数学教育研究, 第 11 号, 上越教育大学数学教室, 1996 年, pp.31–40.

SsA 合同定理を授業で取り上げることの意義

岩崎　浩

1　緒論

教師の数学の見方が授業に影響を与えることが指摘されて既に久しい。教師の数学の見方の重要性が最初に意識されたのは、1960 年代のアメリカの大規模な教育改革の失敗に関わる議論においてであった (Schubring, 1990)。この暗黙的ともいえる教師の知識についての見方は、教師がその知識内容を詳細に知っていることとは明確に区別される。むしろ、その知識をどう捉えているかということである。このことは、「知識についての知識」という言葉によって顕在化されてきた (Smith, 1969)。さらに、この「知識についての知識」は、ドイツの IDM の研究者たちによって、認識論的観点から見直され、数学教育学の専門用語「メタ知識」が導入された。その重要性は、教師教育、数学史、概念獲得など様々な文脈で指摘されてきた (IDM, 1981; 拙稿,1994,1995 参照)。

これらの研究の流れは、広くは教師の数学観、数学の哲学に関わる諸研究へと受け継がれてきていると捉えることができる。典型的なものとしては、例えば、数学教師の数学の捉え方と指導法との間の整合性を指摘した事例研究 (Thompson, 1982) や新任教師の数学の一つの見方と現実の教室での実践との間の葛藤を指摘した事例研究 (Cooney, 1985) を挙げることができる。また、相対的な数学観を教師が持つことが教育的にみて有効であるということも指摘されてきた (Lerman 1983)。

一方、教師が自分自身の数学の見方がいかに指導に影響を与えているかを単に指摘するだけでなく、教師の見方とより整合するようにするためには指導のどこが問題かや、あるいはもっと積極的に、教師の見方そのものを子どもの活動に照らしてより好ましい方向に改善するためには、どうすればよいかという代案を示しうる事例の開発が必要であると考える。岩崎 (1995) は、三角形の合同条件の導入の授業場面を例として、教師の見方の違いによってもたらされるであろう場面の解釈の相違と、その相違によって生徒たちの活動がどのように異なりうるかを例証た。そして、指導が教師の見方とより整合するためにはどうすればよいかをメタ知識の観点から考察し、メタ知識的解釈を教師が意識的にすることによって改善しうるということを理論的に明らかにした。このような授業場面の哲学的反省自体が教師の見方の重要性を示唆する事例としての意味をもっているが、これに基づいた授業を構成・実践することは、この理論的帰結に更なる反省を加えることとなるであろう。この反省を試みることが本稿の目的である。

2　問題の所在 —ある授業場面と SsA 合同定理

どのようにして授業を構成・実践していったかについては後で述べる前に、以下の議論を明確にするために、上述の理論的帰結に、簡単にふれておくことにする (詳細については, 岩崎,1995 を参照)。

今、仮に、AB = 5.6cm BC = 5cm CA = 4.1cm $\angle$A = 60° $\angle$B = 45° $\angle$C = 75° の三角形 ABC と合同な三角形 DEF を作図する様々

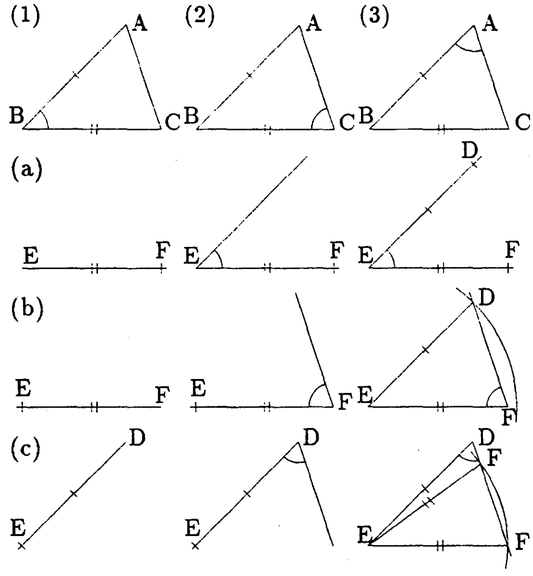

図 1: 再定式化された場面

な方法を考えているとしよう。図1は、三角形の合同条件が、与えられた三角形と合同な三角形を描くための条件、つまり、決定条件の探究の活動を通して発見的に指導されているという設定での 2 辺と 1 角の場合の検討場面を示している。そして、図 1の通り、(1),(2),(3) の 3 つが生徒たちから出され、それぞれが (a),(b),(c) の作図によって確かめられている。

この場面は、実際の授業場面の問題点をより明確に表現するために、筆者がその実際の授業場面を再定式化したものである。主な論点を述べると次のようになる。

この場面の解釈は、教師の数学の見方に依存し、特に、ある見方に固執すると、場面の解釈を制限してしまう。つまり、教師が、三角形の合同条件は、3 辺相等、2 辺夾角相等、1 辺両端角相等であり、これを発見させ、定着させることが三角形の合同条件の指導であると考えていると、この場面は、2 辺夾角相等の合同条件の成立とそれ以外の 2 辺と 1 角の条件に対する反例を示す格好の指導の場面として解釈してしまう。この見方には、2 辺と 1 角の場合の合同条件は、2 辺夾角相等の関係だけであるという認識が含まれている。その結果、この場面が示唆しているもう 1 つの重要な関係を見落とす可能性がある。それは、(2) の条件では 1 つに決まるのに、どうして (3) の条件では 1 つに決まらないのかという素朴な問題意識と関係している。この素朴な問題意識を作図活動に基づきながら作図の可能性を反省すれば SsA 合同定理としての定式化が可能である。そして、この例から 2 つの問題点、すなわち、教師の教材の見方によって、新たな数学的関係への発展が制限される可能性と、生徒にも固定的な教材の見方をすることを助長してしまう可能性が示される。結局、教師が問題解決的な数学の見方をしていることと、それを実現する問題とは別であるという立場に立ち、次のように考察した。教師は既に知識としてもっている 3 つの合同条件に関係づけて場面を解釈していたことが問題解決的な見方を実現することの障害となっている。そして、問題解決的な見方を実現するためには、教師がもっているはずのこの知識に対するより高次の知識—メタ知識、すなわち、三角形の合同条件とはそもそも何で、どのようにして成立すべきものであったかということに関する知識—に関連づけて場面を解釈することが必要である。前者を知識的解釈、後者をメタ知識的解釈と表現すれば、知識的解釈に加えて、メタ知識的解釈をすることが問題解決的な見方を実現していく上で必要であるというのが理論的帰結であった。この理論的帰結は、指導が教師の意図である問題解決的な見方とより整合するためにはどうすればよいかに対する 1 つの打開策であった。そしてこの試みは、教師の数学の見方を特定し、その教授活動の特徴と関連づける従来の研究を前進させようとするものであり、教師の数学の見方をどのように生徒たちにコミュニケートしていくかという観点からの 1 つの試みであった。

ここには、仮定している事柄がいくつかある。勿論、仮定していること自体は何の問題もない。というのも、ここで重要なのは、実際にそうであるかどうかということよりも、この例が教師の見方の重要性をより明確に指摘しているかどうかであるからである。しかし、これとは別に、このような場面を実際に設定した場合、これら仮定している事柄は実際どうなるかということも興味深いことである。また、このような実践的関心だけでなく、このことを通して、理論的帰結についてより詳細に検討することもできるであろうし、より説得力のある事例を開発できる可能性もあるであろう。

3 協同的指導実験

実験授業は、平成 7 年 6 月 9,12,13,16 日に

それぞれ1時間ずつの計4時間、国立大学附属中学校の2年生1クラスを対象として実施された。授業者は、数学教育学の分野で修士の学位を有する同校に所属しているベテランの教諭である。授業は、教室の前と後ろ2台のVTRと、教師携帯用のATRによって記録された。後ろのVTRは主に教師の動き板書を記録すること、前のVTRは生徒達の表情や教室全体の雰囲気、特に、発話として表現されない生徒の理解の様子を記録することを意図していた。これらを基に授業4時間分のプロトコール及び、再記録を作成した。認識論的分析のための再記録の作成方法についてはSteinbring(1990)を参考にしている。

実際この授業は、前節での理論的帰結を検討するための授業というよりは、むしろ、教師のメタ知識を生徒たちにコミュニケートするにはどうすればよいかを三角形の合同条件の導入に関わる一連の授業を通して考えようとして筆者と授業者が協同で計画したものである。この問題は授業者の問題意識でもあり、その意味で、協同的指導実験と呼んでいる。授業構成の手続きは、筆者の方で、教材の捉え方を明確に反映した指導案を作成・解説し、それを授業者が批判的に検討しながら、より具体的な授業の構想を練り上げていくというものであった。

4 知識とメタ知識について

授業構成の手続きにおいて、必然的に、筆者は、知識とメタ知識を今まで以上に具体化しなければならなかった。メタ知識は、知識との対置することによってはじめて意味をなす関係概念であるので、まず、知識とメタ知識の関係について述べる。ついで、そのような前提に立った上でメタ知識についてより詳しく述べることにする。

4.1 知識とメタ知識の区別

筆者は、三角形の合同条件の知識とメタ知識を次のように区別する。知識は、三角形の合同条件の関係の存在とその関係が成り立つことの正当化に関係している。これに対して、メタ知識は、三角形の合同条件を求めることとはそもそもどういうことか、何を根拠として、三角形の合同条件として認めていくのかということに関係している。一方、知識とメタ知識とは本来不可分の関係であるから、授業構成においてこの区別は、本質的に、どちらにより重点を置くかの区別である。メタ知識に重点を置くということ、つまり、メタ知識を意識した授業構成は、三角形の合同条件を公理としてどのように設定していくかという活動、つまり、三角形の合同条件を受け入れるとはどういうことかということが授業における中心的目標となることを意味している。そして、三角形の合同条件を成り立つものとして認め、それを根拠として論証を指導するというような、知識を意識した授業構成とは明確に区別する。

4.2 メタ知識の意味

それでは、この場合のメタ知識とは一体何を意味するのか。もう少し具体的に述べよう。ここでの三角形の合同条件に関わるメタ知識とは、次のような2つの見方として表現しうるものである。すなわち、1つは、三角形の合同条件とは、ぴったりと重なるという空間的直観を三角形の構成要素である辺と角とによって論理的に捉えようとする活動であるとする見方で、もう1つは、「いくつかの最小の要素から全体を規定しようという、ギリシャ的な考え方」[平林,1991,22頁]や、様々な幾何学的関係を認識したり論証の根拠としてより合理的なものを求めたいなどの必要性に応じてわれわれが創造していく2つの三角形間の関係によって表現される思考の道具であるとする見方である。これら2つの見方は、それぞれ、ヒルベルトのという「空間的直観を論理的に分析すること」[1]、とい

[1]これは、ヒルベルトが、その著書の序文(Hilbert, D.(1930). *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig nud

う数学的活動の本性と「プラグマティックな基準による(合同条件の)採用[2]」によって特徴づけることができるであろう。筆者は、これらの見方が三角形の合同条件を求めるここでの活動を方向づけているものであり、三角形の合同条件の活動に含まれるべき活動を規定しているメタ知識であるとみている。そして、生徒たちに、このようなメタ知識とともに三角形の合同条件を理解してほしいと願っている。

ここで、教師の三角形の合同条件の見方をメタ知識という別の言葉で表現していることになっているが、その理由の1つは、知識とメタ知識との階層的関係の重要性を強調するためであり、かつ、知識とその見方とを常に結びつけて考えることの重要性を強調するためである。

4.3 知識とメタ知識との関係

このことをより明確に表現するのに Jahnke (1994) の図式が便利である。この図式は、図のように右下の小さい方の円 (第1の円 "primary circle") と、その円を部分として含む大きい方の円 (第2の円 "secondary circle") から成り立っている (図2参照)。氏は、これを「2重の円 (twofold circle)」と呼んでいる。ここで、図式の中の記号Sは科学者 (scientist)、Tはその科学者が立てた理論 (theory)、Oは対象の領域 (field of objects) を表現している (理論は、この対象の領域の1つの解釈と捉えられている)。真ん中の円は、科学者が理論を立てたりそれを検証したりするプロセス

Berlin, Verlag von B. G.Teubner, S.1.) において、ユークリッド幾何学の公理的構成の問題として述べていることであり、ヒルベルト自身の幾何学的活動を方向づけている一種のパラダイムでもある。

[2] ここでは、この言葉を次の意味で用いている:「[ある言語的枠組の] 採用は、真とも偽とも判断できない。なぜなら、それは主張ではないからである。それに対しては、単に、言語の目的とされているものにとって都合がよいかどうか、より実り多いものであるかどうか、より助けになるかどうかを判断しうるだけである。」(富田恭彦, クワインと現代アメリカ哲学, 世界思想社,1994,94 頁)

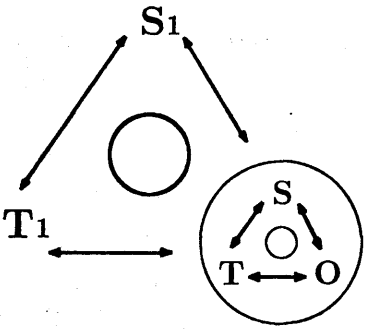

図 2: Jahnke の図式

が線形的というよりもむしろ巡回的であることを示唆している。また、S1 は歴史家 (historian)、T1 は歴史的解釈で、その対象の領域に第1の円が位置づけられている。

ここでSは、三角形の合同定理をある対象Oを表現しようとして、あるいは、ある対象Oに適用しようとしている科学者であると考えると、この場合、その科学者は、例えばヒルベルトと考えてもよいであろう。一方、S1は、ヒルベルトの活動そのものの意味を考えている歴史家であると考えられるであろう。そうすると、T1は、その意味、あるいは、解釈ということになる。そうすると、知識とメタ知識の関係は、TとT1の関係に対応するとみることができるであろう。この図式が有効なのは、次の2つのことを同時に表現しているからである。1つは、知識とメタ知識のこのような階層的関係を表現している点であり、もう1つは「もしも、知識が事物の間の関係に属しているとみなされるならば、当然、人間主体との関係−メタ知識−が含まれているということになる」(Otte & Seeger, 1994, p.351) という意味で、メタ知識が、対象と認識主体との関係についての知識であるというメタ知識の特徴を表現している点である (前頁脚注1を参照)。

強調すべき点は、ヒルベルトが三角形の合同定理 (T) を考えているときに、この歴史的解釈に相当するT1を意識していた点である。

つまり、ヒルベルトは、Sの位置に留まっているだけではなく、S1の位置からもTやOをみていたということである。このことは、歴史的解釈によって科学者の活動が方向付けられているとするJahnkeの主張とも一致している。

5 生徒のメタ知識の評価の視点

三角形の合同条件のメタ知識は、上述の捉え方からすれば明らかに、合同条件を定義する能力と関係している。したがって、生徒たちが授業において構成したメタ知識を評価するには、何らかの形で「三角形の合同条件とは何であるか。」あるいは、「どのようにして成立すべきものであるか。」についての彼らの理解を顕在化しなければならない。一方、このことを直接聞くことは難しい。

指導実験では、授業において合同条件を求めていく活動の最後に、生徒たちにとって新しい条件(SsA合同定理)を合同条件として受け入れるかどうかを問う場面を設定することにした。生徒たちにとって全く新しい条件を教師に依存することなく合同条件として受け入れたり、あるいは排除したりすることができれば、生徒たちは「三角形の合同条件とは何であるか」あるいは、「どのように成立すべきものであるか」の理解をしているとみなすことができる。また、その判断基準を明らかにすることによって、授業過程において生徒たちが獲得してきたと考えらるメタ知識を評価することができると考えたのである。

6 授業の文脈と主要場面の分析

当該授業は、認識論的にみて、大きく2つの局面から成っていると捉えられる。最初の局面において、生徒たちは既に、幾何学的関係を認識したり、確認する道具として三角形の合同を使うことができたが、その用い方は直観的であり、対応する辺が本当に等しいのかと尋ねると、その理由につまることがしばしばであった。教師は、生徒たちが、ある関係が成り立つことの根拠に三角形の合同を用いている場を設定した。そして、そのときに生徒たちが直観的に等しいと認めていると考えられる辺や角を指摘することによって、その根拠が直観的であることに気づかせ、より明確な根拠を示すことの必要性を生徒の問題としていった。

次の局面では、これを受けて、上述の問題が教師によって次の課題として定式化される。

> $AB = 5.6cm$, $BC = 5cm$, $CA = 4.1cm$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 75°$の三角形ABCと得体の知れない三角形$A'B'C'$がある。このとき、2つの三角形が合同になるには、どんな条件を満たせばよいか。

最初に、教師は、1つの条件のとき、例えば、$AB = A'B' = 5.6cm$ のとき、これらの三角形は合同かと尋ねた。勿論生徒たちの答は否であった。なぜかと教師が聞くと、その条件を満たす$A'B'C'$は沢山あるとか、A'はいくらでも動くことができるなどと答えた。じゃあ、条件を増やして2つにしてみようと教師が言い、例えば、$AB = A'B' = 5.6cm, BC = B'C' = 5cm$ の場合はどうかと聞くと、勿論だめだと答えた。何故かと聞くと、同じようにその条件を満たす三角形は無数にあり、特に、A'がB'を中心とする半径$A'B' = 5.6cm$の円周上を動くことができると説明した。教師は、生徒の発言と同時に、黒板に板書した。このようにして、教師は提出された条件が三角形の合同条件になるかどうかを判断するための思考の道具として作図を導入していった。そして、その時間の終わりには、「条件を満たす三角形が1つに決まればその条件は合同条件としてよい」ということが合意された。さらに、この作図を通して、条件の数を1つの場合から順に増やしながら、考えうる条件を全て尽くして調べていったというのがこの授業の大まかな文脈である。

以下、主要場面を順次取り上げながら分析していくことにする。

6.1 授業構成の変化が引き起こした相互作用

筆者との最初の指導案検討の際の授業者のコメント:「合同条件は通常5分程度で終わることもあります。」「生徒たちが知っていることをどう発見するのか。」から推察されるように、この指導実験を受け入れることは、少なくとも、この合同条件の導入の指導に関して、授業者は、通常の授業のスタイルを変更することを意味していた。

この授業構成の変更は、今まで答えと考えていたことが答えでないことを理解することを生徒たちにも要求した。生徒たちのこの矛盾は、次のような相互作用として生起した。

[場面 1](I,p156-164)

156 **T:** いいですか?ん、例えば、じゃあ、この2つが完璧に合同だと、いうことがいえるためには、こっちの三角形(三角形 $A'B'C'$を指しながら)どんな条件つけばいいですか?はい、kubo 君どうぞ。

157 **kubo:** えっと、ABCの全ての辺の長さが、えっと、一致する。

158 **T:** 一致する、そうだね、全ての辺の長さが一致する。そして?kusa 君何ですか?全ての辺と?

159 **kusa:** えーと、どこか1辺の長さと、

160 **T:** ちょっ、ちょっ、ちょっとまって!合同だってことをいうためには全ての辺と?

161 **kusa:** (不思議な顔をして後ろを向く)$A'B'$, $B'C'$ …辺全部。

162 **kusa:** えっ。

163 **T:** 今、全ての辺があって、こう、これとこれ全く同じだっていうときには、全ての辺が長さが同じということと、後何がわかればいい?

164 **kusa:** それは、それだけでいいんじゃない。

ここで教師が期待していることは明らかに三角形の合同の定義であるが、生徒たちはその答えとして合同条件を発言しようとしている。この相互作用のパターンから生徒たちは、最終的な答えは今自分が知っているものになるのだが、今ここではいうべきではないと感じているようであった。この相互作用のパターンはその後、1時間目授業の終わり(局面 II-3.(b))で再びより明白な形で生起するが、その後生起していない。

6.2 生徒にとって意外な事実と発見

6.2.1 1つに決まるから1種類に決まるへ

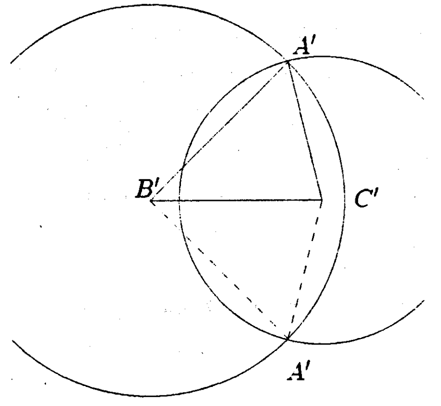

図 3: 2つの A'が決まる作図

次に、全ての場合を調べようということで、条件を1つの場合(6)、2つの場合(15)が生徒の発言により順次列挙された。これらが全ての可能性を尽くしていることは、その手続きが明らかにしていた。また、その全てが合同条件とならないことは自明であった。次に、3つの場合を考えることとなった。最初に生徒たちから3辺の条件が出された。教師は、これを確認しようともちかけた。教師は黒板で、生徒の発言と一緒に作図をした。生徒たちは、2つの円が2点で交わっている作図を当然のこととして受け入れている[3]。ところが、この作図の当然の帰結と思われた、$B'C'$の上下に2つのA'が決まるということは、生徒たちにとって意外な事実であった([場面 2]参照)。つまり、このとき生徒たちは上側に出来た点しかみていなかったということである(図3参照)。

[場面 2](II,249–262)

249 **T:** いくつ決まった?

250 **S:** 1つ。1つ。

251 **T:** ん?

252 **S:** (あわてた様子で)あっ2つ(下の教師の発言とほぼ同時)

253 **T:** 1つか?(すこし疑いの強い調子で)

254 **S:** あっ、2つ、2つ。

255 **T:** えっ、これ何だ。

[3]これが当然のこととして受け入れられたのは、辺 $B'C'$が描かれたとき、次に、$AB = 5.6cm$ の条件があるときに、A'としてとりうる点が B'を中心とする半径 $5.6cm$ の円周上にあることが局面 II-2.(b) で生徒たちにきわめて自然な形で共有されていたからである。

256 **S:** A'。
257 **T:** A'。これは？
258 **S:** A'。
259 **T:** この作図の条件[4]、作図の条件から、(黒板の条件を黄色いチョークで囲いながら) 描いたんだよな。
260 **S:** はい。
261 **S:** あっそっか。
262 **T:** ちょっとこれ、入っちゃったけど、2 つ決まるなぁ。

[場面 3](II, p263–270)
263 **T:** えーっ、そうするとさー、こうなの？えーっ、こうですか？(それぞれの A' と B',C' を定規で結ぶ)
264 **S:** 決まってないな。(つぶやき)
265 **S:** あーほんとだ。(つぶやき)
266 **T:** いやー、ここ、ちょっと入っちゃったけど、こうだね。
267 **yama:** あーっ、そうだ。(つぶやき)
268 **kusa:** おかしいじゃあーりませんか。(つぶやき)
269 **T:** えっ、おかしいじゃあーりませんか？おい、1 つに決まってるか 1 つに。
270 **S:** 決まってない。

[場面 3] は、条件を満たす点が 2 つ決まったにもかかわらず、生徒たちは、下側にできる三角形の可能性を意識していなかったことを示している。逆に、このことは、条件による作図を同じ三角形を描くことに強く意識が向いてたことを明らかにした。そして、これを契機として、「ある条件で作図をして 1 つに決まれば (正確には同じ図形が描ければ) その条件は合同条件となる」という見方から「ある条件を満たす全ての図形が 1 種類に決まればその条件は合同条件となる」として再協定された[5]。

結局、ここでの相互作用は、同じ図形を描くという意識から、条件を満たす図形を描くということへの意識の変化を促した。このことによって、教師によって導入された作図を伴う探究方法は、生徒たちにとって、三角形の合同条件を調べるより確かな思考の道具となった。この思考の道具の発達は、次に述べる生徒の新しい関係の発見にきわめて重要な意味を持っている。

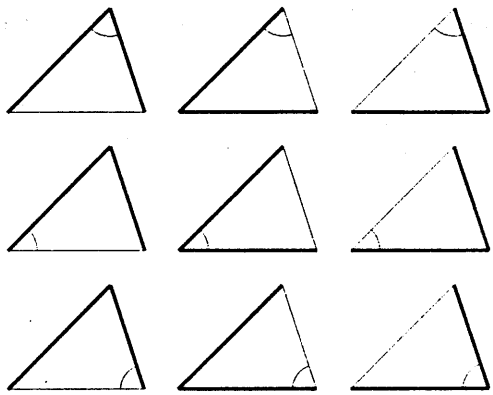

図 4: 9 種類の条件

6.2.2 生徒による新しい関係の発見

生徒による新しい関係の発見は、教師が、2 辺と 1 角の場合の条件 9 つ (図 4参照) を各自が作図によって確かめる活動をしている最中に、教師が活動の時間を延長することを決定した直後に起こった。

[場面 4](II,p440–463)
440 **T:** 作図の時間延長しますね。
441 **yama:** あれーー！
442 **yama:** ねー、真ん中の隣やってみ。
443 **yama:** おかしい！しまった。
444 **yama:** あれーー！
460 **T:** じゃ、ちょっと、描き方の確認するんですが、…(略)…描きにくかったら、角度の付いている辺をまず描いて、角度の付いている辺をまず描いて、そっから描いていけば…
461 **yama:** やりにくいんじゃないんですよ、先生。
462 **S:** 答えが 2 つでる。
463 **yama:** やりにくいレベルじゃない。

生徒の「たまたま、そのときに、ちょっと大きく円を描いてしまったんですよ。」(IV.p22) という発言にみられるように、その発見は経験的な要因に支配されていたと考えられる。つまり、2 箇所で交わるような図を描いていなければ少なくともこの発見はなかったということである。一方、このような経験的事実だけで発見へ至ったとは考えにくい。というのも、その交わったそれぞれの点を、同等に、条件を満たす点として認識していなくてはならないからである。もしも、条件で三角

[4] $A'B' = 5.6cm, B'C' = 5cm, A'C' = 4.1cm$

[5] 実際、ここには、"同じとみること"に対する心理学的抵抗と合同を確かめる方法の中で合同を使っているという論理的矛盾とがあるが、このことは、ここでは深く立ち入らない。

形 ABC と同じ図形が描けるかどうかという意識が強く働いて作図をしていたとすれば、前節で述べた通り、一方の交点 (それをとればもとの図形と同じ形にならない方) を無視してしまう可能性があるからである。

要するに、この生徒の発見には、経験的事実の存在と、これに加えて、その経験的事実の結果としての交点を作図の条件が満たされた点として認識できることが必要であったということである。注目すべきは、前節の意外な事実を契機にして発達した認識の道具としての作図がこの認識を可能にしているということである。

もう 1 つ重要なことは、これを契機として、少なくとも、この生徒に関しては、[場面 1] のような相互作用がみられなくなることである。その相互作用は、生徒がおもむろに既に知っている合同条件を先に口走ってしまうことを契機として生起している。このような契機は、その後、次の箇所で生起する。

[場面 5](IV,p142–147)

142 **T:** じゃあ、そんなのこったんですが、それ、こっち (残りの 6 つを指している。) にいったときに、三角形が 1 つに決まる条件というと、この中、残り 6 つの中、どうでしたっけ、決まるのが？はい、まだ何か意見？はい。

143 **naka:** はい、えーと、2 辺夾角と、あと、1 つの辺とえーと、それを夾む 2 つの角が決まっていると、条件っていうか、

144 **T:** ん。あーなるほどなるほど、ちょっと待って、それ、そこは、まだ、この下にならない？1 つ、こう、角度の出てくる、今、辺 2 つと角 1 個の場合で、やっていこうとしてますから。はい、はい、ありがとうございました。次、naka さんのことでやらんといけんのですね。yama 君何でしょう？

145 **yama:** はい、一応、まず、できてるものは、えーと、下の欄が 2 つと右上が 1 個できてますよね。

146 **T:** はい。

147 **yama:** で、それが何でかとかいうのをいうんですよね？

ここには、まだ確認されていない条件である角-辺-角の条件がある生徒からおもむろに発言される (IV,p143) が、以前のように、「何てことを！」(I,p355)「言ってはいかん！」(I,p363) のような生徒たちの動揺を含んだ発言を伴って起こる、上で述べたような相互作用のパターンにはならない。このことは、今まで自分が考えていた答えが答えでないことを生徒たちが理解し始めていることを顕著に示している。

6.3 SsA 合同定理の協定

図 4 が全て作図を通して検討された後、生徒たちは、視覚的に辺角辺 (3 つ) と辺辺角 (6 つ) とに区別した。ある生徒は、これら 6 つは、場合によっては出来たり出来なかったりするということを発表する。黒板の図を使って説明する中で、それが条件の中の 2 つの辺の長さの大小関係に関係があることが明確に意識されていく。

教師は、実際に 1 種類に決まっているのにどうしてダメなのかと揺さぶりをかけた。しかし、別の生徒の、その数値だからできるという意見で、まとまるようにその時間は終わった。次の時間、この議論の続きで右上のは与えられた数値に依存しているという生徒の発言の後、教師は、また、前の時間と同じように揺さぶりをかけたが、結果は同じであった。教師はこれらの生徒の根拠を逆手にとって、条件を 4 つにしていいのなら、これは、合同条件として認めていいのかと聞くと、それは受け入れられたので、その条件をはっきりさせることとなった。つけ加えられるべき条件は生徒たちによって「角から延びる辺≦辺から延びる辺」と定式化され、いわゆる、SsA 合同定理は、辺-辺-角-「角から延びる辺≦辺から延びる辺」と表現された。しかし、結局、これは、合同条件として受け入れられなかった。その代表的な根拠は、次のものであり、教師はこれらの意見を肯定的に受け入れた。

> **yoshi:** 最小限でできれば一番いいんだから、その上の 3 つは、条件 3 つでいいけど、下のやつは、…辺-辺-角に、それにまた 1 つ条件が加わっているから、最小限では描けないから。(IV,p347-355)
>
> **yama:** …その条件をやると、最初の三角形を選ぶわけですよ、最初の三角形がもし、もう既

に、その条件を満たしていなければ、描けないわけですよね。そしたら、どんな三角形にも使えるといっても、最初の三角形がもしそれでなかったら、描けないので、それは、最初の三角形を選ぶ、あの一、図々しいというか、…その一、条件なので、どんな三角形にもいえるというのはいえないんじゃないでしょうか。(IV,p374-375)

これらの発言に代表されるように、ここでの生徒たちの議論は、もはや、生徒たちが、三角形の合同条件が成立するかどうかの判断において教師から十分に自律していることを示している。

6.4 要約

指導実験は、教師の授業構成に変化をもたらし、この変化は[場面 1]の相互作用のパターンとして生起した。このときの教師の指導は、生徒たちが三角形の合同条件の成立を考えていくためのより確かな認識の道具を確立することであったということが認識論的分析から明らかとなった。一方、この間の相互作用を通して、教師は合同条件について知っていることをいうことが答えにならないというメタレベルのメッセージを送り続けているが、生徒たちには伝わらない。その結果、上と同じ相互作用のパターンを生起させている。ところが、意外性の経験と新しい関係の発見の経験以後、この相互作用のパターンはみられなくなる。このことは、教師の制御の下での相互作用によって確立されつつあった方法が結果的に生徒たちの認識の変化をもたらしたこと、また、そのことによってこの方法を考えていくことの意義に生徒たちが気づき始めたことを意味している。そして同時に、授業の課題の解決は、合同条件をいうことではなく、それらがどのように成立していくかを考えていくことであるという、合同条件に取り組む活動の目標そのものを制御するメタ知識の変化をもたらしたことを意味していると考えられる。

7 SsA 合同定理を授業で取り上げることの意義

最後に、2節で示した授業場面の再定式化の場面に照らして、ここでの実際の授業を振り返ってみることにする。

まず、SsA 合同定理に発展するであろう問題意識についてであるが、結局のところ、生徒たちは、この授業では持たなかったといえそうである。というのも、生徒たちは、2辺と1角の場合の9つの条件を1つ1つ確認していく作図活動の中で、SsA の関係を発見したが、その後、その関係を2辺夾角以外の6つができたりできなかったりすることを説明するために用いていたからである。つまり、視覚的類似性から9つある2辺と1角の関係を2辺夾角とそれ以外としてみていたということである。一方で、ある生徒による発見に伴う驚き、あるいは感動は、2辺と1角の場合は全て作図可能であると考えていたこと、したがって、なぜ2辺夾角でなければならないかいうことを知らなかったことを明らかにした。さらに、重要なことは、このような発見を伴う活動を通して、彼らは、合同条件を求めるとはどういうことかということ、あるいはもっと、数学をするとはどういうことかということの理解をも同時に発達させたと考えられることである。それは、前述した相互作用のパターンの変化が典型的に示している。

これらの事実は、教師が生徒たちの意見を教師のあらかじめ想定していた解法(SsA 合同定理を含む4つの合同条件)に照らして評価しているというよりも、ここでの課題に照らして、つまり、ここで三角形の合同条件を求めることはどういうことかという観点からみていること — メタ知識的解釈をしていること — と首尾一貫している。このことは、特に、授業者が、授業の最後で生徒たちの意見を肯定的に受入れたことが明らかにしている。実際、生徒たちの意見は授業の文脈と両立しうるものである[6]。さらに、このように

[6] SaA 合同定理を受け入れる可能性は、直角三角形

実際の授業を通して反省することによって、メタ知識的解釈とは具体的に何をすることで、そのためには、何が必要かをも明らかにした。実際、授業者は、このときの教授活動を振り返って、次のようにコメント[7]をしている。

> 生徒の発言を予想することが困難なため、生徒の発言により多く耳を傾け、生徒の思考をなんとか追ってみよう、または、発言を利用して何とか制御しようとしていたということです。それによって、必要以上に生徒の考えを聞き、待ちの姿勢をとり続けることになりました。(1995年9月25日(月) 20:35:44)

これがメタ知識的解釈をしているときの教師の具体的な姿勢であると思われる。また、明らかにこの姿勢をとるためにはそのための準備が必要である。それは何であったか—。それは、われわれが授業を計画することで重視したこと — 文脈を構成していくことと、生徒たちの思考の道具を発達させること — であった。前者は、なるべく少ない条件として合同条件を考えていこうとすることと、全ての場合を尽くして考えていこうとすることであり、後者は、生徒たちがもっている思考の道具を作図法としてはっきりと意識させていくことであった。このことはここでの活動の目標とそれにアプローチするための最低限の道具の設定であり、これなくしてはメタ知識的解釈はありえないということである。この文脈の設定がわれわれのメタ知識と首尾一貫しているという意味で、4節で明らかにしたわれわれのメタ知識はこの授業の文脈の設定において本質的な役割をしていたといえる。

を含むような合同条件の応用の場面であろうと思われる。したがって、逆に、このような条件の応用可能性が重要となる場面を設定して、合同条件を拡張していく活動を促すことは、三角形の合同条件がどのようにして成立するかについての、あるいは、三角形の合同条件の道具的性格をよりよく理解することにつながると思われる。これらの調査は今後の課題としたい。

[7]これは、筆者と授業者が、電子メールで授業を反省し、そのことについての意見交換をしたときの授業者によるコメントの一部である。

結局、SsA合同定理を取り上げたことの意義は、生徒にとっても教師にとっても、三角形の合同条件とは一体何であるかを改めて反省する機会を提供したことにあるといえるであろう。

8 引用文献

Cooney, T.J.(1985). A Beginning Teacher's View of Problem Solving, *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(5), 324-336.

IDM(1981). Perspektiven für die Ausbildung der Mathematiklehrers, *IDM-Reihe Band 2*, Aulis Verlag, Köln.

Jahnke, H. N.(1994). The Historical Dimension of Mathematical Understanding — Objectifying the Subjective , Proceedings of the 18th International Conference for the PME, *1*, Portugal, 139-156.

Lerman, S.(1983). Problem-solving or Knowledge-centred: the Influence of Philosophy on Mathematics Teaching , *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* , *14*(1), 59-66.

Otte,M.,Seeger,F.(1994). The Human Subject in Mathematics Education and in the History of Mathematics, in; Biehler,R., Scholz, R.W., Strässer,R., Winkelmann,B. (Eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 351-365.

Smith,B.O.(1969). *Teacher for the Real World*, Washington,D.C., American Association of Colleges for Teacher Education.

Steinbring,H.(1990). Probleme der Entwicklung mathematischen Wissens im Unterricht– an einer Analysis-Stunde betrachtet, *MU*, *3*, 4-28.

Thompson,A.G.(1984). The Relationship of Teachers' Conceptions of Mathematics Teaching to Instructional Practice, *ESM*,*15*, 105-127.

平林一栄(1991).「図形の指導内容の概観と問題点の考察」, 平林一栄他:『新・中学校数学指導実例講座』, 第3巻(図形), 金子書房, 3-34.

岩崎　浩(1994).「メタ知識の意味」,『数学教育研究』, 上越教育大学数学教室, *9*, 33-42.

岩崎　浩(1995).「メタ知識の実現へ向けて」,『数学教育研究』, 上越教育大学数学教室 *10*, 21-32.

謝辞　この研究は授業者である上越教育大学附属中学校の青柳隆広教諭の献身的なご協力、ご意見がなければなかったであろう。また、授業のVTR,ATRによる記録にあたっては上越教育大学大学院生の磯野正人氏、佐藤徳顕氏、田村良久氏、宮沢成光氏にご協力を頂いた。この場をかりて厚く御礼を申し上げたい。