

[算数・数学]

生徒が「解の吟味」を意識する学習活動の工夫

山崎美智子*

1 研究の動機

3年生の二次方程式の授業で「解の公式」を取り上げる際に、「いつでも答えが有理数であるわけではない」ことを課題提示の軸の1つにしてきた。それは、1次方程式や連立方程式の解が、整数だけではなく、小数、分数もあり得ることと同様である。これは、ややもすると、分数の解が出そうになると途中で計算をやめてしまう生徒に伝えたい、数学に対する意識である。

一方、中学校学習指導要領解説数学編において、「(解の) 公式を用いて導いた解については、ややもすると量感が失われ、実際にあり得ない答えを出して気付かないような状況に陥りがちである」ということが懸念されている。だからこそ、「具体的な問題解決の場面で二次方程式を活用する場合には、得られた解が問題の答えとして適切であるかどうかを調べることをこれまでの一次方程式や連立方程式の活用以上に重視する必要がある」とされている。この、「求めた解を問題に即して解釈し、問題の答えを求める活動」は、1年生の一次方程式の活用でも必要である。

では、生徒の実態はどうかというと、授業の合間に聞こえてくるのは、「二次方程式の活用は苦手」「活用問題は無理」という言葉である。生徒は、まず文章問題が出てきたことに抵抗を感じる。そして、二次方程式の活用では、式を解いて求めた2つの解のうち、一方の解が適さない場合がある。この、「せっかく求めた解が答えにならない場合がある」ことに更に抵抗感を強める。この「解が適しているか判断する」ことを、どのように意識させていくかが例年の課題である。また、過去の定期テストでも、無回答であったり解が問題の条件として明らかに適していない数値であったりする解答用紙を見てきた。OECDのPISAの結果などから「思考力・判断力・表現力などを問う読解力や記述式問題、知識・技能を活用する問題に課題」とされている中で、反省すべき実態である。

「二次方程式の活用」は、3年間の方程式学習の総まとめとなる単元である。生徒には、これまで解決できなかった問題も、二次方程式を活用すると解決できることを知り、問題の解決に方程式がより広く活用できることを理解させたい。また、二次方程式を活用することへの抵抗感を減らし、答えを導き出すことができた実感を味わわせたい。そのために、問題内容を丁寧に読み取り、解の取り得る条件を考える段階を重視して授業改善を図ることにした。

2 研究の目的

様々な実践から学習意欲を高める工夫を学ぶ中で、栞山(2012)は「試行錯誤させることが論理性や算数的な思考を高める」とし、「ある程度、ハードルが難しいものに挑戦し、それが解決されたときに、目指す授業展開(腑に落ちる状態)になる」としている。また、昨年の新潟県中学校教育研究会指定の数学教育研究発表会に参加した際に、授業公開を行った風巻氏(中郷中学校教諭)は、協議会で「言語活動を充実させることで、論理や思考の基盤を充実させることになり、数学的な表現の良さを感じることや数学で必要となる論理的な思考が育まれることが期待できる」としていた。そのためには、「生徒が進んで表現したくなる課題を設定すること」の重要性を唱えている。さらに、同氏は、意欲的に課題に取り組ませるために、「助走問題」の大切さを指摘している。助走問題とは、課題追究に必要な知識や条件を確認する問題であり、追究課題の前に取り入れる。このような問題を設定せずに学習を進めると、不安が生じ活動に参加できず、言語活動の充実は図れないからである。

本研究では、試行錯誤させられる課題の設定、そのための助走問題を工夫しながら、互いの意見を交換する場を取り入れた授業実践を行うことで、解を吟味する意識を高められるかを検証する。

* 上越市立三和中学校

3 研究仮説

解の吟味が必要となるような具体物を用いた課題を試行錯誤問題として設定し、そのための助走問題を意図的・段階的に提示し、互いの意見を交換する場を取り入れることで、解の取り得る条件を具体的に考え、適、不適を吟味する意識を高めることができるであろう。

4 研究の方法

本研究を推進するに当たり、以下の4つの手立てを講じていくこととした。

(1) 具体物を用いた課題の設定

課題の設定において、①生徒がイメージしやすい具体物を用いること、②解法の見通しがもてる課題であること、③試行錯誤させられる課題であることを条件とした。この条件を満たす課題として、長方形の面積問題を取り入れることにした。①について、長方形ならば図で表すことも容易であり、具体的な形、大きさをイメージしやすい。②について、(縦)×(横)=(長方形の面積)という求め方は、各学年、各領域で随時出てきているため、想起しやすい。③については、条件を加えることで難易度を変えられるため、生徒の実態に合わせて試行錯誤させる課題を設定できる。以上の見解から、面積問題を取り上げることにした。

(2) 適、不適を吟味する力の現状把握と助走問題の工夫

課題の難易度を考える際に、事前アンケートを実施し、現状把握を行った。

表1 既習内容に対する生徒の意識調査(調査対象生徒：H24年度3年生25名)

「3年間の方程式の学習を思い出してみよう。どんな内容が好き(得意)、嫌い(苦手)でしたか？」

好き(得意) ランキング	1位	2位	3位	4位	5位	6位
1年：1次方程式の解き方	20人	1人	3人	1人		
1年：1次方程式の活用		8人		5人	9人	3人
2年：連立方程式の解き方	2人	12人	9人	2人		
2年：連立方程式の活用			1人	5人	8人	11人
3年：2次方程式の解き方	2人	2人	9人	6人	2人	4人
3年：2次方程式解の公式	1人	2人	3人	6人	6人	7人

1, 2年の方程式において、「解き方」の項目では上位に、「活用」の項目では下位に人数が集中している。「方程式を解く」ことへの苦手意識は少ないが、「活用すること」に対しては、未だに苦手意識をもっていることが分かる。

表2 1, 2年生の「方程式の活用」問題への取組状況(調査対象生徒：H24年度3年生25名)

問題① 1冊150円のノートと2冊と1本100円のボールペンを何本か買ったところ、代金の合計が600円になった。方程式を作り、買ったボールペンの本数を求めなさい。
問題② 1個160円のリングと1個100円のみかんを合わせて20個買い、代金の合計が1400円になるようにしたい。リングとみかんを何個ずつ買えばよいか、答えなさい。

	立式できる	無回答
問題①	76%	24%
問題②	44%	32%

問題①は基本的な一次方程式の文章問題である。25人中19人の生徒が方程式を作り、解を求めることができていた。しかし、文章問題への苦手意識が強い生徒もあり、6名が無回答であった。
問題②は求める数量が2つあり、立式した生徒は連立方程式をつくった。ただし、この解を求めると、負の数になり、個数の答えとして適さない。結果、問題①よりも立式する生徒数は減少し、無回答が増加した。

表1と表2問題①の状況から、方程式を解く力は身に付いているものの、問題内容を読み取り方程式を作る段階に苦手意識が強いこと、立式できない生徒がいることが分かる。そこで、授業実践の際には、助走問題として(長方形の面積)=(縦)×(横)を全員に把握させてから授業を進めることにした。

注目したいのは、表2問題②の結果である。本来、問題としては適さない課題であったが、生徒がどのような反応を示すか興味があった。結果は、求めた数値が負の数(リングの個数の値が-10となる)であることから、生徒は様々な戸惑いを見せた。まず、解答欄に-10個と答える生徒はいなかった。解が適しているか考え判断した結果であると考えられる。では、生徒はどのように対応したかという、無回答が増え、立式しても途中式を消してしまう者も多かった。その中で、数名が自分なりの表現で解が適さないことを示してきた。

生徒A： $x = -10$ $y = 30$???	生徒B： $x = -10$ 解けません…。	生徒C：「安い方のみかんを20個買っても、代金は2000円になってしま う。20個買って代金が1400円になるなんてありえない。」
-----------------------------------	---------------------------	--

生徒Cは、解の取り得る条件を把握し、なぜ適さないのかを自分なりの言葉で表現している。ここまで明確に主張できる生徒は少ないが、生徒A、Bのように、解に疑問をもって相手に伝えようとしている部分を大切にしたい。それが、解の取り得る条件を具体的に考え、適、不適を吟味する意欲につながると考える。授業実践でも、助走問題で不安感を減らし、試行錯誤問題で十分に時間をとり、自分なりの考えを表現できるようにする。

(3) 助走問題を足掛かりとして主題の条件を吟味しやすくする、意図的な課題の提示

授業では、2つの課題に取り組む。1問目が助走問題、2問目が試行錯誤問題である。

課題① 面積が 24m^2 の長方形の土地をつくるには、縦を $\square\text{m}$ 、横を $\triangle\text{m}$ にすればよい。 \square 、 \triangle に入る数値を考えよう。
課題② 20mのロープを使って、面積が 24m^2 の長方形の土地を囲む。土地の縦の長さは $\square\text{m}$ 、横の長さは $\triangle\text{m}$ である。 \square と \triangle に入れる数値の候補は1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24。どの値が適しているだろうか。

課題①では、(長方形の面積) = (縦) × (横) = 24となる値を複数挙げさせる。長方形の面積の求め方と共に、様々な解が適していること、負の数は適さないことを具体的に確認する。

課題②では、面積の数値を課題①と同様にし、「20mのロープを使う」ことを新たな条件として加える。課題①の条件($\square \times \triangle = 24$)に、「縦と横の長さは合わせて10m ($\square + \triangle = 10$)」という条件が加わることになる。候補として挙げている8つの数値は24の因数であり、課題①の解の条件を満たすことができる。そこで、新たに加わった「20mのロープ」から解の範囲を吟味し、言葉や図、式を使って表現することを目標とする。

(4) 授業形態の工夫(班活動)

今回の授業実践のねらいは、二次方程式を立式することよりも、解を吟味させることに重きを置いている。解の条件をどのように整理し言葉や図、式を使って表現することができるか。まずは個々が考えをもち自分の力で解の条件を書き出させたい。ただし、(2)の現状把握としては、表現する力は様々である。様々な学力の生徒がいることを考え、個々で考える時間をとった後、グループごとに検討する活動を取り入れる。

今年度、校内の個人研修目標としてもグループ活動の利用を挙げている。現在まで、計算領域で随時グループ活動を取り入れてきた。そこでのねらいは「全員で基本的な計算力を付ける」ことであり、互いに教え合い学び合う中で、基礎・基本の定着を図った。今までの様子から、生徒同士で意見を交換し合うことへの抵抗感は少なく、仲間と共に活動することで、数学に苦手意識をもっている生徒の学習意欲を高めさせることにもつなげたい。今回のグループ活動は、より一層互いの考えに対する吟味が必要になってくるが、今までの取組を生かしながら実践していく。

5 授業実践及び考察

(1) 面積問題に取り組み、解の条件をとらえ、言葉や図、式を使って表現する。(解の吟味を意識させる)

課題① 面積が 24m^2 の長方形の土地をつくるには、縦を $\square\text{m}$ 、横を $\triangle\text{m}$ にすればよい。 \square 、 \triangle に入る数値を考えよう。

課題①に入る前に、前時でのアンケート(表2問題②)について想起させた。アンケートは回収しており、生徒の手元にはなかったが、思い出した生徒は「あの問題、間違いですよね?」「答えが変だった。」などつぶやいた。その反応と表2問題②での生徒Cの意見を取り上げ、本時が、今までのように「出された方程式を解いて答えを求める」のではなく、「具体的な課題になったときの答えの数値にこだわる」内容であることを伝えた。

課題①では、複数の解を挙げさせるために、教師側から「例えば?」という呼びかけ方で生徒の発言を求めた。

生徒から出てきた値
i) 縦3mと横8m
ii) 24mと1m
iii) 1mと24m
iv) 8mと3m
v) 4mと6m
vi) 2mと12m
vii) つぶやき
viii) 6mと4m

i)~vi)の6パターンが出たところで、生徒の発言のテンポが落ちた。

そのときに生徒の中から次のようなつぶやきがあった。

vii) のつぶやき

「 \square と \triangle の数字を逆にしてもいいんじゃない?」

「先生、小数とかでもいいですか?」

「 $\sqrt{\quad}$ は使ってもいいですか?」

教師側は「どうですか?」と全体に投げかけ返すだけにとどめた。

- ix) 12mと2m
- x) $2\sqrt{6}m$ と $2\sqrt{6}m$
- xi) 48mと0.5m

すると、さらにviii)～xi)の4パターンの発言が続いた。

その後、意見が落ち着いたところで、次のようなやりとりを行った。

T：小数や $\sqrt{\quad}$ 、これらの答えはいいですか？どうやってこの数字を選んだのですか？

S：かけて24になる数字。

T：なるほど。(長方形の面積) = (縦) × (横) を板書。 $2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6}$ の計算を確認

T：小数も分数も、 $\sqrt{\quad}$ の値もOK。

逆に、この数字はダメだというものがありますか？

S：マイナスの値。

このやりとりを通して、本時が答えの値を吟味する内容であることを意識付けた。

課題② 20mのロープを使って、面積が $24m^2$ の長方形の土地を囲む。土地の縦の長さは $\square m$ 、横の長さは $\triangle m$ である。 \square と \triangle に入れる数値の候補は1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24。どの値が適しているだろうか。

各自が課題に取り組む中で、生徒から「ロープは20mきっちり使うんですね?」「長方形を囲むってことは、4辺をロープでつくるんだから…」という確認やつぶやきが聞こえた。この言葉からも、新たに加わった「20mのロープを使う」という条件に注目していることが分かる。

10分程度個人追究の時間をとった後、4人班でのグループ活動に入った。班で検討し、他の生徒を納得させられるように言葉や図、式でまとめるよう指示を出した。

<p>20mのロープを使うので 長方形の土地の4辺を 足して20mにしなくては いけない。 よって $\square m$ と $\triangle m$ が 当てはまる。 他の数字だと出来ない。</p>	<p>理由 1. 24. 2. 12. 3. 8 のペアは 20mの長さにはあてはまらない。 50 28 22 20 OK!!</p>	<p>長方形を図で表すと よって $\square \times 2 + \triangle \times 2 = 20$ (倍はよいので かけて24の候補を代入して求める 1×2+24×2=50 一の位が 2×2+12×2=38 上の式の条件にあてはまらない 3×2+8×2=22 □と△には6と4が入る。 4×2+6×2=20 A. 6. 4</p>
<p>【言葉で説明】 課題①の条件 ・縦×横=24 ・負の数にはならない の、2つにさらに条件を追加</p>	<p>【図で説明】 まず、かけて$24m^2$になるペアを書き出して みる。 長方形の4辺をたして調べてみると、 例えば、1mと24mのペアは50mの ロープが必要になってしまう。 20mのロープで長方形をつくれるのは、 6mと4mのときだけ。</p>	<p>【図と式で説明】 ロープの長さを式で表すと $\square \times 2 + \triangle \times 2$ 「×2」は長方形は向かい合う辺の長 さが等しく、縦、横2本ずつ長さが必要 だから。 \squareと\triangleに数字を代入して20になるもの は6mと4m。</p>

図1 班でまとめた発表用ワークシートと発表内容

個人追究の段階で、全員が解を予想し数値を出していた。その解に対して、どのように吟味していったのか、解の条件を自分なりに書きだしている生徒と、空欄の生徒がいた。「他の生徒を納得させられるように」という意識から、言葉でまとめた後に図を加えたり、式を用いて説明した後に実際に代入して確認したりと、様々な工夫が見られた。

(2) 前時の課題(課題②)を、二次方程式を用いて解く。(解の吟味の結果を確認する)

前時では、二次方程式の活用問題でありながら、全く方程式を出していない。方程式の活用では、①求めたい数量を明確にし、何を x などの文字で表すかを定める②方程式を作る③方程式を解く④方程式の解が問題に適しているかを確認するという、4段階の手順が基本となっている。その際、生徒が苦手とする段階として①②の部分課題である。そこで、前時で出てきた条件を利用して、式を組み立てる実践を行った。

基となる条件： ①長方形の土地の面積が24m ² $\square \times \triangle = 24$	②長方形の土地を囲むロープの長さは20m $\square \times 2 + \triangle \times 2 = 20$ $\square + \triangle = 10$ $\triangle = 10 - \square$
--	--

②より、縦を x としたときに、横を $10-x$ と表す文字式が見えてくる。①②をまとめると、二次方程式 $x(10-x) = 24$ を作ることができる。前時の解の吟味が、課題内容を理解し、立式する際にも役立つことが分かる。

この二次方程式を解くと、 $x = 4$ 、 $x = 6$ の2つの解が求められる。前時での解の吟味で、どちらの数値も問題文に適することから、二次方程式を使って解が求められていることを確認した。

その後、2つの課題とアンケートを実施した。

課題③：16mのロープを使って、面積が15m ² の長方形の土地を囲む。土地の縦と横の長さを求めなさい。
課題④：1本100円のジュースを何本か買って、2000円を出したら、おつりが350円だった。ジュースを何本買ったのか求めなさい。

課題③は課題②の数値を変えた問題である。生徒は課題②を参考にしながら解いていた。25人中12人が条件を言葉や図、式で書き表していた。さらに、二次方程式を作って解を求め、適しているか確認している生徒は、そのうち9人いた。

[ロープの長さに注目] 16mのロープを使うということは、長方形の4辺の長さを足して16mになればいい。	[箇条書きで条件を書き出す] ①長方形の4辺の合計は16m ②マイナスの値にはならない ③縦×横=15	[式で表現] ① $\square \times 2 + \triangle \times 2 = 16$ $\square + \triangle = 8$ ② $\square \times \triangle = 16$
---	--	--

課題④の内容は、1年生の一次方程式である。本数を求めさせているにもかかわらず答えが小数になり、表2問題②と同様に、本来、一次方程式の活用問題としては適さない課題であった。その課題に対して、生徒は次のような反応を示した。

S 1：答えは16.5本になる。しかし、常識的にあり得ないと思うから、この問題はおかしい。 S 2： $x = 16.5$ 本。おつり350円はあり得ない。 S 3：おつりは100円単位になるはず！ S 4：100円のジュースを買うのだから、何本買っても50円のおつりはこない。 S 5：ジュースは1本100円なのだから、おつりが350円になるわけがない。 S 6：1本100円以外のジュースの条件が出ていないのに、なぜ350円になるのか？	S 7：なし S 8：答えはない S 9：16.5本？ S 10：??? S 11： $2000 - 350 = 1650$ おかしい S 12：ジュースを105円にしてみる？
---	--

方程式の解が小数になるが、「ジュースの本数」という具体物として適さないことを指摘する生徒がいた(S 1)。また、ジュース1本の値段からおつりとして出てくる数値をイメージして、100円単位になっていないことを指摘する生徒がいた。どちらも、課題を読み取り、解の取り得る値を具体的に考え、自分の意見を述べている(S 2～S 6)。中でも注目したい反応として、S 12の生徒は、解が適しないと判断し、ジュースの値段を変更することで解の取り得る条件を満たせないかと試行錯誤していた。

全体としては、その他に、無回答が7人、立式段階までの生徒が6人だった。

6 成果と課題

成果として、2時間目の課題④に対する生徒の反応が、課題②の時と比べ、無回答が減り、本人なりの意見が多数記述されている。これら2時間にわたる授業の様子とアンケートから、解の取り得る条件に対する生徒の意識の変容が見取れる。

また、アンケートの記述から、互いの意見を伝え合うことが個々の理解を深め、解の吟味への意識向上につながったと考える。表3のアンケート結果の数値と共に考察を行う。

表3 授業を振り返ってのアンケート（1はい 2どちらかというとい 3どちらかというといいえ 4いいえ）

	1	2	3	4
① 答えをイメージすることができましたか。	5人	13人	7人	0人
② 班の仲間と考えを伝え合うことができましたか。	13人	8人	4人	0人
③ 解の適, 不適を判断することができましたか。	10人	7人	8人	0人

(1) 具体物を用いた課題の設定について

今回用いた具体物は「長方形」である。具体的な形, 大きさをイメージしやすいことから「長方形の面積」について課題を設定した。その結果, 課題①での「マイナスの値はダメ」といった発言のように具体的に課題をイメージし, 解に適さないものを挙げるができている。また, 課題②に取り組む際には, 具体的な図を描きながら取り組んでいた。具体的に図を描くことで, 4辺分のロープの長さが必要なこと, 縦と横の長さはロープの半分を使うことなどを, 視覚的にとらえられたようである。このことから, 生徒にとって, 具体物を基に, 試行錯誤することは有効であると考えられる。

(2) 適, 不適を吟味する力の現状把握と助走問題の工夫について

授業を終えた感想では, 表3③について「吟味することも大切! 適さない数字もあることが分かった。」「二次方程式の活用は難しかった。ただ計算して答えを出して満足するのではなく, その答えが合っているのかを吟味することも大切だと思った。」「班のみんなとやることができた。答えを出すときに怪しむことが大切だと思った。」といった記述があった。このような生徒の意識が, 本研究の実践時だけでなく3年間の方程式内容において継続されることが, 本当の「生徒の意識の変容」であると考えられる。そのためにも, 今後の授業において, 教師側も「解の吟味」を意識し, 随時問いかけていきたい。

(3) 助走問題を足掛かりとして主題の条件を吟味しやすくする, 意図的な課題の提示について

問題を提示する際に, 生徒のつぶやきが興味深く感じられた。助走問題である課題①では, 「縦と横の長さを逆にしても問題に適するか」などという生徒の試行錯誤は, 解の吟味を行う第一歩である。また, 試行錯誤問題である課題②では, 課題①から新たに加わったロープの長さに注目し, 「ロープは使い切るのか」など, 新たな条件に注目する様子もうかがえた。このように, 段階的に条件を加えていくことで, 注目すべき視点が明確になり, 理解を深めることができたと考えられる。一方, 「難しい。頭が混乱した。」という感想もあった。表3①③の数値からも, 解を吟味して2次方程式の解を導き出すことができた実感が薄いと考えられる。今回, 時間をかけて解の吟味を行ったことが, 「2次方程式を活用して解くことができた」という実感へと十分につながられなかったことが反省点である。

(4) 授業形態の工夫(班活動)について

生徒は活用問題に苦手意識をもちながらも, 班の仲間と協力しながら課題に取り組んでいた(表3②参照)。記述からも, 「班の話合いで, 自分の考えなかった案があった。」「表の表し方や上手く説明できる式などが, 仲間の意見で参考になった。」「仲間から問題文の意味を教えてもらった。図を使うとわかりやすい。」といった, 仲間の考え方から学んだことについて書かれたものがあった。実際, 課題③に取り組んだ際に, 班で使った図や表を用いながら進める様子が見られた。授業前に現状把握として行った問題②で, 解の吟味を行ったのが3人であることに対し, 授業後の課題③では12人が班活動での表現方法を利用して解の吟味を行っていることから, 班活動での学びが生かされていると考える。

生徒にとって, 「数学ができる」ことが「数学が楽しい, 好きだ」と思う, 最も素直な感覚ではないか。そう考えたときに, 数学的活動の必要性や有用性, 解決過程の美しさや不思議さを実感させると共に, 課題が分かった, できたという実感も十分に味わわせたいと感じた。そのためにも, 生徒が課題に意欲的に取り組めるよう教材を工夫すること, 十分に学習内容を理解させる授業力が, まだまだ必要である。今後も, 試行錯誤させる追究課題やグループ活動の取り入れ方を工夫しながら, 学び合い, 高め合う授業実践について, 研究を重ねていきたい。

引用・参考文献

- ・中学校学習指導要領解説 数学編 (2008) 文部科学省
- ・栗山 仁志 「児童の多様な考え方が教師の期待した方向に収束しない場合の要因に関する研究」 上越教育大学学校教育総合研究センター 『教育実践研究第22集』 (2012)
- ・風巻 利夫 「言語活動を充実させ, 数学的な思考力を伸ばす授業」 平成22・23年度 新潟県中学校教育研究会指定 数学教育研究発表会 (2011)