上越数学教育研究, 第 14 号, 上越教育大学数学教室, 1999 年, pp.1-10.

装置を用いた関数の考えの実現を目指した授業の構成に関する覚書き

リアリティの観点から

熊谷　光一

1．はじめに

算数・数学の特徴のひとつとして，リアリティ[註1)]を構成するために対象を子どもがつくりだすことができることがある。例えば，カレンダーを扱った問題では，数値が横に進むと１増える，縦に進むとき７増える。そして右斜めに下に進むとき８増え，左斜め下にすすむとき６増えるとみることもできる。もちろん，１から31までの数字がならんでいるとみることが最初である。この２つの間ではリアリティが異なっている。また，カレンダーだからといって30や31ででとまらずに，100までも数字を並べることもできる。これらのなかで，３つの連続に並んだ数の和は，真中の数の和の３倍になっているという性質を発見することを想定してみよう。１ずつ増えるという見方では，連続する数の和が真中の数の３倍になることが発見できる。これに対して，１増え，７増えるというようにカレンダーをみている場合，３つの数の和の性質が，縦ならび，横並びのみでなく，斜め並びに展開する可能性もある。また，カレンダーのように連続する数ではなく，一定の差の数の数表，そして数表の数の並びの幅が７以外，10，20 などにおいて，同じような性質が成立することがわかる。性質と考えている数の並びが飛躍的に拡がる様子がみえるだろう。これもひとつのリアリティである。すなわち，算数・数学を考えるときに，飛躍的に新しいリアリティをつくりだしていけることが重要な特徴であることがわかる。それは，数学が発展するという見方に通ずる。リアリティといっても現実に存在するものとは限らず，対象としてのリアリティ，対象のもっている性質，価値観にかかわるリアリティなどがある。いずれにしても，それらが，行為者，すなわち子どもにとって実感をともなっていることが重要な要件である（菊池, 1984)。

ここでは，このようなリアリティのある授業を目指して，装置を使った授業を組織する過程[註2)]について報告する。装置を使った授業を組織する過程では，最初の指導案作成，大学３年生とともに行った模擬授業，そして指導案の修正，続いて，小学校での授業での実施，反省の過程がある。

2．装置の特徴と問題設定

2．1　装置自体の特徴

装置は２本のレールがあり，ハンドルを回すことで，軸に糸が巻きとられ，それぞれのレールの上を２個のブロックが移動する。一方のブロックはハンドルを１回転すると１目盛り，他方は１回転すると２目盛り進む。また，糸の長さを調整することで，ブロックの出発位置を自由に変えることができる。さらに，軸の太さを変えることで，速さを変えることもできる。(図. 1）

移動した長さまたは位置を従属変数，回転数を独立変数とみると，そこには一次関数の関係がある。すなわち，　$y=2x+b$，$y=x+b$である。

もちろん他の見方もできる。１ずつ進む方

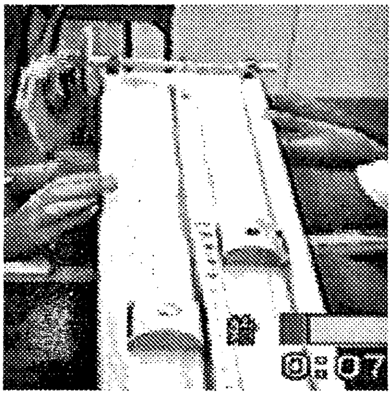

図. 1

の移動の長さまたは位置を独立変数とみても，2ずつ進むブロックの移動の長さを表わすこともできる。このように，独立変数のとり方が複数あることがこの装置のひとつの特徴である。例えば，関数の考えである，何らかのことを知りたいために独立変数を想定することがここで実現できる装置である。

また，容易に繰り返し，現象を連続的に再現できることも特徴のひとつである。そしてその再現がハンドルを回すという動作をともない，ブロックが連続的に動く様子がみえる。ハンドルを回すことで，ブロックの動きを制御するという感覚がある。回したら動く，速くまわせば速く動くし，ゆっくりまわせばゆっくり動くなどの感覚があるはずである。移動の長さを回転数で制御することが感覚的に捉えられる可能性がある。

2．2 問題設定

装置を用いて問題を設定することを意図した理由は次のような考えが背景にある。子どもが行為することを言語化することで，数学が発展する可能性があるということである(Gravemeijer, 1997; Sfard, 1991; Dörfler, 1986)。Sfard の研究は，関数を事例としているが，生徒の操作として「代入する」ことが指摘されている。しかし，関数の考えにおいては，代入することは最初の操作的な行為とは必ずしもならない。

装置の特徴において述べてように，独立変数を回転数とし，ブロックが進んだ長さを従属変数とするとき，回転することで，従属するブロックの動いた長さを制御している感覚を，装置を通してもつ可能性がある。これを，1進む，2進むをもとに，表を作成し，そして独立変数と従属変数の関係を言語化することがなされると想定した。

また，関数の考えは，中島 (1981) が述べるように，ある知りたい現象がそのままではわかりずらいために，それがどのようになっているのかを知るために，その現象を何かに置き換えるてみることが根底にある。[註3)] このような考えが反映される問題設定とはどのようなものであろうか。最初に指導案を作成した段階で設定した問題は，次のようである。

トンネルが29の位置にあります。 AとBとではどちらがさきにトンネルから出てくるでしょう。 Aは0から出発し，Bは15から出発します。

「トンネルをどちらが先に出てくるか」という問題を設定するとき，関数の予測性が意識的に経験できるのではないかと考えた。すなわち，装置のある区間では，実際に，どちらが先にいるかを確カメることができる。しかし，それがなくなった部分で，どのような推論を利用して予測をするかということが問題になるからである。例えば，n角形の内角の和を表を用いて求めることがある。最初は，具体的に，三角形，四角形・・と内角の和を調べてみるが，そのうち規則性を発見する。その規則性が妥当かどうかを確信するためには，n角形では，ひとつの頂点からn－2本の対角線がひけ，n－1個の三角形に分けられるというような推論が重要となる。このように，予測が確信へと変るような活動を意図したのである。「ブロックA，Bがどのように動くのか調べてみましょう」では，あまりにも問題が抽象的であり，子どもが活動するときに，目的が不明確になると考えたからである。また，Aは1回転で1進みます，Bは1

回転で2すすみます・・・ AとBとではどちらがさきにトンネルから出てくるでしょう」では，独立変数の選択が強制的になる可能性がある。

関数の考えをどのようにして，言語化し，数学的な表現にかえていくのかについては，指導案作成の時点（熊谷, 1999）ではこれ以上の予測はなかった。ここが子どものリアリティにかかわる部分であるが，十分な検討はできていなかった。とにかく，1進む，2進むをいかに気付かせるかに焦点をあてていた。

3．模擬授業とそれから得られた知見

教員養成課程の大学3年生を対象にして，装置を用いた模擬授業[註4)]を実施した。学生には，なるべく小学生の実態を想定してみることを条件とした。すなわち，子ども役をすることを期待した。そして，授業者は意図的に問題設定をできるだけ曖昧に開始した。その理由は，装置をみてどのような発想が生ずるのか，自由度がどの程度あるのかを知りたかったからである。

模擬授業では，場面設定が容易ではないことが顕著に生じた。そして多様な解決が生じた。すなわち，装置の動きをとらえるために，装置をみせるが，なかなか十分にどのような動きをするのかイメージが難しいようであった。また，トンネルの出口を基準とした見方とブロックの出発点を基準とした見方が生じたことである。

解決方法に関しては，予想通り様々の解決がなされた。最も素朴な解決として次のような解決がみられた。この解決は，装置にある目盛をとりだし，その目盛上をブロックの動く様子を描いていく解決である。

こっちが1進んで，そのときこっちが2進む，
そしてまた1進んで，こっちが2進む

というように発話しながら，枠をつぶしていっている（図. 2）。

式による追いつき算の見方での解決，表での解決などが出された。表による解決では，2通りの見方が示された。ひとつは位置を問題にした解決であり，他のひとつは移動の長さを問題にした解決である。15の位置にあったブロックの動きを一次関数として記述するか，比例として記述するかの違いである。この違いによって，解決結果の解釈に関してとまどいが生ずると考えた。すなわち，カメが早く到達するのか，ウサギが早く到達するのかで，比例として記述した場合，解釈が容易でないことが予想される。

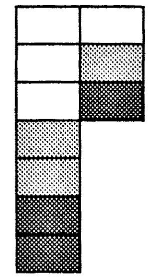

図 2

また，差がどれだけ縮むのかという見方で問題を理解しようとした学生がいた。そして，それらが発展した解決を生じさせなかった。最初に捉えた場面のイメージと解決方法の間のギャップがみえた。

これらのことから指導案の修正を実施した。まず，問題設定の場面では，出発の基準を明確化するとともに，どちらが速いかという感覚を子どもにもってもらうために，場面についての比喩を導入することである。ここではウサギとカメという物語を想定することを期待することにした。

最後の解決の解釈の場面での困難を解消するには，独立変数と従属変数のとり方を意識的につくっていくことが大切であると考えた。この問題点に対して，なかなか有効な指導法は見い出せなかった。少なくとも言えることは，素朴な解決を利用すること，そして，独立変数と従属変数の対応をみせるために図を作成すること，そのためには，1進む，2進むということを問題解決に利用するようにす

ることである。

以上のことをもとに想定プロトコールを指導案として新たに作成した（資料. 1）。

4．実際の授業の結果と示唆

小学校で実施した授業について報告し，そこから得られた示唆について，問題設定の場面，解決の場面に分けて述べることにする。

問題設定の場面で，子どもは最初の場面で1回転で1進む，1回転で2進むということを見つけだした。

見い出すまでの過程で，子どもは，まず，どちらかのブロックが速い，遅いということに着目した。ほとんど同じ時期に，ハンドルに連結している軸の太さの違いに気付いている。そして，細い方が遅くて，太い方が速く動くことを確カメている子どももいた。

動きに関して，速い，遅いということを感覚的に捉えることができている。そして，動きが軸の太さで決まっていることまで感覚的にわかっている子どももいることがわかる。

続いて，動きについて一方のブロックを基準にして他方のブロックの速さを述べている。

Ｐ：えーと，この細い方のやつが，この黒い線を1個行くと，この大きい方のやつは2個進んでる。えっ？違ってる？

このように動きを捉えることが，具体的な量をともなって言語表現された。しかし，多くの子どもは，軸とのかかわりで動きをみているが，それは定性的であり，定量的ではない。すなわち，速い，遅い，多く巻かれるなどである。クラスの子どもたちの間で，量をともなって動きを表現しだし，それがいくらかでも共有されたのは，もう少し時間が経過してからであった。

問題設定の後に，ウサギが早いか，カメが早いかの予測をした後に，再び，解決のために動きについて言及する場面がある。その場面では，ハンドルの回転数で進む長さとの関係に言及することがみられる。そこでの表現は，「にににに一」というように動作を言葉として表現している。そして，数人の子どもがかかわりながら，1進む，2進む，そして1回まわすということが関連づけられながら議論がされている。

Ｔ：これで確カメる，機械に頼る
ＰＰ：えーやだ，ざわざわ
Ｔ：計算できる
Ｐ：計算できる
Ｔ：はい，にににに一
Ｐ：なんかやっと，ににににに一
Ｔ：ウサギは1回ごとに2回くるから・・・
Ｐ：あー
Ｔ：うん，もう1回大きい声で言って
Ｐ：ウサギは1回まわすごとに，えっと2つ進むから，うーんそれが使ってやれば，計算すればいい
Ｔ：いまのわかりましたか
ＰＰ：はい
Ｐ：でもカメでもいいんじゃない
Ｐ：カメの方がやりやすい
Ｔ：カメの方がやりやすい，どういうことカメがやりやすいって
Ｐ：だって1だもん
Ｐ：カメはね1進む
Ｔ：あ，カメは1回まわすときに1進む，ウサギは2，1回すと1進む。でカメがやりやすいとかウサギがやりやすいと言ってますけど，

続いて，ウサギとカメからのイメージづくりでは，どちらのブロックをカメにするのか，ウサギにするのかということの確認が必要であった。その時点で子どもたちの間で，かなり一方のブロックが他方のブロックへと追いついていくイメージはつくられたようである。

次に，子どもがどのようにして解決したのかをみてみよう。

子どもが描いた図. 3は，上にウサギの動きを示すスケールが描かれ，下にそれに対応してカメの動きを示すスケールが描かれている。それぞれのスケールにおいて，ハンドルを1回転するごとにどの位置にいるかを示す矢印が描かれ，回転数が1から順に書かれている。

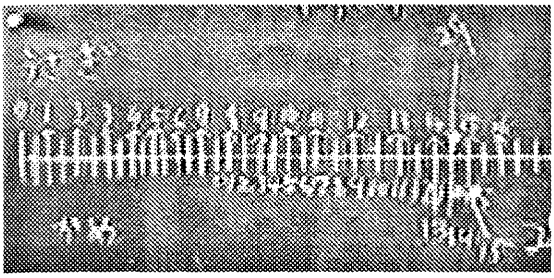

図. 3

この図を用いた解決に対して2人の子どもが説明した。1人目は図を作成した子どもである。その子どもは,「1回転に1進む，1回転に2進む」ということから，ウサギとカメそれぞれの動きを2つのスケールの上に表現し,それをもとに問題の解決をはかっている。

P（田中）：えっと，僕はさっき佐藤君が，うんと，わかったことで言った，うんと，カメの方は，うんと，1回転に1進み，ウサギは1回転に2進むので，こういうふうな表にしてまとめてみました（ノートを見ながら話しをする)。そう，えー，そしたら，うんと,（間,黒板の図をみる）そうしたら，カメ，カメの方が，うんと，カメの方がちょっと進んでいたので，カメ，カメの方が早い，早いんじゃないかと思いました。いいですか。

これに対して，この図を用いて再度説明に挑戦した子どもの説明は別の特徴をもっている。

鈴木の説明では，カメとウサギを取り違える部分があるが,「1回まわすと2ます進みます」として，実際に数直線のうえで，ブロックの動きを再現してみせている。そして，1回まわすときに，カメとウサギが同時に移動する様子である。カメ，ウサギがそれぞれ移動しているわけではない。さらに，ウサギのブロックがカメに追いつき，抜き去る様子を述べている。

鈴木は，差が縮まり追いつき，追い越すという視覚的なブロックの動きに関するイメージをもちながら，その動きを1回転で進む長さをもとに再現，そして構成できる。

P（鈴木）：で，それを図にしてみるとこうなるんです。で，ちょうど1回まわすと2ます進みます，カメは，あーウサギは，その間カメは1ます進んでます。で，また2回まわすと，カメは4ます進んでいます。で，カメは2ます進んでいるでしょう。(ここまではカメ，ウサギのスケールで1，2を指でさしながら説明する）でそれを繰り返していると，えっと，だんだんウサギはカメに追いついて，で，で，15，あれ，（図のカメのスケールを数える）で追いついていって，ちょっと付け足すんですけど（16をカメのスケール，そしてウサギのスケールに書き込む)，16回目で同時になります。だけど，ちょっと。

P（鈴木）：えっと，それで15回目で同時になります（図の15の場所を指差す)。で，それでウサギがどんどん抜き返してきて，一番最後のますまでいきます。

さらに，29−15=14，29÷2=14.5として立式して解決している。鈴木は再現した動きをさらに，動きとしてのみではなく，回転数と進んだ長さ，1回に進む長さの関係を巧みに利用し，問題解決している。

P（鈴木）：それで15回目で同時になります（図の15の場所を指差す)。で，それでウサギがどんどん抜き返してきて，一番最後のますまでいきます。でも，問題は29のところでどちらが，えっと，ゴールするかってことなんですよ。で，29回，ウサギは一番最初から29までいくんですけど，カメは15ます目から行くんですよ。で，15ます目から，15ます目ということは，29引く15は14ですよね，14,

T：（この説明の間鈴木の発言にあわせながら，"29−15=14"と板書）

そうすると，14回まわすと，えっと29回，ん，29ます目にいくんですね。で，ウサギの方は今度は2ますずつ進むんだけど，えっと，20，20，あの，29ます割る，えっと，2にすると，14.5になるんですよ。

T：(この説明の間鈴木の発言にあわせながら，"29÷2=14.5"と板書）

P（鈴木）：ということはウサギは14回まわしてあと半分，また，まわさなければいといけないことになるから，えっと，私はカメの方

が早いと思います。

次に，表の上での説明する子どももいた。その子どもの説明は，田中と同じである。すなわち，１回転での進む長さをもとに，動きを表の上で再現している。そしてこの子どももウサギ，カメをそれぞれに動かしている。

P（山田）：私は，要は田中君と考え方は同じなんだけど，私こういう数直線みたいな図が苦手なので，私はこういう表に表してみました。うんと１回１回転するごとにウサギは２個進んで，カメは１個ずつ進むので，ウサギは０地点からスタートでカメは15の地点からスタートだったので，こういうふうに倍，倍ずつにしていって，それで，14回目にカメが29で，ウサギは28だったので，ウサギはあと半回転しないと29までいかないので，ウサあ，カメの方が早いと分かりました。

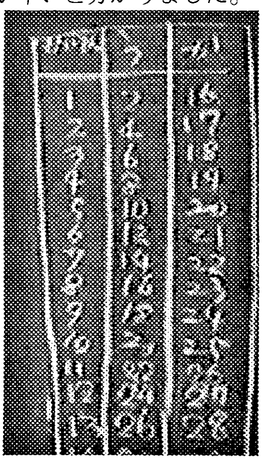

図. 4

３人の説明をした子どもの説明での表現にもう少し注意を払ってみよう。

鈴木の説明は，動きを動きとして再現し，それについて語っていることがわかる。これに対して，山田と田中は動きを再現することを語っている。すなわち，同時に動いていることをどのように表，図の上で語るのか，回転数が関係して両者を同時にみることができるかなどが重要であることがわかる。

これらの子どもの説明をみていると，思考の特徴がみられる。すなわち，動きを再現することができること，そして，再現したものをもとに数学化することである。動きを再現するときの媒体，表，図の間では顕著な違いはないようである。

これらの説明をした子どもたちは，一応，問題が解決できている。しかし，授業のなかで説明していない子どものなかには，表や図を作成せず，装置のうえで目盛を想定し，先を予測しようとしている。もちろん，この解決方法は，動きの再現ということになるが，あくまでも動作的で，それを言語記録することはしていない。次に操作できる状態，または扱える状態にはなっていない。いかに扱えるような表現をするかがひとつのかぎでもあることがわかる。

５．リアリティの観点からの授業再組織のために検討

５.１　３つのレベルのリアリティ

小学校での授業では，２つのレベルの異なる説明がなされている。また，授業でのやりとりに現われていない部分を考えると，３つのレベルがある[註5)]。

まず，授業のなかで発言としては生じていないが，装置をつかって解決してようとしていた子どもがいた。それは次のような状態である。装置の上で目盛を想定してみて，トンネルの出口の位置を想定して，ハンドルを回してみるのである。このような装置での操作の繰り返しでは，ハンドルを回す回数に着目することはあまりないだろうことが予想できる。また，子どもたちの間で生じてくる問題点は，想定した目盛の正確さ，ブロックの出発の位置のずれなどであることが考えられる。そしてこれらの問題点解決のために，繰り返しブロックを動かすことがなされるはずである。これが第１のレベルである。

これに対して，授業で発言した子どものなかでみられる第２のレベルにあたることは，「１回すときに２進む，１回すときに１進

む」ということから，動きを再現している状態である。この状態は，小学校の授業でもみられているが，模擬授業でもみられている。すなわち，図. 2に示した解決がそれである。問題の解決が，動きの再現によってなされている。

さらに，第3のレベルにあたるのが，再現された動きをもとにしながら，回転数と動いた長さ，または位置の関係にかかわる問題解決をしている状態である。

レベル2とレベル3の違いは，Sfard が述べている操作的概念と構造的概念の違いである。2つの間では使われている言葉が異なるという見方もできるが，扱っている対象が異なると考えることもできる。すなわち，動きを記述する第2のレベルでは，動きを再現することが重要であり，その動き方に言及しているわけではない。もちろん，「1回まわすときに2進む」という表現は，一見動き方に言及している。しかし，その表現が，ブロックの全体的な動きがそこに込められているわけではない。

これに対して，レベル3では，扱っている対象が再現された動きである。再現された動きをみるとき，回転数を媒介としながら，動いた長さに着目しているのである。「1回まわすときに2進む」という表現は，「1回まわすときに1進む」と同じであり，それらが関連しあっている解決がなされている。このために，29－15と29÷2ということが同時に扱える解決となっているのである。

レベル1は，操作的なレベル2に進むための前提であると考える。レベル1では，ブロックを動かすことにリアリティがある。そして，レベル2にある子どもにとって，リアリティがもてるのは，ブロックが動いていく様子を再現できることである。これに対して，レベル3の子どもは，再現された動きにリアリティがある。これが操作的ではない側面をもっている。すなわち，動きを再現することにリアリティがある子どもは操作的に再現できるのである。しかし，再現された動きにリアリティのある子どもは，再現されたリアリティ自体への操作が可能である。

5.2 授業再組織のための留意点

装置を用いた授業についてこれらの観点から再検討すると次のような示唆が得られた。

ひとつは，リアリティを子どもがもつためには，動きの再現が不可欠であるために，動きに関する何らかの表現を試みることを促すことが必要である。その表現が，図であっても表であってもかまわない。実際の授業ではこの点に関して，授業者は「表を書いているひとがいるよ」という形式的で消極的な介在で終わっている。より積極的に，少なくとも，例を紹介し，類似の仕方で動きを再現することを促すことになる。

続いて，動きを再現したものについての検討を加えることである。表現が異なっていてもかまわないのである，それらについて語ることが重要である。その表や図をつかって，解決をはかる段階を設定することが次になされるべきことである。

また，最初のリアリティをつくるために，今回の授業で実施したような問題設定までの過程をとること，特に，実際にブロックを動かしながら，そしてウサギとカメのイメージを用いながら，動きの再現へのあしがかりをつくることが，大切である。

6．おわりに

子どもにとってのリアリティを構成し，それを数学的に発展させることを目指して，装置を用いた授業を振り返った。そのなかで，動きを再現すること，それを次に扱える対象とすような表現をすることが重要な側面としてみえてきた。そして，そのようなリアリティは，1回すとき2進むという現実の操作から生じるし，そのような操作が，将来的には見直され，比例定数として発展することにな

る。すなわち，動きを制御するものとして扱われることになる。装置の動きの構造を支配する概念へと発展するのである。

数学的なリアリティへと発展する過程を想定すると，このような，操作とその表現の仕方が重要な役割を果たしていることがわかる。

次には，これらの観点から従来実施されている授業で扱われている教材を見直すこと，実際の授業で再実現してみることが今後の課題である。また，授業のなかで子どもが書いた表が，装置と同じ向きでたて書きだったり，学生の書いた動きの図も同様に，装置と解決者の位置関係を維持して描かれていた。これらは数学の問題を解決するうえでの一つのリアリティの現われである。このようなリアリティについてもさらに検討することも必要である。

謝辞

授業を実施する機会をいただいた古藤怜先生（上越教育大学名誉教授），新潟市立浜浦小学校生田雅之先生，そして6年2組の皆さんに感謝いたします。また，授業の準備にあたって装置の準備など協力をしていただいた，上越教育大学大学院生の新井馨さん，桐山眞一さん，吉田亨さん，内山一敏さん，高橋久誠さん，高島純さんに感謝いたします。

註

註1）リアリティという用語について簡単に述べる。リアリティは一般には現実に近い意味をもっている。しかし，ここでは現実という意味ではなく，個人，またはある特定の社会の構成員にとっての現実の意味で用いる。

Freudenthal は数学におけるリアリティに関して，現実という意味では用いていない。数学が活動から生じ，その活動を含めてリアリティとみている。また，デービスら (1986) が数学的実在と表現していることも同様である。彼らは，超立方体というものを操作的に構成してみせている。そして，次のように述べている。「われわれが超立方体に関するこのような明確な情報を発見できるという事実は，それが何らかの意味で存在するに違いない，ということを意味するように思われる‥‥それは虚構の相念的対象ではあるが，それがいくつかの頂点，稜，面，超面を持つかについて何の疑念もない」(p. 386)

すなわち，超立方体という現実には存在しないと思われる対象であっても，それに関する情報が発見できるような状態が感じられるようになると，数学的な存在があるとみるようになることが述べられている。

活動やその結果として生ずる性質などをもとに新たな知識を構成していける可能性をもっているのもをリアリティと呼ぶことにする。

註2）装置を利用した授業は，1998年9月25日，平成10年度新しい算数研究全国大会（新潟市立浜浦小学校6年2組）において実施した。

註3）このようなとらえ方がなされる背景には，「数学的な創造活動の中でどう活用されるべきかという立場である。」と中島が述べているように，創造的活動に関数の考えを位置付けていることにある。

註4）大学3年生を対象とした模擬授業は1998年9月3日に実施した。装置は1台のみで23名の学生を対象とした。

註5）装置を利用した問題の中学生による解決においても，類似のレベルがみられる。詳しくは，桐山眞一. (1999). 中学生における関数の理解に関する研究　――次関数を事例としてー，上越数学教育研究, 14, 61-72. を参照。

参考・引用文献

デービス,P.J., ヘルシュ, R. (1986). 数学的経験.

森北出版.
菊池兵一. (1984). 真実感と充実感のある算数指導. 東洋館.
熊谷光一. (1999). どちらが先にトンネルを出てくるかな？. 新しい算数研究, 336, 111-113.
中島健三. (1981). 算数・数学教育と数学的な考え方. 金子書房.
Dörfler, W. (1986). The cognitive distance between material actions and mathematical operations. Proceedings of 10th international conference for the psychology of mathematics education, 1986, London, 147-152.
Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nune, & P. Bryant (Eds.). Learning and teaching mathematics: An international perspective. UK. Psuchology Press Ltd. Publishers. 315-345.
Greeno, J.G. (1991). A view of mathematical problem solving in school. In M.U.Smith (Ed.), Toward a unified theory of problem solving: View from content domains, 69-97, Hillsdale, NJ: LEA.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reifications on processes and objects as different sides of the same coin. Educational studies in mathematics, 22, 1-36.

資料.1

装置を用いた授業の想定プロトコールの抜粋

（意図）進む速さと時間のかかわりのイメージ化

Ｔ：時計と送電線の電柱をつかった新幹線と在来線の速さの話しをする

（意図）装置では動きに着目することの暗黙の理解を明確化する

Ｔ：みんなの前におもちゃみたいなものがある。動くのかな，さわってみよう。

Ｐ：あー動く

Ｔ：ハンドルを回すとこっちに動いたね。もどすときはこうやって，ここのスプーンをこうずらしてもどすんだよ。
動かしていて気付いたことがあったら友だちに伝えて（話して，ノートに書いて）おいてね。

Ｐ：（しばらく動かす）

Ｔ：さわってみて，動かしてみて，いろいろわかってきたことがあると思うけど，気付いた，わかったことを話して下さい。誰か？

（意図）動きをイメージすること（だんだんおいつく，またはおいつきそうになると，個別的動き）

Ｐ：速い方と遅い方がある。

Ｔ：速い方と遅い方があるかな？動かしてみて

Ｐ：こっちの方が遅くて，こっちの方が速い

Ｔ：ほかにあるかな

Ｐ：出発する場所がちがっている

Ｔ：あー，みんな自分たちのをみてみよう。違っているね。一方がずいぶん前から出発しているね，ほかにはあるかな

Ｐ：１回まわすときに，１進む

Ｔ：おー，すごいことに気付いたね，そうなっている？確カメてみて

Ｐ：速いほうは２個すすむ

Ｔ：１回まわしたとき１すすむのと違うの

Ｐ：遅い方は１すすむ

Ｔ：みてみよう皆のそうなっている？１回まわしたとき，遅い方は１進む，速い方は２進む

Ｐ：（動きを確カメる）

（意図）ウサギとカメのイメージで動き（だんだんおいつく，またはおいつきそうになる）をさらに念頭で想像できるようにする

Ｔ：このおもちゃのことが少しわかってきたみたいだね。速く動く方と遅く動くのにそれぞれ名前をつけよう。どういう名前がいいかな？

Ｐ：ウサギとカメ

Ｔ：速い方をウサギさん，遅い方をカメさんとでもしておこうか？

（意図）問題の設定

Ｔ：さて，このおもちゃを使って問題を考えてみようと思う。先生が準備してきた問題はどんな問題かな。想像がつく

ＰＰ：ウサギとカメどちらが速いか？など

Ｔ：では，問題を書きます。ノートに書いて考えて下さい。
問題：　トンネルがあります。（トネンルの出口は２９のところですウサギさんとカメさんでは,

どちらが先にトンネル出てくるでしょう。
T：どちらが先に出てくるかな？予想では
P：ウサギ
P：カメ
T：どうして，
P：こっちが速いから，こっちが前にいるから
T：問題について何か聞きたいことはありますか
P：出口はどこにあるのですか？
T：じゃあ前の人に確カメてもらいましょう。
P：２９
T：出口はここから数えて，２９目盛のところにあります。みんなの機械では目盛がありませんね，工夫して考えて下さい。
（個別活動）
（意図）状況の記述から変数の分離へ
T：（動きを記述している子どもをさがし，その一部を紹介する）

カメ	1	2	3	4	・・・・・・
ウサギ	2	4	6	8	・・・・・・

カメ	１５	１６	１７	１８	・・・・・・
ウサギ	0	2	4	6	・・・・・・

T：この表みたいなものでやっているね，この表でやったことはどういうことかな
P：１回まわすときに，１進む
T：おー，すごいことに気付いたね，そうなっている？確カメてみて
P：速いほうは２個すすむ
T：１回まわしたとき１すすむのと違うの
P：遅い方は１すすむ
T：みてみよう，皆のそうなっている？１回まわしたとき，遅い方は１進む，速い方は２進む
P：（動きを確カメる）
P：ここが１進む「で」，ここが２進む
T：（このあと数人同じようなことを話させる。そのなかで，１ずつ進むとき，２進むなど，依存関係を表現することばに注意を払う）
T：あーみんなわかったいいことといったね，いま。いままでのひとと表現が違っていたね。わかった。もう一回言って。
P：○○のとき○○になる
T：ときっていったね。
T：みんな機械でも確カメてみてね，１進んだとき，２進む，２進んだとき４進む・・・そうなっている。
（再びグループで活動）
（意図）再び状況の記述から変数の分離へ，動きと状態の統合
T：では解決結果を聞いてみましょう。
T：（機械との関連をつけさせる。また，状態的に説明した場合は，１進む，２進むと表の関連に注意を払って説明させる。これによって状態をとらえている子どもと動きを捉えている子どもの間の関連をはかっていく。表の関連を考えることで，進んだ距離と位置の関係が明確化されるとともに，）
・とにかく記述した解決
・進んだ距離を記述したもの
・状態を記述したもの
・何らかの関係をみながら解決したもの
　回転数を独立変数とみる
（意図）結果の現実での確認
T：それでは，どちらが先に出てきたか，先生のところにある機械で確カメてみましょう。みんなのところにある機械でもできますよ。黒いテープをはがしてみて下さい。たしかにカメさんが先に出てきましたね。
T：ここで，表のどこまできたかな？
（意図）追いつき算の見方
T：別の解決がありました。紹介して下さい。
P：２９－１５＝１４，１４×２＝２８
だから，カメがはやい。
（意図）理解の状態の評価，イメージと表，変化のかかわり，式への展開のための準備
T：ウサギがカメにおいつくのはいつか気付いた人はいますか？
表からわかりますか？
式で考えることができますか？
（□×２＝１５＋□）
（意図）問題の発展
T：では，ウサギさんが先にでてくるようにするためにはどうしたたよいでしょうか。
T：他に解決してみたい問題はありますか？
P：ウサギが３進んだらどうなるか
P：カメがもっと遅く目覚めたらどうなるか
P：トンネルの場所を変える