→E**という下位目標の系列から離れられずにいた。確かに「各面が合同になることで正四面体が言えないか？」という問い（**N**）がなされたり、展開図として現れる大きな三角形の中線の長さが等しいことを示す（**M**）というように、この下位目標の系列から一時的に離れることはあるが、すぐに**D→E**の系列に戻っている。

また解決者によりかかれた図をみても、最初にかかれた図以外には四面体を描いた図は見られない。「正三角形になることを示す」という上位の目標に戻った場合であっても、その直後にかかれるのは辺を共有する２面をつなげた図（図３）である。また展開図を探求する場合にも、先に述べたように、問題場面の構造は辺を共有する２面により作られる四角形を基本に構成されており、それまでの下位目標から離れて四面体自体を探求するということが、行われていたとは考えにくい。

ここで、中線が底辺と直交することを示すことが、当該の三角形が二等辺三角形であることを示すためのセミアルゴリズム（清水, 1992）であるのに対し、２本の中線の長さが等しいことを示すことが、そのためのセミアルゴリズムではないと仮定すると、この系列から離れるためには、下位目標**D**より上位目標に戻る必要があったと考えられる。しかしさらに、上述のように「各面が正三角形になることを示す」に戻るだけでは、**D→E**の系列から離れにくいとすると、この系列から離れるには、問題場面自体の探求へ戻ることが必要であったと考えられる。

以上より、本稿で分析した第９回のセッションにおいては、問題場面の様子を探求するという活動が行われていなかったと考えられる。つまり、それまでの下位目標から離れて、問題場面の様子の探求を行わなかったことが、成功的な解決との相違点と言える。

## 5．下位目標からの離脱の困難性

前節で見たように、今回の解決では、**D→E**という下位目標の系列が、問題場面の構造の構成に影響を与え、解決を阻害していた可能性がある。しかし、この下位目標の系列が解決全体に渡って存在していたことを執着と呼ぶには注意が必要である。つまり、この下位目標の系列は必ずしも誤ったものではなく、この系列での最も下位の目標 **K**を示すことができれば、確かに元の問題に対する解決は得られる。その意味では、目標分析の方向自体は誤っていない。しかも、「乗かってなくてもいいのかな、いや乗っかってないとやっぱりまずい」という発話に見られるように、この事実を解決者は成り立つものと信じており、それだけにこの下位目標の系列は一層信憑性を帯びたと思われる。また、この最下位の目標が元の問題の解決にどのように関わるかについては、十分意識している。例えば2.2の(iv)で解答を書く段階では、いわば暗黙の前提の剔抉（布川, 1994a）として下位目標**J, K**が見出されており、その後「乗っかってるとすれば終わり」といった発話も見られる。これは成功的な解決に関わる重要な側面である（Schoenfeld, 1983; 清水, 1989)。

このように、生成された下位目標の系列の正しさが認められており、しかもその最下位の目標で示すべき内容が、解決者から見て成り立ちそうな（比較的単純な）事実であったという状態では、下位目標の系列から離れるという決定をする必然的な理由は見だしにくい。一つの契機としては、終了直前（解決の開始より約96分後）の「問題をよけい難しくしちゃったのかなあ」という発話に見られるような、適度な困難度（Nunokawa, 1993b）が考えられる。こうした「正しさ」とは異な

る基準に依らねばならないとすると、一度設定された下位目標から適切な時点で離れることは、難しい課題と言えよう。

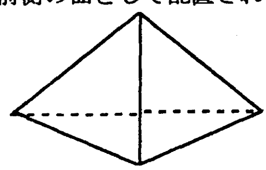
## 6.おわりに

本稿では、あまり成功的ではない解決過程を下位目標を観点として分析することにより、ある一定の下位目標の系列が優勢な場合に、問題場面の構造の構成が制約を受けることを述べた。また、同一の解決者によるより成功的な解決過程との比較から、一時的に下位目標の系列から離れ、問題場面自体の様子を探求するという活動の必要性が示唆された。

ところで、下位目標そのものについても、その定式化や重要性の認識は、解決の進展につれて変化している。第5節で述べた下位目標に関する意思決定の難しさをも併せて考えるならば、下位目標の生成自体も実は複雑過程であると言えよう。

### 註および引用・参考文献

1. ただし、これはクラムキン (1990) において与えられている解答とは異なる。
2. 問題場面の内部で見出された特徴を、問題場面の多くの箇所に適用していくことは、一つの解決の方針を示すものとして他の解決でも観察されている (布川, 1994a)。
3. 例えば、クラムキン (1990) の解答では、一頂点に集まる2面に着目した考えがなされているが、そこでの図では2面は次のように、四面体の手前側の面として配置されている。



また、クラムキン (1990) の解答は、この2面をもとに組み立てられており、したがって本稿での解決者が2面のみを中心に考えたことが、成功しなかった直接の原因と考えることは難しい。


馬場和昭, 川畑　勝, 金森久人. (1989). ストラテジーを用いた学習指導について：サブゴールを中心として. 第22回数学教育論文発表会論文集, 319-324.

Jensen, R. J. (1987). Stuck? Don't give up! Subgoal-generation strategies in problem solving. *Mathematics Teacher, 80* (8), 614-621 & 634.

クラムキン, M.S.(1991). 数学オリンピック問題集：アメリカ編 (国際数学オリンピック日本委員会訳). 東京図書.

布川和彦. (1993). 大局的再構成の生じた解決の特徴. 第26回数学教育論文発表会論文集, 321-326.

布川和彦. (1994a). ラカトシュ理論の数学的問題解決論への援用. 数学教育研究 (上越教育大学数学教室), *9*, 23-32.

布川和彦. (1994b). 数学的問題解決における初期活動の影響: 問題場面の構造の再構成の観点から. 第27回数学教育論文発表会論文集, 323-328.

布川和彦. (1995). 数学的問題解決における物理的モデルの役割：四面体の問題についての解決過程の分析から. 数学教育研究 (上越教育大学数学教室), *10*, 11-20.

Nunokawa,K. (1993a). Prospective structures in mathematical problem solving. *Proceedngs of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp.49-56). Tsukuba.

Nunokawa,K. (1993b). Solvers' spontaneous balancing of the level of difficulty in mathematical problem solving. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 12* (B), 47-56.

Nunokawa, K. (1994a). Improving diagrams gradually: One approach to using diagrams in problem solving. *For the Learning of Mathematics,14* (1),34-38.

Nunokawa, K. (1994b). Naturally generated elements and giving them senses: A usage of diagrams in problem solving. *Proceedngs of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp.376-383). Lisbon.

Nunokawa,K. (1994c). Solver's structures of a problem situation and their global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior, 13* (3), 275-297.

Resnick, L. B. (1988). Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 32-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld,A.H.(1983). Episodes and executive decisions in mathematical problem-solving. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 345-395). Orland,FL: Academic Press.

清水紀宏. (1992). 数学教育におけるセミアルゴリズムに関する研究：セミアルゴリズムの類型化について. 第25回数学教育論文発表会論文集, 333-338.

清水美憲. (1989). 中学生の作図問題解決過程にみられるメタ認知に関する研究. 数学教育学論究, *52*, 3-25.