

# ピタゴラス数について

上越教育大学 中川仁

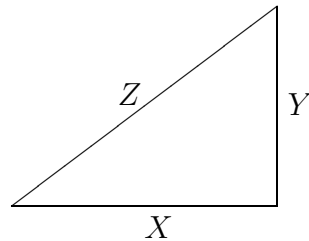
平成11年10月30日

## 1 ピタゴラス数

3辺の長さが  $X, Y, Z$  の直角三角形は

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \quad (1.1)$$

を満たす. 等式 (1.1) を満たす自然数  $X, Y, Z$  を**ピタゴラス数**と呼ぶ.  $3^2 + 4^2 = 5^2$  であるから,  $3, 4, 5$  はピタゴラス数である.  $5^2 + 12^2 = 13^2$  であるから,  $5, 12, 13$  もピタゴラス数である. 15組のピタゴラス数の表が, 約4千年前のバビロニアの物と推定される粘土板に残されている.



$X, Y$  の最大公約数が  $d$  のときは,  $X = dX_1, Y = dY_1$  とかけば,

$$Z^2 = d^2(X_1^2 + Y_1^2)$$

となって,  $Z^2$  は  $d^2$  で割り切れる. よって,  $Z$  は  $d$  で割り切れ,  $Z = dZ_1$  とかけて,

$$X_1^2 + Y_1^2 = Z_1^2$$

である。よって、 $X_1, Y_1, Z_1$  もピタゴラス数である。このとき、 $X_1, Z_1$  の最大公約数も  $Y_1, Z_1$  の最大公約数も 1 であることがわかる。このようなピタゴラス数を**原始的なピタゴラス数**と呼ぶ。このように、一般のピタゴラス数は原始的なピタゴラス数を何倍かして得られる。原始的なピタゴラス数は次の定理で与えられる。

**定理 1.1.**  $X, Y, Z$  を原始的なピタゴラス数で、 $X$  は奇数、 $Y$  は偶数とすれば、

$$X = a^2 - b^2, Y = 2ab, Z = a^2 + b^2$$

と表せる。ここで、 $a, b$  は自然数で、 $a > b$ 、 $a, b$  の最大公約数は 1、 $a, b$  の一方は奇数で、もう一方は偶数である。

$a$	$b$	$a^2 - b^2$	$2ab$	$a^2 + b^2$
2	1			
3	2			
4	1			
4	3			
5	2			
5	4			
6	1			
6	5			
7	2			
7	4			
7	6			

## 2 ピタゴラス数の演算

2つのピタゴラス数  $x_1, y_1, z_1$  と  $x_2, y_2, z_2$  に対して,

$$x = |x_1x_2 - y_1y_2|, \quad y = x_1y_2 + x_2y_1, \quad z = z_1z_2$$

とおけば,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 \\&= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\&= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\&= z_1^2z_2^2 = z^2\end{aligned}$$

であるから,  $x, y, z$  もピタゴラス数である. 例えば, 3, 4, 5 と 3, 4, 5 から,

$$x = |3 \times 3 - 4 \times 4| = 7, \quad y = 3 \times 4 + 3 \times 4 = 24, \quad z = 5 \times 5 = 25.$$

よって, 7, 24, 25 というピタゴラス数が得られる. 3, 4, 5 と 5, 12, 13 からは,

$$x = |3 \times 5 - 4 \times 12| = 33, \quad y = 3 \times 12 + 5 \times 4 = 56, \quad z = 5 \times 13 = 65.$$

よって, 33, 56, 65 というピタゴラス数が得られる.

このような演算はどこから来ているのだろうか?

$$\frac{x_1}{z_1} = \cos \theta_1, \quad \frac{y_1}{z_1} = \sin \theta_1, \quad \frac{x_2}{z_2} = \cos \theta_2, \quad \frac{y_2}{z_2} = \sin \theta_2$$

とするとき, 三角関数の加法定理から,

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{z_1z_2}, \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{z_1z_2}.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 &= (z_1z_2)^2(\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= (z_1z_2)^2\end{aligned}$$

を得る。これは16世紀のヴェリエトによって知られていた。

複素数を使えば、次のように説明できる。 $i$ を虚数単位とする( $i^2 = -1$ )。4つの複素数  $x_1 + y_1i$ ,  $x_1 - y_1i$ ,  $x_2 + y_2i$ ,  $x_2 - y_2i$  の積を2通りの順序で計算する。

$$\begin{aligned} & \{(x_1 + y_1i)(x_1 - y_1i)\} \{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)\} \\ &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2), \\ & \{(x_1 + y_1i)(x_1 - y_1i)\} \{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)\} \\ &= \{(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)\} \{(x_1 - y_1i)(x_2 - y_2i)\} \\ &= \{(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i\} \{(x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i\} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2. \end{aligned}$$

## A 定理1.1の証明

$X, Y, Z$  を原始的なピタゴラス数とする。 $X, Y$  の最大公約数は1であるから、 $X, Y$  がともに偶数であることはない。 $X, Y$  がともに奇数の場合も起こらない。実際、もし、 $X, Y$  がともに奇数であるとする、 $X = 2X_1 + 1, Y = 2Y_1 + 1$  とかける。そのとき、

$$Z^2 = (2X_1 + 1)^2 + (2Y_1 + 1)^2 = 4(X_1^2 + X_1 + Y_1^2 + Y_1) + 2$$

である。すなわち、 $Z^2$  を4で割った余りは2である。しかし、 $Z$  が偶数ならば、 $Z = 2Z_1$  とかけば、 $Z^2 = 4Z_1^2$  であるから、 $Z^2$  は4で割り切れる。 $Z$  が奇数ならば、 $Z = 2Z_1 + 1$  とかけば、 $Z^2 = 4(Z_1^2 + Z_1) + 1$  であるから、 $Z^2$  を4で割った余りは1である。これは矛盾である。したがって、 $X, Y$  の一方は奇数でもう一方は偶数である。 $X$  は奇数、 $Y$  は偶数であるとする。そのとき、 $Z$  は奇数である。 $x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$  とおけば、点  $(x, y)$  は単位円

$$C : x^2 + y^2 = 1 \tag{A.1}$$

上の点であり、 $x, y$  ともに有理数であるような点である。このような点を  $C$  の有理点と呼ぶ。点  $P_0 = (-1, 0)$  を通る傾き  $t$  の直線  $l$  と単位円  $C$  は  $P_0$  以外にもう1点  $P$  で交わる (図1)。

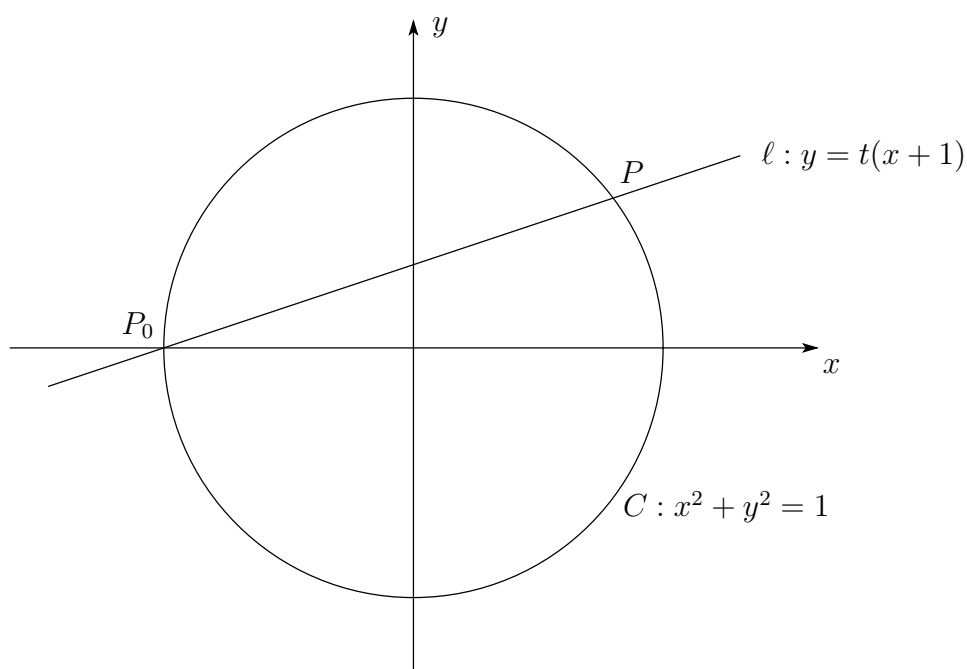


図 1: 円のパラメータ表示

直線  $l$  の方程式  $y = t(x + 1)$  を (A.1) に代入して,

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1,$$

$$(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0,$$

$$(x + 1)((1 + t^2)x + t^2 - 1) = 0.$$

これから, 点  $P$  の座標は,

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \tag{A.2}$$

とパラメータ表示される. ここで,  $t$  が有理数ならば,  $x, y$  も有理数である. 逆に,  $x, y$  が有理数ならば,  $t = \frac{y}{x + 1}$  より,  $t$  は有理数である. 以上によって, 単位円  $C$  上の  $P_0$  以外の有理点

$$\left( \frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right)$$

は、ある有理数  $t$  によって、等式 (A.2) で表される。有理数  $t$  を  $t = \frac{b}{a}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a > 0$ ,  $a, b$  の最大公約数は 1, とかく。そのとき,

$$\frac{X}{Z} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

である。  $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$  はともに既約分数であるから、自然数  $m$  が存在して、

$$a^2 + b^2 = mZ, \quad a^2 - b^2 = mX, \quad 2ab = mY$$

である。  $a, b$  の最大公約数は 1 であるから、  $2a^2 = m(Z + X)$ ,  $2b^2 = m(Z - X)$  から、  $m = 1, 2$  である。  $a, b$  ともに偶数であることはない。もし、  $a, b$  ともに奇数であるとする、  $X$  は奇数であるから、

$$(a - b)(a + b) = mX$$

において、左辺は 4 で割り切れて、右辺は 4 で割り切れないから、矛盾である。よって、  $a, b$  の一方は奇数で、もう一方は偶数である。そのとき、  $a^2 + b^2 = mZ$  は奇数であるから、  $m = 1$  である。よって、

$$a^2 + b^2 = Z, \quad a^2 - b^2 = X, \quad 2ab = Y$$

である。