# 円周率について

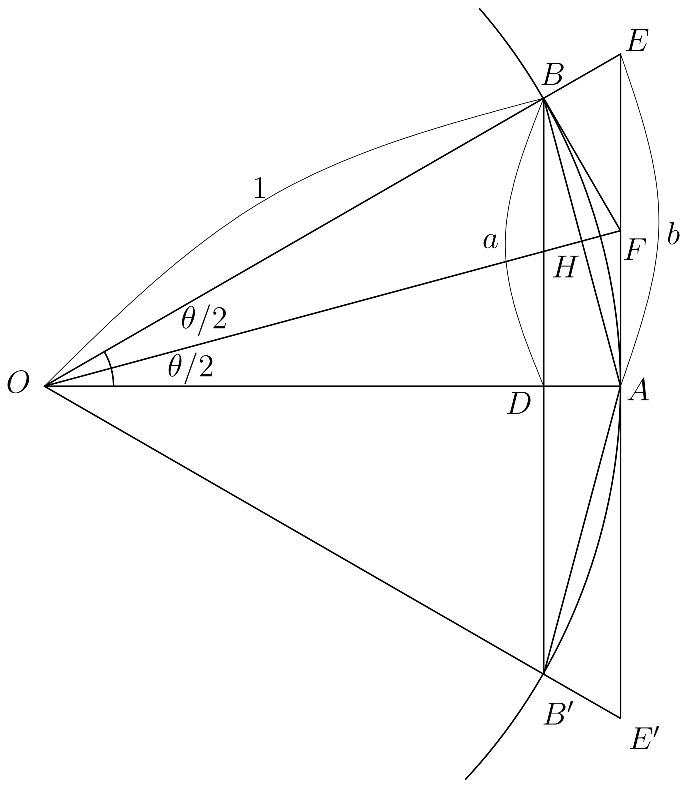
上越教育大学　中川仁

2000 年 1 月 8 日

人類は何千年も前から円周率を求めようと考えてきた．円は美しい基本的図形であるから，円周の長さや円の面積を求めようと考えることは，人間の知的本能からみれば当然であるかもしれない．円周の素朴な実測や，円の面積を小さな正方形のマス目の数で求めることによっては，3.14 まで求めることも困難である．円周率を計算する方法について，どのような工夫がなされてきたか，アルキメデス，劉徽，グレゴリーとライプニッツ，ニュートン，ガウスの方法を説明しよう．

## 1　アルキメデスの方法

半径 1 の円に内接する正 $n$ 角形の周の長さを $p_n$，外接する正 $n$ 角形の周の長さを $q_n$ とする．$\theta = \frac{180}{n}$ 度とおく．



$BD = a$, $EA = b$, $BH = a'$, $BF = b'$ とおく．3 つの直角三角形 $\triangle EFB$, $\triangle EOA$, $\triangle BOD$ は互いに相似である．$\triangle EFB$ と $\triangle EOA$ が相似であることから，$BF : AO = BE : AE$, $b' : 1 = BE : b$, したがって，

$$BE = bb'. \tag{1}$$

$AF = BF = b'$ であるから，

$$EF = b - AF = b - b'. \tag{2}$$

$\triangle EFB$ と $\triangle BOD$ が相似であることから $EF : BO = BE : DB$, $EF : 1 = BE : a$, したがって，

$$BE = a \cdot EF. \tag{3}$$

(1), (2), (3) より，$bb' = a(b - b')$, したがって，

$$b' = \frac{ab}{a+b}. \tag{4}$$

2 つの直角三角形 $\triangle FBH$, $\triangle ABD$ は相似であるから，$BF : BA = BH : BD$, $b' : BA = a' : a$ である．$BA = 2a'$ であるから，$2(a')^2 = ab'$, すなわち，

$$a' = \sqrt{\frac{ab'}{2}}. \tag{5}$$

円に内接する正 $n$ 角形の一辺の長さは，$BB' = 2a$ であるから，$p_n = 2na$ である．円に外接する正 $n$ 角形の一辺の長さは，$EE' = 2b$ であるから，$q_n = 2nb$ である．同様に，円に内接する正 $2n$ 角形の一辺の長さは，$AB = 2a'$ であるから，$p_{2n} = (2n)(2a')$ である．円に外接する正 $n$ 角形の一辺の長さは，$2BF = 2b'$ であるから，$q_{2n} = (2n)(2b')$ である．(4), (5) より，$p_n$, $q_n$, $p_{2n}$, $q_{2n}$ の間には次のような漸化式が成り立つ．

$$q_{2n} = 4n\frac{(2n)^{-2}p_nq_n}{(2n)^{-1}(p_n+q_n)} = \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n}, \tag{6}$$

$$p_{2n} = 4n\sqrt{2^{-1}(2n)^{-1}p_n(4n)^{-1}q_{2n}} = \sqrt{p_nq_{2n}}. \tag{7}$$

$n = 6$ のとき，$p_6 = 6$, $q_6 = 4\sqrt{3}$ である．(6) より，

$$q_{12} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} = 24(2 - \sqrt{3}).$$

(7) より，

$$p_{12} = \sqrt{6 \cdot 24(2 - \sqrt{3})} = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

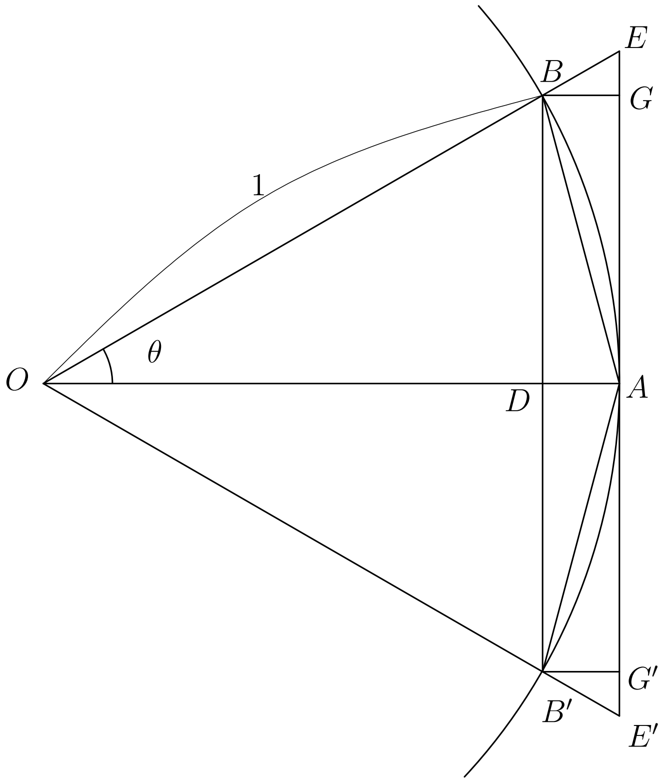
これを繰り返して小数で計算すれば,

$$
\begin{aligned}
n = 12, &\quad 3.1058\cdots < \pi < 3.2153\cdots, \\
n = 24, &\quad 3.1326\cdots < \pi < 3.1596\cdots, \\
n = 48, &\quad 3.1393\cdots < \pi < 3.1460\cdots, \\
n = 96, &\quad 3.1410\cdots < \pi < 3.1427\cdots, \\
n = 192, &\quad 3.1414\cdots < \pi < 3.1418\cdots.
\end{aligned}
$$

円周率 $\pi$ の値として，正 96 角形の計算から，3.14 まで，正 192 角形の計算から，3.141 までわかる．

## 2　劉徽の方法

中国では，魏(ぎ)の劉徽(りゅうき)が 263 年に書いた本の中で，次のようにして円周率を計算している．




$n \geq 6$ を偶数とし，$a_n$ を半径 1 の円に内接する正 $n$ 角形の一辺の長さとする．

$BB' = a_n$ であるから，$\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times OA \times BD = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1}{2}a_n\right) = \frac{1}{4}a_n$$

である．したがって，$s_{2n} = (2n)(a_n/4) = na_n/2$ である．

$$(\triangle ABB' \text{の面積}) = (\triangle OAB \text{ の面積}) \times 2 - (\triangle OBB' \text{の面積})$$

であるから，

$$\begin{aligned}(5\text{角形}\,OBGG'B'\,\text{の面積}) &= (\triangle OAB\,\text{の面積}) \times 2 + (\triangle ABB'\text{の面積}) \\ &= (\triangle OAB\,\text{の面積}) \times 4 - (\triangle OBB'\text{の面積})\end{aligned}$$

である．これを $n$ 倍すれば，

$$(\text{円の面積}) < 4n \times (\triangle OAB\,\text{の面積}) - n \times (\triangle OBB'\text{の面積}) = 2s_{2n} - s_n,$$

したがって，$s_{2n} <$ (円の面積) $< s_{2n} + (s_{2n} - s_n)$ を得る．一方，$p_n = na_n$ より，$s_{2n} = p_n/2$ である．よって，

$$\frac{1}{2}p_n < (\text{円の面積}) < \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}(p_n - p_{n/2})$$

を得る．$n \to \infty$ とすれば，この両側とも円周率 $\pi$ に収束するから，半径 1 の円の面積は $\pi$ であることが示された．$a_{2n}$ と $a_n$ の関係を求めよう．$OD = \sqrt{1-(a_n/2)^2}$, $AD = 1 - OD$ であるから，

$$AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{(a_n/2)^2 + (1 - \sqrt{1-(a_n/2)^2})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}.$$

$AB = a_{2n}$ より，

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}. \tag{8}$$

(8) で $n = 6$ とすれば，$a_6 = 1$ であるから，$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ を得る．(8) を繰り返し適用すれば，

$$\begin{aligned} a_{24} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \\ a_{48} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}, \\ a_{96} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}, \\ a_{192} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots . \end{aligned}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
s_{24} &= 2^2 \cdot 3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 3.1326\cdots, \\
s_{48} &= 2^3 \cdot 3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 3.1393\cdots, \\
s_{96} &= 2^4 \cdot 3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = 3.1410\cdots, \\
s_{192} &= 2^5 \cdot 3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} = 3.1415\cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .
\end{aligned}
$$

を得る．これから，$3.1415 < \pi < 3.1422$ を得る．5 世紀には，宋の祖冲之（そちゅうし）は

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

を得た．彼はまた，$\dfrac{22}{7} = 3.\dot{1}4285\dot{7}$ を大体の値，$\dfrac{355}{113} = 3.1415929\cdots$ を”密率”としている．$\dfrac{355}{113}$ というよい近似分数はヨーロッパでは 16 世紀まで知られていなかった．

# 3　逆三角関数のテイラー展開による方法

ヨーロッパでは，17 世紀になり微積分的方法によって，ようやくアルキメデスの方法から脱却することができた．それは逆三角関数のテイラー展開を利用するものである．

三角関数 $x = \sin\theta$ は区間 $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ において単調増加関数であるから，その逆関数として，$\theta = \arcsin x$ を考えることができる．与えられた $-1 \leq x \leq 1$ に対して，$x = \sin\theta$ となる $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ が一意的に定まる．この $\theta$ を $\arcsin x$ で表す．同様に，$x = \tan\theta$ は区間 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において単調増加関数であるから，その逆関数として，$\theta = \arctan x$ を考えることができる．与えられた $-\infty < x < \infty$ に対して，$x = \tan\theta$ となる $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ が一意的に定まる．この $\theta$ を $\arctan x$ で表す．$x = \sin\theta$ について，

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$$

より，

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{9}$$

を得る．$x = \tan\theta$ について，

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + x^2$$

より，

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \tag{10}$$

を得る．

等比数列の和の公式より，$|x| < 1$ に対して，

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

が成り立つ．(10) より，これを積分して，

$$\arctan x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

となるが，$x = 0$ を代入すれば，$C = \arctan 0 = 0$ であるから，結局，$\arctan x$ のテイラー展開

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{11}$$

を得る．この等式は，$|x| < 1$ のときに成り立っているが，$x = 1$ でも成り立つことが示され，$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ より，$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから，(11) で $x = 1$ を代入して，グレゴリー・ライプニッツの公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} \tag{12}$$

を得る．この右辺の級数の収束は非常に遅いので，実際の計算には適していない．マチンはこれを次のように改良した．$\tan x$ の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

から，倍角公式

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

を得る．これを $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ に適用すれば，

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{5}{12}.$$

したがって,

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119}.$$

これは 1 に非常に近いから，$\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$ とおけば,

$$\tan\beta = \frac{\tan 4\alpha - 1}{1+\tan 4\alpha} = \frac{1}{239}.$$

すなわち，$\beta = \arctan\frac{1}{239}$ である．したがって,

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

この右辺を (11) によって表せば，マチンの公式 (1704 年)

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}} \tag{13}$$

を得る．これはグレゴリー・ライプニッツの公式 (12) よりもずっと収束が速く，$n=4$ までの項の和から

$$\pi = 3.14159\cdots$$

を得る．

次に，$\arctan x$ のかわりに $\arcsin x$ を用いたニュートンの方法を説明しよう．2 項定理より，自然数 $a$ に対して,

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{a}\binom{a}{n}x^n, \quad \binom{a}{n} = {}_aC_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!},\ n\geq 1$$

である．ただし，$\binom{a}{0}=1$ とする．$\binom{a}{n}$ は $a$ の $n$ 次多項式であるから，$a$ が自然数でないときも意味を持つ．特に，$a=-1/2$ とすれば,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n n!}, \quad n\geq 1$$

である．$\binom{-1/2}{n}$ をこのような有理数とするとき，形式的に無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}x^n$ を考えれば，これは $|x|<1$ に対して収束し，$(1+x)^{-1/2}$ に等しいことがわかる．

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n n!}x^n.$$

ここで，$x$ に $-x^2$ を代入すれば,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n n!}x^{2n}.$$

(9) より，これを積分して，

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n(2n+1)n!} x^{2n+1} \tag{14}$$

を得る．$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ より，$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ であるから，(14) で $x = 1/2$ を代入して，

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^{3n+1}(2n+1)n!} \tag{15}$$

を得る．$n = 3$ までの項の和から

$$\pi = 3.141\cdots$$

を得る．ニュートンは (15) を改良した級数を使って，$\pi$ を小数点以下 16 桁まで求めている (1665 年).

グレゴリー・ライプニッツの公式 (12) は，インドで既に微積分を使わないで得られていた．また，ニュートンの公式 (15) と同じものが，関孝和の孫弟子にあたる松永良弼(りょうひつ)によって得られている (1739 年)．彼はそれを用いて，小数点以下 49 桁まで $\pi$ を求めている．

## 4 超幾何級数の連分数展開による方法

最後に，ガウスによる超幾何級数の連分数展開の連分数展開 (1813 年) を用いて得られる公式について説明する．実数 $\alpha$ と自然数 $n$ に対して，

$$(\alpha; n) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

とおく．さらに，$(\alpha; 0) = 1$ とする．$\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ に対して，$|x| < 1$ において収束するべき級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha; n)(\beta; n)}{(\gamma; n)n!} x^n \tag{16}$$

によって定義される関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ を**ガウスの超幾何関数**と呼ぶ．パラメータ $\alpha, \beta, \gamma$ に特別な値を与えることによって，いろいろな初等関数が超幾何関数を用いて表せる．例えば，

$$F(\alpha, \beta, \beta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha; n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^{\alpha},$$

$$xF(1, 1, 2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(n+1)!n!} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x),$$

$$xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(-1)^n x^{2n+1} = \arctan x.$$

超幾何関数の定義から容易に，次の関係式を導くことができる．

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x) - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} xF(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x), \quad (17)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha+1, \beta, \gamma+1; x) - \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)} xF(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x). \quad (18)$$

これを**ガウスの隣接関係式**という．(17) の両辺を $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)$ で割れば，

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)} = 1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \frac{1}{\dfrac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)}}.$$

同様に，(18) で $(\alpha, \beta, \gamma)$ を $(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$ で置き換えてから，両辺を $F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)$ で割れば，

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)} = 1 - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x \frac{1}{\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)}{F(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3; x)}}.$$

したがって，

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)} = 1 - \cfrac{\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x}{1 - \cfrac{\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x}{\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)}{F(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3; x)}}}.$$

これを繰り返せば，

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)} = 1 + \cfrac{a_1 x}{1 + \cfrac{a_2 x}{\ddots \, \cfrac{\ddots}{1 + \cfrac{a_{2\nu} x}{\frac{F(\alpha+\nu, \beta+\nu, \gamma+2\nu; x)}{F(\alpha+\nu, \beta+\nu+1, \gamma+2\nu+1; x)}}}}}.$$

ここで，

$$a_{2n-1} = -\frac{(\alpha+n-1)(\gamma+n-1-\beta)}{(\gamma+2n-2)(\gamma+2n-1)}, \quad a_{2n} = -\frac{(\beta+n)(\gamma+n-\alpha)}{(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)}, \quad n \geq 1.$$

特に，$\alpha=\gamma=\frac{1}{2}, \beta=0$ とすれば，$F(1/2,0,1/2;-x^2)=1$, $xF(1/2,1,3/2;-x^2)=\arctan x$ であるから，

$$\frac{1}{x^{-1}\arctan x}=1+\cfrac{-a_1x^2}{1+\cfrac{-a_2x^2}{\ddots\cfrac{\ddots}{1+\cfrac{-a_{2\nu}x^2}{\frac{F(\nu+1/2,\nu,2\nu+1/2;-x^2)}{F(\nu+1/2,\nu+1,2\nu+3/2;-x^2)}}}}}.$$

ここで，

$$a_{2n-1}=-\frac{(2n-1)^2}{(4n-3)(4n-1)},\quad a_{2n}=-\frac{(2n)^2}{(4n-1)(4n+1)},\quad n\geq 1.$$

したがって，

$$-a_n=\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)},\quad n\geq 1$$

とまとめられ，$\nu\to\infty$ として，$\arctan x$ の連分数展開

$$\begin{aligned}\arctan x &= \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1+\cfrac{\frac{(2x)^2}{3\cdot 5}}{1+\cfrac{\frac{(3x)^2}{5\cdot 7}}{\ddots\cfrac{\ddots}{1+\cfrac{\frac{(nx)^2}{(2n-1)(2n+1)}}{\ddots}}}}}}\\ &= \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{(2x)^2}{5+\cfrac{(3x)^2}{\ddots\cfrac{\ddots}{2n-1+\cfrac{(nx)^2}{\ddots}}}}}} \qquad (19)\end{aligned}$$

を得る．(19) で $x=1$ とおけば，$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから，$\pi$ の連分数展開

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}} \tag{20}$$

を得る．これから，数列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ を

$$\begin{aligned} A_n &= (2n+1)A_{n-1} + n^2 A_{n-2},\ n=2,3,\ldots, \quad A_1 = 3, A_2 = 19, \\ B_n &= (2n+1)B_{n-1} + n^2 B_{n-2},\ n=2,3,\ldots, \quad B_1 = 1, B_2 = 6. \end{aligned}$$

によって定めるとき，

$$\frac{A_n}{B_n} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{n^2}{2n+1}}}}}}.$$

$n=5$ まで計算してみると，次のような $\pi$ の近似分数を得る．

| $n$ | $A_n$ | $B_n$ | $A_n/B_n$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 2 | 19 | 6 | 19/6 | $3.166\cdots$ |
| 3 | 160 | 51 | 160/51 | $3.137\cdots$ |
| 4 | 1744 | 555 | 1744/555 | $3.142\cdots$ |
| 5 | 23184 | 7380 | 644/205 | $3.1414\cdots$ |

$A_{12}/B_{12} = 30594128896/9738413685 = 3.14159265416\cdots$ であり，これは小数点以下 8 桁まで正しい．

これまでに挙げた数学者の名前を年代順にまとめると次のようになる．

| | | |
|---|---|---|
| 前 3 世紀 | アルキメデス | 2 桁 (正 96 角形の周の長さ) |
| 263 年 | 劉徽 | 2 桁 (正 192 角形の面積) |
| 5 世紀 | 祖沖之 | 7 桁 |
| 1665 年 | ニュートン | 16 桁 (級数展開). 発表は 1737 年 (死後) |
| 1671 年 | グレゴリー | (〃) |
| 1674 年 | ライプニッツ | (〃) |
| 1706 年 | マチン | 100 桁 (〃) |
| 1739 年 | 松永良弼 | 49 桁 (〃) |
| 1813 年 | ガウス | 連分数展開 |

## 参考文献


[1] 小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.

[2] 青本和彦・喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.