

2次曲線の交点を通る直線について

上越教育大学 中川仁

平成11年3月17日

1 二つの円の交点を通る直線

二つの円

$$F_1 = x^2 + y^2 - 9 = 0, \quad F_2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 4 = 0$$

の二つの交点を通る直線を求めてみよう (cf. [1], p.39).

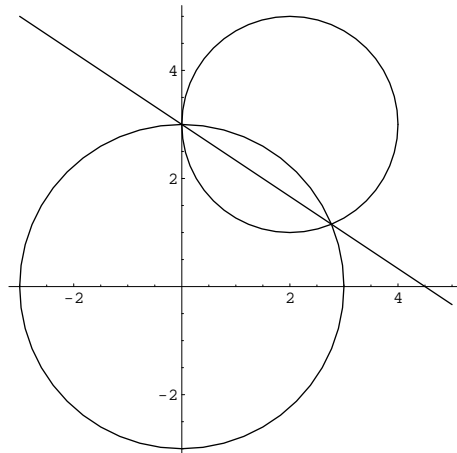


図 1: 二つの円の交点を通る直線

まず, 交点は $F_1 = 0$ かつ $F_2 = 0$ を満たしているから, $F_1 - F_2 = 0$ も満たしている. これから,

$$2x + 3y - 9 = 0 \tag{1}$$

を得る. y を x で表せば, $y = 3 - \frac{2}{3}x$. これを $F_1 = x^2 + y^2 - 9 = 0$ に代入して,

$$\begin{aligned}x^2 + \left(3 - \frac{2}{3}x\right)^2 - 9 &= 0, \\x^2 + 9 - 4x + \frac{4}{9}x^2 - 9 &= 0, \\x\left(\frac{13}{9}x - 4\right) &= 0.\end{aligned}$$

したがって, $x = 0, \frac{36}{13}$. これを (1) に代入して, 交点の座標

$$(0, 3), \left(\frac{36}{13}, \frac{15}{13}\right) \quad (2)$$

を得る. この 2 点を通る直線の傾きは

$$\frac{\frac{15}{13} - 3}{\frac{36}{13} - 0} = -\frac{2}{3}$$

であるから, これらを通る直線は

$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

である. 結局, これは最初に $F_1 - F_2 = 0$ として求めた (1) の表す直線と同じである. (1) の表す直線が求める直線であることは, 交点が 2 つ存在することがわかっていれば, 次の三つのことからわかる:

- 2 つの交点は $F_1 - F_2 = 0$ を満たしている.
- $F_1 - F_2 = 0$ は直線の方程式である.
- 異なる 2 点を通る直線はただ一つである.

2 円と楕円の交点を通る直線

円 $F_1 = x^2 + y^2 - 4 = 0$ と楕円 $F_2 = x^2 + 4y^2 - 9 = 0$ は四つの交点 $P_i, 1 \leq i \leq 4$ を持つ. ここで, P_1, P_2, P_3, P_4 の座標は, それぞれ,

$$\left(\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{21}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{21}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$$

である.

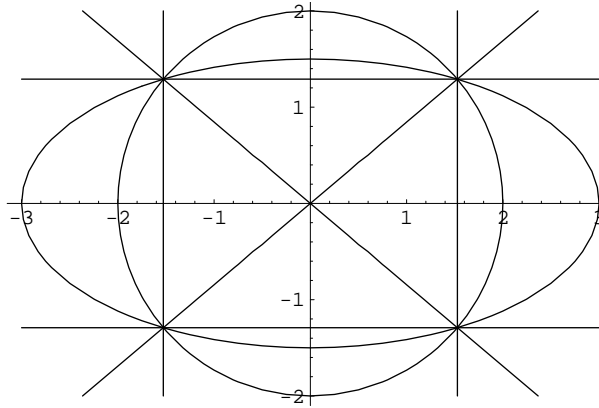


図 2: 円と楕円の交点を通る直線

これらの4点の中の2点を通る直線は ${}_4C_2 = 6$ 本ある. §1 でみたように, 交点の座標を求めなくても, 交点を通る直線を決定できるはずである. 実際, $F_1 - F_2 = 0$ より,

$$-3 \left(y - \frac{\sqrt{15}}{3} \right) \left(y + \frac{\sqrt{15}}{3} \right) = 0. \quad (3)$$

これは直線 P_1P_2 と直線 P_3P_4 を表す. 同様に, $4F_1 - F_2 = 0$ より,

$$3 \left(x - \frac{\sqrt{21}}{3} \right) \left(x + \frac{\sqrt{21}}{3} \right) = 0. \quad (4)$$

これは直線 P_1P_4 と直線 P_2P_3 を表す. さらに, $9F_1 - 4F_2 = 0$ より,

$$\left(\sqrt{5}x - \sqrt{7}y \right) \left(\sqrt{5}x + \sqrt{7}y \right) = 0. \quad (5)$$

これは直線 P_1P_3 と直線 P_2P_4 を表す.

3 2次曲線の退化

§1,2 の例から, 一般に次のことが成立すると考えられる:

係数 t をうまくとれば, 二つの2次曲線 $F_1 = 0$ と $F_2 = 0$ の交点を通る直線 (の組) は,

$$tF_1 - F_2 = 0$$

の形にかける.

そのような t の値の決め方について説明しよう. t は $tF_1 - F_2$ が x, y の1次式 (の積) になるように決めればよい. したがって, はじめから, 一つの2次曲線

$$ax^2 + by^2 + c + 2dy + 2ex + 2fxy = 0 \quad (6)$$

を考え、これが(二つの)直線を表す(このとき、2次曲線は**退化する**という)ための条件を求めればよい。すなわち、(6)の左辺が x, y の一次式(の積)になるための条件を求めればよい。そのためには、(6)の代わりに、それを3変数の2次同次式(**3元2次形式**という)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy = 0 \quad (7)$$

に置き換えて考えればよい。これはベクトルと行列を用いて、

$$(x \ y \ z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

と表せる。ここで、

$$A = \begin{pmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$$

とおいた。 A は3次対称行列である。

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

を3次正則行列として、変数変換

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z)P \quad (9)$$

を施せば、(8)は

$$(x \ y \ z)(PA^tP) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

に変換される。(7)が1次式の積の形

$$(p_1x + p_2y + p_3z)(q_1x + q_2y + q_3z) = 0 \quad (11)$$

に因数分解されたとする。もし、ベクトル ${}^t(p_1, p_2, p_3)$ と ${}^t(q_1, q_2, q_3)$ が1次独立ならば、これらを第1列、第2列とする3次正則行列 P がとれる。そのとき、変数変換(9)によって、

$$xy = 0$$

を変換したものとして、(11)が得られる。これを行列でかけば、

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP = A$$

である。したがって、 $\det A = 0$ である。ベクトル ${}^t(p_1, p_2, p_3)$ と ${}^t(q_1, q_2, q_3)$ が1次従属のときは、 ${}^t(q_1, q_2, q_3) = k{}^t(p_1, p_2, p_3)$ とかき、 ${}^t(p_1, p_2, p_3)$ を第1列とする3次正則行列 P をとる。そのとき、変数変換 (9) によって、

$$kx^2 = 0$$

を変換したものとして、(11) が得られる。これを行列でかけば、

$$P \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP = A$$

である。したがって、 $\det A = 0$ である。

逆に、 $\det A = 0$ とする。まず、 A の階数が2のときを考える。そのとき、 A の2次小行列式のどれかは0でない。簡単のために、行列 A の左上の2次小行列式の値 $ab - f^2 \neq 0$ とする。そのとき、 $a \neq 0$ ならば、

$$\lambda = -f + \sqrt{f^2 - ab}, \quad \lambda' = -f - \sqrt{f^2 - ab}, \quad (12)$$

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ \lambda' & a & 0 \\ df - be & ef - ad & ab - f^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

とおけば、

$$PA{}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 2a(ab - f^2) & 0 \\ 2a(ab - f^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

である。 $a = 0$ ならば、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -2f & 0 \\ df - be & ef - ad & ab - f^2 \end{pmatrix}$$

とおけば、

$$PA{}^tP = \begin{pmatrix} 0 & -2f^2 & 0 \\ -2f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。 A の階数が1のときは、 $A\mathbf{p} = \mathbf{0}$ を満たすベクトルは2つ独立なものがあるから、そのようなベクトルを $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ として、さらに \mathbf{p}_1 を $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ と独立にとって、

$$P = {}^t(\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$$

とおけば,

$$PA^tP = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形である. 以上まとめると,

定理 3.1. 2次曲線 (6) が退化するための必要十分条件は,

$$\begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix} = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2 = 0$$

である.

この結果を, 二つの2次曲線の交点を通る直線の問題に応用すれば, 次の定理を得る.

定理 3.2. 二つの2次曲線

$$\begin{aligned} F_1 &= a_1x^2 + b_1y^2 + c_1 + 2d_1y + 2e_1x + 2f_1xy = 0, \\ F_2 &= a_2x^2 + b_2y^2 + c_2 + 2d_2y + 2e_2x + 2f_2xy = 0 \end{aligned}$$

の交点を通る直線が

$$tF_1 - F_2 = 0$$

によって与えられるとすれば, t は3次方程式

$$\begin{vmatrix} a_1t - a_2 & f_1t - f_2 & e_1t - e_2 \\ f_1t - f_2 & b_1t - b_2 & d_1t - d_2 \\ e_1t - e_2 & d_1t - d_2 & c_1t - c_2 \end{vmatrix} = 0$$

の根である.

最初に挙げた二つの例では, 交点の座標は比較的容易に求められたが, 一般に二つの2次曲線の交点の座標を求めること, すなわち, **連立2元2次方程式**を解くことは容易ではない. しかし, 直線と直線の交点を求めることは容易にできる (cf. [3], §38). すなわち, 二つの2次曲線の交点を求めるためには次のようにすればよい. 定理3.2の3次方程式は重根を持たないとする. その根を $t_i, i = 1, 2, 3$ とし, $t_iF_1 - F_2 = 0$ の表す二直線を l_i, l'_i とする. P を2次曲線の交点の一つとする. P は各 i について, l_i または l'_i 上にあるから, P が l_1 上にあるとすれば, P は, l_1 と l_2 の交点であるか, または l_1 と l'_2 の交点である. 同様に, P は l_1 と l_3 の交点であるか, または l_1 と l'_3 の交点である. したがって, (必要ならば l_2 と l'_2 , l_3 と l'_3 を入れ換えて) 二つの2次曲線の交点は,

$$l_1 \cap l_2 = l_1 \cap l_3, \quad l_1 \cap l'_2 = l_1 \cap l'_3, \quad l'_1 \cap l_2 = l'_1 \cap l'_3, \quad l'_1 \cap l'_2 = l'_1 \cap l'_3$$

の4点として得られる.

4 4次方程式の解法

§3の最後に述べたことを実数係数の4次方程式

$$X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

を解くことに応用する. $X = x - \frac{a}{4}$ のような変換によって x^3 の係数が0の場合に帰着されるから, はじめから

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{15}$$

とする. $c = 0$ ならば, これは x^2 についての2次方程式であるから簡単に解ける. よって, $c \neq 0$ とする. また, x を $-x$ で置き換えることによって, $c < 0$ であるとしてよい. そのとき, 4次方程式(15)を解くことは, $y = x^2$ とおくことによって, 次の連立2元2次方程式に帰着される. これは900年前のペルシャの数学者 Omar Khayyam の方法である (cf. [2], Chap.1, Part C)

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 + by + cx + d = 0. \end{cases} \tag{16}$$

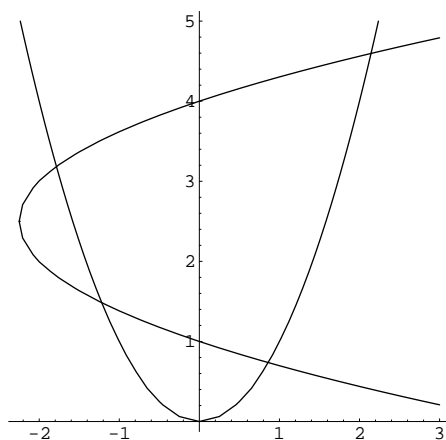


図 3: 二つの放物線 $y = x^2$ と $x = y^2 - 5y + 4$ の交点

これに対する定理 3.2 の 3 次方程式は,

$$\begin{vmatrix} t & 0 & -c/2 \\ 0 & -1 & -(b+t)/2 \\ -c/2 & -(b+t)/2 & -d \end{vmatrix} = 0$$

である. これを展開して整理すれば,

$$t^3 + 2bt^2 + (b^2 - 4d)t - c^2 = 0 \tag{17}$$

となる. 3次方程式(17)は重根を持たないとする. その根を t_1, t_2, t_3 とする. $t_1 t_2 t_3 = c^2 \neq 0$ より, $t_i \neq 0$ である. $\lambda_i = \sqrt{t_i}$ とおけば, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -c$ である.

$$P_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & t_i & 0 \\ -\lambda_i & t_i & 0 \\ -c/2 & t_i(b+t_i)/2 & -t_i \end{pmatrix} \quad (18)$$

とおけば,

$$P_i \begin{pmatrix} t_i & 0 & -c/2 \\ 0 & -1 & -(b+t_i)/2 \\ -c/2 & -(b+t_i)/2 & -d \end{pmatrix} {}^t P_i = \begin{pmatrix} 0 & 2t_i^2 & 0 \\ 2t_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

である.

$$\mu_i = \frac{b+t_i+c\lambda_i^{-1}}{2}, \quad \mu'_i = \frac{b+t_i-c\lambda_i^{-1}}{2}$$

とおけば,

$$P_i^{-1} = \frac{1}{2t_i} \begin{pmatrix} \lambda_i & -\lambda_i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \mu'_i & \mu_i & -2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

より, 二つの放物線(16)の交点を通る直線は,

$$\begin{aligned} \ell_i &: -\lambda_i x + y + \mu_i = 0 \\ \ell'_i &: \lambda_i x + y + \mu'_i = 0, \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$ である. ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標として,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{t_2 - t_1 + c(\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1})}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - c\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{2} \end{aligned}$$

を得る. これは, ℓ_1 と ℓ_3 の交点の x 座標でもある. 同様に, $\ell_1 \cap \ell'_2 = \ell_1 \cap \ell'_3$ の x 座標として,

$$x_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{2},$$

$\ell'_1 \cap \ell_2 = \ell'_1 \cap \ell'_3$ の x 座標として,

$$x_3 = \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}{2},$$

$\ell'_1 \cap \ell'_2 = \ell'_1 \cap \ell_3$ の x 座標として,

$$x_4 = \frac{-\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{2}$$

を得る. これらが実数かどうかについて調べてみよう. 3次方程式(17)の根 t_1, t_2, t_3 は, $t_1 t_2 t_3 = c^2 > 0$ を満たすから, 次の三つの場合がある:

Case 1. t_1, t_2, t_3 はすべて正の実数. このときは, $\lambda_i = \sqrt{t_i}$ も実数であるから, 4次方程式 (15) の根 x_1, x_2, x_3, x_4 はすべて実数である.

Case 2. t_1, t_2, t_3 は実数であり, $t_1 > 0, t_2 < 0, t_3 < 0$. このとき, $\lambda_1 = \sqrt{t_1}$ は正の実数であり, $\lambda_2 = \sqrt{t_2}, \lambda_3 = \sqrt{t_3}$ は純虚数である. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -c > 0$ より, $\lambda_2 = i\sqrt{|t_2|}$ とすれば, $\lambda_3 = -i\sqrt{|t_3|}$ である. $|t_2| \neq |t_3|$ であるから, $\lambda_2 \pm \lambda_3$ は0でない純虚数であり, したがって, x_1, x_2, x_3, x_4 はすべて実数でない複素数である. $x_2 = \bar{x}_1, x_4 = \bar{x}_3$ である.

Case 3. t_1 は正の実数, t_2, t_3 は実数でない複素数であり, $t_3 = \bar{t}_2$. このとき, $\lambda_1 = \sqrt{t_1}$ は正の実数であり, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -c > 0$ より, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$ である. したがって, $\lambda_2 + \lambda_3$ は実数であり, $\lambda_2 - \lambda_3$ は純虚数である. よって, x_1, x_2 は実数であり, x_3, x_4 は実数でない複素数で, $x_4 = \bar{x}_3$ である.

5 3元2次形式のペア

二つの実数を成分とする3次対称行列の組 (A_1, A_2) を考え, そのような (A_1, A_2) 全体のなす集合を V とする. V は実数体上の12次元のベクトル空間である. 実数を成分とする n 次正則行列全体のなす群を $GL_n(\mathbb{R})$ で表し, その中で行列式が1であるような行列のなす部分群を $SL_n(\mathbb{R})$ で表す. 直積群 $SL_3(\mathbb{R}) \times GL_2(\mathbb{R})$ を G とかく. $g = (g_1, g_2) \in G$,

$$g_1 \in SL_3(\mathbb{R}), \quad g_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

と $A = (A_1, A_2) \in V$ に対して,

$$g \cdot A = (a g_1 A_1^t g_1 + b g_1 A_2^t g_1, c g_1 A_1^t g_1 + d g_1 A_2^t g_1) \quad (21)$$

によって, G の V への作用を定義する. 2元3次形式 $F_A(u, v)$ を

$$F_A(u, v) = \det(uA_1 + vA_2) \quad (22)$$

によって定義する. $F_A(u, v)$ の判別式を $D(A)$ とする. 行列の成分をすべて複素数として考えたとき, $D(A) \neq 0$ であるような V の元たちは, 互いに群の作用で移り合っている. このとき, V は**概均質ベクトル空間**であるという. 概均質ベクトル空間の理論は, 1960年代に佐藤幹夫氏によって創設され, 現在でも盛んに研究されている対象である (cf. [4], [5]). 行列の成分をすべて整数にして考えたとき, どうなっているかを調べたい. もっと詳しく言えば, $SL_n(\mathbb{Z})$ によって整数を成分とする行列式1の n 次行列の群を表し, G の部分群 $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ を考える. L を整数を成分とする二つの3次対称行列の組のなす V の部分集合とする. その

とき，与えられた整数 $m \neq 0$ に対して， $D(A) = m$ となるような L の元で互いに Γ の作用で移り合わないようなものはいくつあるかを知りたい．その個数を $h(m)$ とするとき，ディリクレ級数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{h(m)}{m^s}$$

の解析的性質について知りたい． $D(A)$ は 12 変数の 12 次同次式である．

参考文献

- [1] 吉田正章，私説 超幾何関数，共立出版，1997.
- [2] Van der Waerden, B., History of algebra, Springer, 1985.
- [3] 高木貞治，代数学講義，共立出版.
- [4] 木村達雄，概均質ベクトル空間，岩波書店，1998.
- [5] 木村達雄他，現代数学の広がり 2，岩波講座「現代数学の基礎」，岩波書店.