上越数学教育研究, 第12号, 上越教育大学数学教室, 1997年, pp.21-30.

成功的でない解決過程のいくつかの観点からの分析

布川　和彦

1. はじめに

「問題場面の構造」(Nunokawa, 1994b) を視点とした解決過程の記述・分析を目指し、筆者は同一被験者に対し9回の問題解決を行ってもらった。そしてその第2回 (Nunokawa, 1994a, c, in press)、第3回 (布川, 1996b)、第5回 (布川, 1995)、第7回 (Nunokawa, 1993, 1996)、第9回 (布川, 1996a) についての分析を行い、解決過程に関していくつかの知見を得てきた。本稿ではこの9回のセッションのうちの第8回目をとりあげ、リソース、発見法、モニタリングといった問題解決に関する基本的な観点 (De Corte et al, 1996; Schoenfeld, 1985) からの考察、およびこれまでの分析から得られてきた知見を利用した考察を行っていく。

2. データの収集および解決の概要

2.1 データの収集

本稿で分析される第8回の解決では次のような問題が扱われた。

問題：次数 n の多項式 $P(x)$ が条件

$$k=0, 1, 2, \cdots, n \text{ に対し } P(x)=\frac{k}{k+1}$$

を満たすとき、$P(n+1)$ を求めよ。(クラムキン, 1990, p.8)

解決者にはこれを発話思考法で解いてもらい、また解決後にはどのようにして考えたかのインタビューを行った。それらをATR と VTR で記録し、その記録をもとにプロトコルを作成した (Nunokawa, 1994c も参照)。

2.2 解決の概要

第8回のセッションでの解決は、おおよそ以下のような流れであった。

(i) 次数1のときに $P(x)=a_1x+a_0$ とおき、条件より係数を求め、さらに $P(n+1)$ の値を1と求める。「漸化式がとれるんか」「帰納的に決まるか」と言いながら次数2のときを同じように始めるが途中で中断する。次に条件式から $P(k-1)=1+(1/k)$ とし、さらに k を $P(k-1)$ を用いて表そうとするが、「$P(k)$ は求まってんだから意味ねえ」として止める。次数2のときの計算を再開し、$P(x)=(-1/6)x^2+(2/3)x$ と求め、さらに $P(3)=1/2$ を求める。

(ii) 「パタンないとわかんないんじゃないの」と発話し、また a_0 が必ず0になることを確認した後、「一般的に書いてみようか」として、$P(k)=k/(k+1)$ の条件式を $k=0, 1, 2$ および $k=n$ の場合に具体的に書き下した。そして、$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ とおき、先の $k=0, 1, 2, n$ のときの条件式より係数についての等式を作る。次にこれらの等式を中括弧で括って $P(k)=k/(k+1)=k^na_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+ka_1+a_0$ と書く。さらに先の等式を行列の形に書き直す(図1)。しかし「こんなん求まるわきゃねえ」として、特に変形はしない。

(iii) 「皆目見当もつかねえ」と発話した後、「やっぱり帰納的にやってみるより他ないのかなあ」として、次数1と2のときの結果を

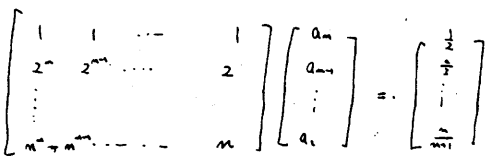

図1

書き直す。次に次数3のときの条件の式を、図1と同じ様に3×3行列を用いて表す。多少躊躇した後に「規則的だからなあ、まやってみようか」として、行列の形で連立方程式を解き始める。しかし途中で「めんどくさそうだ、やめた」として中断し、「こうバラすんかなあ」と発話して $P(n+1)=a^n(n+1)^n+$ と書くがすぐに線を引いて消す。その後、再び先の行列の計算に戻る。そして図2のような形にして「これ出来たけど」としながらも、「違うような気がする」と言い、結局「こういうやり方じゃダメ」と結論する[1]。

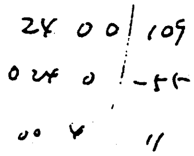

図2

(iv)「なんかあんだろうな規則が」と発話し1のときを反省するとして、次数1のときの条件を行列で書き直す(a_0 は書かないので、1×1行列で書く)。次数2と3のときの結果も行列を使って書き表す。

(v)「係数を求めるようなことは止めよう」としてしばらく考えた後、$P(x)$ の一般式 を書き、次にそれに $x=n+1$ を代入した $P(n+1)=a_n(n+1)^n+a_{n-1}(n+1)^{n-1}+\cdots+a_2(n+1)^2+a_1(n+1)+a_0$ を書く。この各項を展開して、以下のような式を書く(以下式(*)とする);

$$
\begin{aligned}
&a_n(n^n+{}_nC_1n^{n-1}+{}_nC_2n^{n-2}+\cdots+{}_nC_{n-1}n+1)\\
+&a_{n-1}(\qquad n^{n-1}+{}_{n-1}C_1n^{n-2}+\cdots+{}_{n-1}C_{n-2}n+1)\\
+&\\
:&\\
+&a_2(\qquad\qquad\qquad\qquad n^2+{}_2C_1n+1)\\
+&a_1(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n+1)
\end{aligned}
$$

この対角線部分にある各段の最高次の部分をなぞり「ここはまず出来る」「n には帰着できる」とする。それ以外の部分を「こんだけ余ってんだ」として囲んだ後、各段最後の1を縦に囲んで「ここも a_n 足す1を持ってきた」からいいとしている。「組み合わせてやらなくちゃだめ」として組み合わせの部分の ${}_nC_1, {}_nC_2$ などを n の式として書き換えて変形しようとする。

(vi)「わかりそうでわかんねえ」として中断した後、「具体的にやってみるよりほかないのかな」として、次数1と2のときの(*)にあたるものを書く。次数2のときには図3のようにそれぞれの部分を囲み、右の縦の囲みと中央の三角の囲みをするときには「余っちゃう」と発話する。その後P1、P2と何度か

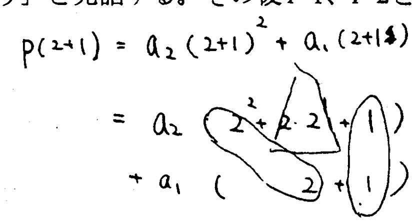

図3

繰り返し言っている。次数3のときも同様の式を書き、各段の最高次の項を斜めに囲み、最後の1を縦に囲んで「これとここか、ここはいいよねえ」とする。「見方を変えないとダメなのかなあ」と発話しながらも、次数4の場合の同様の式を書いていく。やはり各段の最高次を斜めに囲み、また最後の1を縦に囲んで「ここは出る」とする。さらにそれ以外の部分を三角に囲んで「残りが出ないんだよなあ」と発話する。しばらく考えているが、「ダメかなやっぱりこれでも、えーどうして、システマティックになっているような気がするんだけどなってねえ」と発話する。

(vii)条件の式 $P(k)=k/(k+1)$ を書いた後、「これ1違うっていうとこ使ってない」とする。さらに「これで割ったとしてもダメだな」と言い、「この条件は使えないのかな」とする。以前に書いた次数4のときの(*)に当たる式

に戻り、「真ん中の三角はわかんない」とする。次に具体的に係数を求めないとダメとしながら、一方で一つ一つが求まらないとする。「どうしてこの条件が使えないんだろ」とし、また $P(k)=k/(k+1)$ に下線をつけて「ここに現れるんだから」とも発話する。

(viii) しばらく考えた後、$n=1$ のときは $a_1=?$、$n=2$ のときは $a_2=?, a_2+a_1=?$、$n=3$ のときは $a_3=?, a_3+a_2=?, a_3+a_2+a_1=?$ と考えていく。$n=4$ のときもやりかけるが、$a_4=?, a_4+a_3=?$ とした時点で「係数違っちゃう」「それが分かったとしたってダメか」として止める。続けて $a_4+a_3+a_2=?, a_4+a_3+a_2+a_1=?$ とするが、「やっぱダメだなうまくいかねえな」としてそれ以上は計算等はしない。

(ix)「少しちょっとじゃチェックしてみっか」として問題文を読み直した後、次数4のときに関して、$P(1), P(2), P(3), P(4)$ を具体的に式で書いていく（図4）が、$P(4)$ については

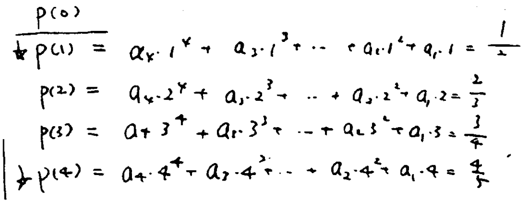

図4

「あそこで使える」とする。さらに $P(1)$ と $P(4)$ の前に印をつけて「これとこれとは分かった」とする。「そこがうまく出てきそうもねえ」と発話した時点で、実験者の方から介入して解決を終了させた。所要時間は約95分であった。なお事後のインタビューの中で被験者は、第8回の問題がそれまでの8回の中で最も難しかったと感想を述べている。

2.3 解決過程における問題場面の構造の変化

解決において見られる問題場面の構造の変化は次のようになる。この第8回のセッションの問題における問題場面は、与えられた条件を満たす多項式 $P(x)$ であると考えられる。

(a) (i) では字義通りの構造、すなわち与えられた条件を満たす次数 n の多項式として、最初の構造が作られている。ただし、解決中の「帰納的に決まるか」という発話や、事後インタビューでの「a_1 のパターン a_2 のパターン a_3 のパターンが、あ、ある例えば n の式、で書ければ」という発話からわかるように、次数 n の多項式は次数 $1, 2, \cdots$ の多項式の族の中に位置づけられ、その族における係数は次数に関わった何らかのパタンにより変化している、と考えられている。さらにこの多項式の族について、次数1のときが $P(x)=(1/2)x$、次数2のときが $P(x)=(-1/6)x^2+(2/3)x$ である、という情報が付加されている。

(b) (ii) では a_0 が常に0になるという情報が付加されている。また「一般的に書いてみようか」という発話以降は、次数を固定した上で $k=0, 1, 2, n$ のときの条件式から連立方程式のようなものを作ったり、その行列表現をしたりしており、(i) のときのような多項式の族の一つとしての $P(x)$ の意味づけは弱められていると考えられる。

(c) (iii) では「帰納的に」やるとして、次数が1と2の場合の結果を書いた後、次数3のときの係数を行列から求めようとしており、多項式の族としての意味づけが表に出てきている。

(d) (iv) の最後には 3×3 行列の中の 2×2 の部分を四角で囲むなどして異なる次数の場合の関係を考えており、(c) と同様の構造が与えられていたと考えられる。

(e) (v) では再び次数を固定して一般の $P(x)$ を考え、そこに $x=n+1$ を代入した式を考えている。したがって (b) のときと同様に多項式の族としての意味づけは弱められていると考えられる。またこの $P(x)$ の $x=n+1$ のときの値が、$P(n)+P(1)$ と残りの部分の和として書けること、またこの残りの部分の各項の係数が $a_i\times{}_jC_k$ といった形をしていることについての情報が付加されている。

(f) (vi) では次数が $1, 2, 3, 4$ のときの (*) に当

たる式を書いているが、事後のインタビューでは例えば次数4の場合に関連して「三角んとき[$P(n)+P(1)$ 以外の残りの部分]も他の例えば $P(3), P(2)$、のときで表せるのかなと思った」と説明している。これより(vi)の時点では多項式の族を考え、係数の変化のパタンなどをさがすというよりも、次数4のときの内部の構造を調べていた、つまり多項式の族としての意味づけは弱く、むしろ(e)での構造と類似のものが与えられ、それを具体的な次数にして調べていたと考えられる。また先のインタビューでの発言より、$P(n+1)=c_nP(n)+c_{n-1}P(n-1)+\cdots+c_2P(2)+c_1P(1)$（以下式(**)とする）といった構造を解決者が期待していたことがわかる。一方で「システマティックになっているような気がするんだけどなってねえ」という発話から分かるように、先のような構造を実際には見いだせておらず、問題場面の構造としてはそうした情報は付加されていないと考えられる。

(g) 条件の $P(k)=k/(k+1)$ について、分子と分母が1違うという意味づけがここで表明されている。次数4のときの(*)を先と同じように調べていることから、(f)と同様の構造が与えられていたと考えられる。条件の式に下線をつけて「ここに現れるんだから」と発話していることより、(**)のような構造を期待していると考えられる。

(h) 事後インタビューの中で係数の和あるいは差を $P(1), \cdots, P(n)$ で表すという試みに言及していることより、(viii)での活動は(vii)を受けて、係数の和をこのように表すことを目指したものと考えられる。したがって、係数に関して何らかの帰納的なパタンを求めるというよりも、各次数での係数の和に関する情報を求めたと考えられ、その点では多項式の族という意味づけは弱いと考えられる。ただし具体的には係数についての新たな情報は得られておらず、したがって(b)と同様の構造が与えられていたと考えられる。

(i) (ix)では次数4のときに $P(0), \cdots, P(4)$ を書き、$P(1)$ と $P(4)$ に印をつけていることより、(f)での構造と同じものが与えられていたと考えられる。

以上の問題場面の構造の変化において、問題場面である $P(x)$ を次数を $1, 2, 3, \cdots, n$ としたときの多項式の族の一部として意味づけている構造をタイプA、そうした意味づけがなされていない構造をタイプBとする。またタイプBのうち、$P(n+1)$ が $P(n)+P(1)$ と残りの部分として書けるという情報が付加されたものを添字をつけて B_1 と表す。本稿で取り上げた解決過程の問題場面の構造の変化は(a)から(i)にそってつぎのようになる：

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{A} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B_1} \to \mathrm{B_1} \to \mathrm{B_1} \to \mathrm{B_1} \to \mathrm{B_1}。$$

2.4 下位目標の変化

布川(1996a)と同様に下位目標の変化も考えてみる。この解決の中で解決者により設定された下位目標は以下のようになる。

α：$P(n+1)$ を求める。

β：（α のために）$P(x)$ の係数を求める。

γ：（β のために）次数を $1, 2, \cdots$ としたときの係数のパタンを見つける。

δ：（β のために）条件式から得られる次数 n のときの連立方程式を解く。

ε：（α のために）$P(n+1)$ を(*)のように具体的に書き下す。

ζ：（ε のために）$P(n+1)$ を $P(k)$ ($k=1, 2, \cdots, n$) を用いて表す。

η：（ζ のために）係数の和や差を $P(k)$ ($k=1, 2, \cdots, n$) を用いて表す。

これらの下位目標と前項の問題場面の構造を時間経過にそってまとめると図5のようになる。

ここまで述べてきた解決の流れを見ると、問題場面の構造は後半 B_1 から動かなくなっており、また全体で見ても、AとBの違いが $P(x)$ を多項式の族の中で考えるかどうかで

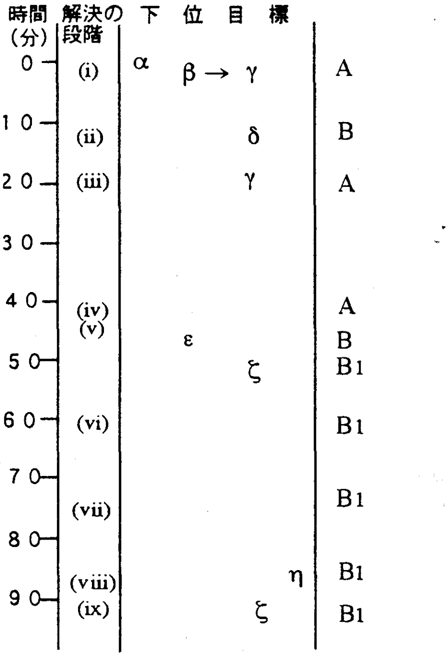

図5

あり、基本的には問題場面を条件を満たす n 次多項式 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ として見ていることを考えれば、結局解決全体で問題場面の構造はそれほど変化しておらず、解決はあまり進展していなかったことになる。また、下位目標については、前半は $\beta\rightarrow\gamma$、後半は $\varepsilon\rightarrow\zeta$ が支配的であるが、それらを達成するためのさらなる下位目標は生成されていない。

3. 問題解決の基本的観点からの考察

3.1 発見法の観点からの考察

本稿で取り上げた解決では、前節で見たように、問題場面についての新たな情報がほとんど見出されておらず、問題場面の構造はそれほど変化していなかった。2.1の記述からわかるように、解決過程において、次数が1、2、3等の場合を具体的に扱う場面と、一般の次数 n を扱う場合が交互に現れており、このため、この両者を往復していたことが似たような問題場面の構造に留まった原因ではないか、という印象を受ける（表1）。

表1：各段階での一般－具体

(i)	具体的にやってパタンをさがす。
(ii)	一般の形で行列に表す。
(iii)	次数3のときを行列で具体的にやる。
(iv)	次数1、2のときを行列で表す。
(v)	一般の $P(n+1)$ を書き下す。
(vi)	次数1、2、3、4の(*)式を調べる。
(vii)	次数4のときの(*)式を調べる。
(viii)	次数4までの係数の和を考える。
(ix)	次数4のときの $P(k)$ の式を書く。

確かに(ii)と(v)での一般的な扱いをはさみ、次数1、2などの具体的な扱いが3度行われている。今の問題において、次数という「整数のパラメータに1、2、3、…を順に代入し、帰納的なパタンを探す」(Schoenfeld, 1985, p. 109)ことは適当な発見法と考えられる。しかも、次数に具体的な数値を代入して調べる場合にしても、解決の各時点でその目的が異なっている。

(i)の部分：$\beta\rightarrow\gamma$ という下位目標に沿い、次数が1、2のときについて具体的に $P(x)$ と $P(n+1)$ を求め、係数の間のパタンを見出そうとしている。

(iii)の部分：(ii)で次数nの場合を行列を用いて考えようとしたことを受け、次数3の場合を行列で計算している。事後インタビューによればこの計算は係数を求めるためのものであり、「多分行列、で書くと一般的に書くと、やりやすいだろうから書いておいて」という発話に見られるように、与えられた条件と係数の関係などの、係数を求める手続きに見られるパタンを見出そうとして、行列に書くことが行われたと考えられる。したがって、次数3の場合の行列の計算や、(iv)で次数が1と2のときの結果を行列になおしているのも、この手続きに関するパタンを見出すための、一連の活動の一貫と考えることができる。

(vi)の部分：次数が2、3、4のときの(*)に当たる式を調べている。これは、(v)で得られた情報に基づき、(**)の構造の可能性を

探るものであり、$P(n+1)$ の各要素間に見られるパタンを得ようとしたものと考えられる。(vii) における活動も同様のものである。

(viii) の部分：次数が1、2、3、4のときの係数の和がどのように表されるかを調べようとしているが、特に新しい情報は得られていない。

(ix) の部分：基本的には (vi) の活動と同じであるが、次数 n の場合の $P(0)$、$P(1)$、$P(2)$、$P(3)$、$P(4)$ を具体的な式の形で書いている。これは $P(k)$ の方の式の形から (**) の構造の可能性を探ろうとしたものと考えられる。

(iii)、(vi) での変化はその直前の一般的な扱いを反映しており (行列による表現、$P(k)$ を用いた表現)、その意味で、解決の流れにそった変化となっている。

このように、具体的な場合と一般の場合の間を往復しながらも、解決者は同じことを繰り返していたわけではなく、整数のパラメータに数値を代入するという発見法の適用の仕方を、少しずつ変化させていたのである。また(iii) では、Schoenfeld (1985) が探求のフェーズでの発見法としてあげる、表記法を変えることも行っている。

(i) と (iii) とでは、表記法と活動の目的を変えていながら、各 k に対して $P(k)=k/(k+1)$ であることと、$P(k)=k/(k+1)=k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+ka_1+a_0$ という同じ既知の情報 (データ) を用いている。しかし、Taplin (1995) によれば、あるアプローチが行き詰まったときに同じデータを用いて別のアプローチを試みることは成功的な解決の特徴とされている。

以上より、発見法の観点からは、解決者の活動はある程度合理的なものであったと考えられる。

3.2 モニタリングの観点からの考察

発見法の利用では、その適用の仕方が少しずつ変化しているだけでなく、以下に示すように移行の部分ではモニタリングが行われていることがわかる[2]。

(i) から (ii) への移行部分

[13:30] (次数1、2の場合を具体的に求めた後で) 2でやってもダメかなうまくいかないなあ何かパタンないとわかんないんじゃないのこれ、

(ii) から (iii) への移行部分

[18:42] (条件を行列で表したものを見ながら) こんなん求まるわきゃねえやな、ダメだね、こんなの求めるわきゃねえなあ、

[19:45] n 足す、でもこれ全部くっついてきちゃうからな、展開したとしてもダメだね、

(iii) から (iv) への移行部分

[41:30] (次数3のときの係数を行列で一応計算した後) 違うような気がするなあ、やっぱりこういうやり方じゃダメなんだよきっと、そういうふうにシステマティックにやんなくてもって気がするんだけどなあ、なんかあんだろうな規則がな、もう一回1ん時を反省してみよう、

(iv) から (v) への移行部分

[43:39] (次数1、2、3のときの条件を行列の形で書いた後) 係数を求めるなんてことしない方がいいのかなあ n が1で n が2で n が3、ああそうか係数を求めるようなことはやめよう、

(v) から (vi) への移行部分

[60:19] ($P(n+1)$ を書き下し ${}_jC_k$ の部分を n の式で表そうとした後) なんかわかりそうでわかんねえな、…やっぱり一気にあれだろうね具体的にやってみるよりほかないのかな、

(vi) から (vii) への移行部分

[74:34] (次数4のときの (*) の式を調べた後で) ダメなのかなやっぱりこれでも、えーどうして、システマティックになっているような気がするんだけどなってねえなあ、

[75:48] こういう方針でやったとしてもダメなのかなあ、ダメなのか、あとあそこ処理できないもんね2、3、処理できねえよなあ、

(vii) から (viii) への移行部分

[80:13] (次数 4 のときの (*) の式を調べた後で) 真ん中の三角はわかんないんだよなあ、

[81:36] これ具体的な [聴取不能] の係数を求めないとダメだろうね、…係数を一つひとつ求まんないんだよな、ったく、

[86:15] 足す、足したってな難しいよなこれな、

(viii) から (ix) への移行部分

[88:21] (係数の和を求めようとした後) あダメだやっぱりこれで、係数違っちゃうもんなあ、…やっぱダメだなあやっぱりな、それが分かったとしたってダメか、

また例えば (i) で k を $P(k-1)$ で表わそうとする場面で [5:09] 「[解こうとしていた連立方程式が] めんどくさそうだな [聴取不能] これ解くのはめんどくさそうだなあ」と発話したり、この活動を中断し以前のアプローチに戻る箇所で [7:06] 「$P(k)$ は求まってんだからな意味ねえや」と発話するなど、あるアプローチの実行途中においてもその可能性や効果を評価しながら解決を進めている。

先の移行部分のうち、(i) から (ii)、(ii) から (iii)、(iv) から (v)、(vii) から(viii)、(viii) から (ix) の移行部分は下位目標の変化する箇所でもあるが、こうした当面する目標の変化の箇所はモニタリングが重要な働きをする部分とされる (清水, 1989)。この解決ではそうした箇所でそれまでのアプローチの評価が行われており、その意味で、モニタリングがよく行われていると考えられる。しかも、事後インタビューを見ると、それぞれの方針に関して、考えている試みが成功したとしたら、その後求めるべき $P(n+1)$ がどのようにして求まるのか、を解決者が意識していることがわかる。以上のことから、モニタリングについても特別な欠陥は認められない。

3.3 リソースの観点からの考察

3.2 で見たようにアプローチの移行部分ではモニタリングが行われていたが、その後今度は新たな方針を開始する箇所での発話には一つの傾向が見られる。

(ii) の一般の $P(x)$ を書き下す部分

[13:30] 何かパタンないとわかんないんじゃないのこれ、

[14:30] 一般的に書いてみようか、一般的に書いてみよう、一般的に書いてみよう一般的に、

(iii) の帰納的なアプローチに移行する部分

[22:18] やっぱり帰納的にやってみるよりほかないのかなあ、

(v) の一般の $P(n+1)$ を書き下す部分

[43:46] 係数を求めるようなことはやめよう、でもやめるつったってじゃ何やりゃいいんだよなあ、

(vi) の具体的な次数の場合へ移行する部分

[60:36] やっぱり一気にあれだろうね具体的にやってみるよりほかないのかな、

(ix) の次数 4 のときへ移行する部分

[90:11] どうしたらいいんだろ、足す 1 だとしたって、うーん、少しちょっとじゃチェックしてみっか、

また、(i) の途中で $P(k)$ を k で表そうとする部分では [5:09] 「これ [係数を求めるための連立方程式] を解くのはめんどくさそうだなあ」と発話し、その後再び次数 2 のときの計算を再開する部分では [8:27] 「方針が立たないなあ、…んん、ちょっとやってみようか」と発話している。

これらを見ると、積極的に新たな方針を採用したというよりも、以前の方針が行き詰まったり、実行が困難と判断されたときに、次に行うべき方針がないために、結果的に以前に中断した方針を再開していったことがわかる。つまり、方針の途中でモニタリングを行い、その方針の有用性が疑わしいと判断しても、結果的に次に行うべき活動の方針がないため、解決に結びつくような移行ができない様子が示されている。

Schoenfeld (1985) があげる代表的な五つの

発見法(p. 195)のうち、整数のパラメータへの代入や下位目標を設定することはすでに行われており、また図をかく、背理法を用いる、少ない変数を考えることは今の場合適用しにくい。また同値な問題を考えることや条件をゆるめること(p. 109)も今の問題では考えにくい。これより、ここで必要な活動の方針は発見法のレベルよりも、内容固有のリソース・レベルのものと考えられる。

ところでクラムキン(1991)の解答では、条件の式 $P(k)=k/(k+1)$ を $(k+1)P(k)-k=0$ と読み換えた上で、$Q(x)=(x+1)P(x)-x$ と置くと、条件の式は $Q(x)$ の零点についての情報になるので、それをもとに $Q(x)$ を求め、さらに $P(x)$ を求めることが基本的なアイデアとなっている。今回の多項式の問題において、この条件式の読み換えが解決の一つの要件であるとしても、これを行うことは今の問題の解決においてそれほど自明のこととは考えにくい。むしろそれは、多項式の問題では零点の情報を探し因数分解された形で表す、といった内容固有の知識あるいはセミアルゴリズム(清水, 1992)と考えられる[3]。

先の活動の方針も、内容固有のものであればやはりセミアルゴリズムと見なすことができよう[4]。したがって、第8回の解決はリソースの点ではその欠如ないしは活性化の失敗(Lawson & Chinnappan, 1994)といった問題を含んでいたと考えられる。

4. 問題場面の構造の観点からの考察

4.1 探求の対象としての問題場面

下位目標 ε は(*)の式において対角線部分が $P(n)$ と、また右端の一列が $P(1)$ に対応する、という情報を得たことで設定されたものと考えられる。しかし、後半ではこの ε が支配的となり、この ε の下ではタイプ B_1 の構造が与えられている。この B_1 は $P(n+1)$ が $P(n)+P(1)$ と残りの部分として書けるという情報が付加されたものであったが、そのとき $P(n)$ に関してはそれが $a_n n^n+a_{n-1}n^{n-1}+\cdots+a_2n^2+a_1n$ であるという点が、また $P(1)$ に関してもそれが $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1$ である点が用いらており、$P(k)=k/(k+1)$ であるという情報はほとんど利用されなくなっている。

確かに、後半の解決においても、与えられた条件が使われていないことはときどき意識されている。上で述べたように、(**)の構造を目指した ξ という下位目標での活動は、そもそもその背景に $P(k)$ の値が与えられているという事実を持っている。またこのことは、[76:16]「これ1違うっていうとこ使ってない」、[77:19]「この条件は使えないのかな使ってないみたいだな」、[83:51]「どうしてこの条件が使えないんだろ」といった発話にも見られる。しかしこの最初の二つの発話の場合はその直後に下位目標 ξ に関わる活動に戻っている。また三番目の発話の後では、解決の流れの(viii)で述べたような活動に移行するが、そこでは $P(k)=k/(k+1)$ という情報は特には用いられない。これは、連立方程式を解く際に $P(k)$ の値が用いられていた前半部分とは、対照的であると言えよう。

上でも述べたように、第8回のセッションの問題では、$P(k)=k/(k+1)$ という条件を満たす n 次式 $P(x)$ が問題場面であると考えられるので、解決の後半になり $P(x)$ 自体ではなく $P(n+1)$ が探求され、しかも $P(k)=k/(k+1)$ という情報が表立って用いられなくなったことは、問題場面自体が探求されなくなったことを意味しよう。このように、解決の後半に入り問題場面の構造の変化があまり生じなくなる一方で、問題場面自体が探求されなくなることは、布川(1996a)に見られる成功的でない解決過程の特徴と一致し、Nunokawa (1996)に見られる成功的な解決の特徴に反している。

4.2 大局的再構成の観点から

下位目標と問題場面の構造の変化を示す図5からわかるように、第8回のセッションの

解決の後半部分では $P(n+1)$ を既知のもので直接書き表すことが目指されており、$P(x)$ 自体よりも、$P(x)$ の $x=n+1$ の場合の探求が主に行われている。しかし一方で、$P(x)$ や $P(n+1)$ に関する新たな情報が得られておらず、問題場面の構造は B_1 のままに留まっている。ここで成功的でない解決を分析した布川(1996a) の結果を参照するならば、特定の下位目標の支配下で問題場面の構造の変化が停滞した場合、その下位目標を一時保留し、元の問題場面自体の探求に戻ることが必要ではないかと考えられる。また、Nunokawa (1996a) によれば、成功的な解決過程では初期活動の後に場面の探求が行われ、その中で大局的再構成(Nunokawa, 1994b) が生じている。そこで、解決を進展させる一つの可能性として、問題場面自体の考察を目指し、かつ大局的再構成を意図的に生じさせることが考えられる。

ここで今の場合において、大局的再構成は次のように考えられる。与えられた問題では $P(x)$ という n次式があってそれが与えられた条件を満たすという設定になっている。そこで、この問題場面 $P(x)$ において成り立っている条件を、$P(x)$ を構成する原理として用いることを、大局的再構成と見ることができる。

実はこのように捉えると、$P(x)$ のパタンがもう少し見やすくなる。例えば次数 2 の場合、条件は $P(0)=0$、$P(1)=1/2$、$P(2)=2/3$ であるが、まず $P(0)=0$ より $P(x)=x\,R(x)$ ($R(x)$ は 1 次式) と書ける。ここで条件より $R(1)=1/2$ であるので、$R(x)=a(x-1)+(1/2)$ となる。また $R(2)=1/3$ より $a=-1/6$ となる。以上より、$P(x)=x\{(-1/6)(x-1)+(1/2)\}=(-1/6)x(x-1)+(1/2)x$ となる。これは次数 1 のときの結果 $P(x)=(1/2)x$ に $(-1/6)x(x-1)$ が加わったものとなっている。同様にすると、次数 3 のときは $P(x)=(1/24)x(x-1)(x-2)+(-1/6)x(x-1)+(1/2)x$、4 のときは $P(x)=(-1/120)x(x-1)(x-2)(x-3)+(1/24)x(x-1)(x-2)+(-1/6)x(x-1)+(1/2)x$ となり、次数が増えるときのパタンがわかりやすい。また、次数をあげたときの$P(x)$の形が予想しやすいことより、$P(n+1)$ の予想される値も算出しやすく、したがって $P(n+1)$ の形についても予想を立てやすいことが考えられる。その意味で、第 8 回のセッションにおける被験者の解決よりは、$P(x)$ の形など問題場面についての多くの情報を得られるものとなっている[5]。クラムキンによる解決では問題場面に対する大きな意味づけの変更が必要とされ、ある意味ではそれはセミアルゴリズムというリソースの問題に帰着された。しかし、ここでのアプローチではむしろ解決者の手元にあった情報である $P(k)=k/(k+1)$ をそのまま用いる形になっている。

以上のことより、第 8 回のセッションの解決においても、問題場面の構造の変化が停滞したときに、特定の下位目標から離れて問題場面自体を探求すること、その際、大局的再構成が意図的に生ずるよう与えられた条件を場面の構成原理として利用することで、多少の問題場面の構造の変化を起こすこと、あるいは解決の進展を図ることが可能であったことがわかる。情報の生成活動 (Lawson & Chinnappan, 1996) が成功的な解決の一つの特徴であることを考慮すれば、生成の系列が継続しえたことは重要である。また、前半では$P(x)$ 自体の形を探求していた解決者が、後半では直接$P(n+1)$ を求めるアプローチに転じた背景には、係数等の間のパタンが容易に見いだせないことがあった。上で述べた新たなアプローチでは式の間のパタンが分かりやすいことから、こうしたアプローチを解決者がとっていたら、$P(x)$ 自体の探求がさらに行われていた可能性も考えられる。

5.おわりに

本稿では、一連の調査の第 8 回のセッションの解決を分析してきた。リソース、発見法、

モニタリングといった観点からの考察では、結局、ある種のセミアルゴリズムというリソースの欠如ないしは活性化の失敗が一つの原因として考えられた。また問題場面の構造の観点からの考察では、解決が行き詰まった際に問題場面自体を探求の対象としていなかったことが原因として考えられ、また大局的再構成を意図的に引き起こせば新たな情報の創出の可能性があったことが示された。

問題場面の構造の観点からの考察が独自の知見を導き得たことは、問題場面の構造という観点の有用性を示すものと考えられる。

註および引用・参考文献

1. やり方は正しいが図2の結果は誤っている。
2. 以下で [13:30] は開始から13分30秒の時点での発話であることを示す。
3. これを同値な条件による置き換えという発見法 (Schoenfeld, 1985) と解釈することもできようが、その変形が $Q(x)$ を置くことを見越したものであり、自明とは言いがたいことより、このように解釈した。
4. セミアルゴリズムのような方針を示す知識は、それが失敗に終わっても有用な情報を与えることがある (Nunokawa, 1996)。その意味で単なる解法の方針ではなく、活動の方針のレパートリーとなりうる。
5. ただし、これを数学的帰納法で証明したり、あるいは $P(n+1)$ を求めようとすると、次数が奇数の場合は容易にできるが、次数が偶数のときに問題が残る。

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.

クラムキン, M.S.(1991). 数学オリンピック問題集：アメリカ編 (国際数学オリンピック日本委員会訳). 東京図書.

Lawson, M. & Chinnappan, M. (1994). Generative activity during geometry problem solving: Comparison of the performance of high-achieving and low-achieving high school students. *Cognition and Instruction, 12* (1), 61-93.

布川和彦. (1995). 数学的問題解決における物理的モデルの役割：四面体の問題についての解決過程の分析から. 数学教育研究 (上越教育大学数学教室), *10*, 11-20.

布川和彦. (1996a). 問題場面の構造の構成に対する下位目標からの制約. 数学教育研究 (上越教育大学数学教室), *11*, 21-30.

布川和彦. (1996b). より簡単な問題の解決の利用の様相. 第29回数学教育論文発表会論文集, 469-474.

Nunokawa,K. (1993). Prospective structures in mathematical problem solving. *Proceedngs of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol.3, pp.49-56). Tsukuba.

Nunokawa, K. (1994a). Improving diagrams gradually: One approach to using diagrams in problem solving. *For the Learning of Mathematics,14* (1),34-38.

Nunokawa,K. (1994b). Solver's structures of a problem situation and their global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior, 13* (3), 275-297.

Nunokawa, K. (1996). A continuity of solver's structures: Earlier activities facilitating the generation of basic ideas. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 15*, 113-122.

Nunokawa. K. (in press). Giving new senses to the existing elements: A characteristic of the solution accompanied by global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior.*

Schoenfeld,A.H.(1985). *Mathematical problem solving*. Orland,FL: Academic Press.

清水紀宏. (1992). 数学教育におけるセミアルゴリズムに関する研究. 第25回数学教育論文発表会論文集, 333-338.

清水美憲. (1989). 中学生の作図問題解決過程にみられるメタ認知に関する研究. 数学教育学論究, *52*, 3-25.

Taplin, M. (1995). An exploration of persevering students' management of problem solving strategies. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 17* (1), 49-63.