

2元3次形式の概均質ゼータ関数に関する 大野予想の証明

上越教育大学 中川 仁

1 大野予想の証明

予想 1.1.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \hat{h}_1(27n) + \frac{1}{3}\hat{h}_2(27n) = h(-n) \quad \forall n > 0; \\ \text{(ii)} \quad & \hat{h}(-27n) = 3h_1(n) + h_2(n) \quad \forall n > 0. \end{aligned}$$

$\tilde{h}(27n) = \hat{h}_1(27n) + \frac{1}{3}\hat{h}_2(27n)$ とおく. $\tilde{h}(27n) = h(-n), \forall n > 0$ を証明すればよい. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ とおけば, k は虚2次体であり, $n = |D_k|m^2, m \in \mathbb{N}$ の形である. $c \in \mathbb{Z}, c > 0$ に対して, $\mathcal{O}_{k,c}$ によって, k の導手 c の整環を表し, $Cl_{k,c}$ によって, $\mathcal{O}_{k,c}$ のイデアル類群を表す.

1.1 3次体の整環

$x(u, v)$ を \mathbb{Q} 上既約とし, θ を3次方程式

$$x(u, 1) = x_1u^3 + x_2u^2 + x_3u + x_4 = 0$$

の根とする. $K_x = \mathbb{Q}(\theta)$ とおく. $\eta_0 = 1, \eta_1 = x_1\theta, \eta_2 = x_1\theta^2 + x_2\theta + x_3$ とおき, η_0, η_1, η_2 によって生成される3次体 K_x の格子を \mathcal{O}_x とする. そのとき,

$$(1.1) \quad \begin{cases} \eta_1^2 &= -x_1x_3 - x_2\eta_1 + x_1\eta_2, \\ \eta_2^2 &= -x_2x_4 - x_4\eta_1 + x_3\eta_2, \\ \eta_1\eta_2 &= -x_1x_4 \end{cases}$$

が成り立つ. よって, \mathcal{O}_x は K_x の整環である. 次に, x は \mathbb{Q} 上可約な整数係数2元3次形式で, $D(x) \neq 0$ とする. もし, x が \mathbb{Q} 上で1次式と既約2次式の積に分解されるならば, $K_x = \mathbb{Q} \oplus k$, k は x の2次因子の分解体とする. もし, x が \mathbb{Q} 上で1次式の3個の積に分解されるならば, $K_x = \mathbb{Q}^3$ とおく. そのとき, $\{\eta_0 = 1, \eta_1, \eta_2\}$ を基底とする自由 \mathbb{Z} -加群 \mathcal{O}_x は (1.1) によって, K_x の整環になる. 逆に, 階数3の自由 \mathbb{Z} -加群であるような, 単位元1を持つ結合的可換環は, ある整数係数2元3次形式 x に対する \mathcal{O}_x に同型である. さらに, $D(\mathcal{O}_x) = D(x)$ である. 次の補題は Delone and Faddeev [2] による.

補題 1.2. 写像 $x \mapsto \mathcal{O}_x$ は 0 でない判別式を持つ整数係数 2 元 3 次形式 x の $GL(2)_{\mathbb{Z}}$ -同値類の集合から，階数 3 の自由 \mathbb{Z} -加群であるような，単位元 1 を持つ結合的可換環の同型類の集合の上への全単射を引き起こす．

$m = 1$ のとき，証明のアイディアは次の通り．

補題 1.2 と類体論から，

$$\begin{aligned} h(D_k) &= 2\#\{\text{判別式 } D_k \text{ の 3 次体 (の整環)}\} + 1 \\ &= |Cl_k/Cl_k^3| = |Cl_k^{(3)}|. \end{aligned}$$

そこで，次の図の下の方の二つの全単射 (Eisenstein は知っていた?) を示せば，予想の等式

$$h(27|D_k|) = |Cl_k^{(3)}| = h(D_k)$$

を得る．

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \backslash \{\text{判別式 } D_k \text{ の 2 元 2 次形式}\} & \longleftrightarrow & Cl_k \\ \cup & & \cup \\ \Gamma \backslash L(27|D_k|) & \longleftrightarrow & \Gamma \backslash \{H_x | x \in \hat{L}(27n)\} \longleftrightarrow Cl_k^{(3)} \end{array}$$

$m = 1$ の場合， m が平方因数を持たない場合，一般の場合の 3 段階に分けて証明する．

1.2 $m = 1$ の場合

n を正整数とする． $x(u, v)$ を $\hat{L}(27n)$ に属する整数係数 2 元 3 次形式とし，これを

$$x(u, v) = x_1 u^3 + 3x_2 u^2 v + 3x_3 u v^2 + x_4 v^3, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

とかく， x の Hessian H_x を次の式で定義する．

$$(1.2) \quad H_x(u, v) = -\frac{1}{36} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix}.$$

そのとき， $H_x(u, v) = Au^2 + Buv + Cv^2$,

$$(1.3) \quad A = x_2^2 - x_1 x_3, \quad B = x_2 x_3 - x_1 x_4, \quad C = x_3^2 - x_2 x_4$$

である． H_x は正定値 2 元 2 次形式であり，その判別式は $-n$ に等しいことがわかる．さらに，

$$H_{\gamma x}(u, v) = (\gamma H_x)(u, v), \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

が成り立つ． H_x は原始的とは限らないので， $f = (A, B, C)$ とおき，

$$A = fA_1, \quad B = fB_1, \quad C = fC_1, \quad A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{Z}$$

とかく．そのとき，ある自然数 c に対して， $B_1^2 - 4A_1C_1 = D_k c^2$ となる．よって， $-n = D(H_x) = D_k c^2 f^2$ ， $m = cf$ である．

$$\alpha_x = \frac{-B_1 + c\sqrt{D_k}}{2}, \quad \mathfrak{a}_x = [A_1, \alpha_x]$$

とおく．そのとき， $\mathbb{Z}[\alpha_x] = \mathcal{O}_{k,c}$ であり， \mathfrak{a}_x は原始的 2 元 2 次形式 $f^{-1}H_x$ に対応した proper $\mathcal{O}_{k,c}$ -イデアルであり， $N(\mathfrak{a}_x) = A_1$ である．次の補題は重要である．

補題 1.3. $\beta_x = x_2 A_1 + x_1 \alpha_x$ とおき， $\mathfrak{b}_x = \beta_x \mathfrak{a}_x^{-3}$ とおく．そのとき， \mathfrak{b}_x は整 proper $\mathcal{O}_{k,c}$ -イデアルであり， $N(\mathfrak{b}_x) = f$ である．

特に， $m = 1$ の場合は， $c = f = 1$ であるから，補題 1.3 より， $\mathfrak{a}_x^3 = (\beta_x)$ であり，イデアル類 $[\mathfrak{a}_x]$ は $Cl_k^{(3)}$ の元である． $H_{\gamma x} = \gamma H_x$ であるから， $[\mathfrak{a}_x]$ は Γx のみで定まる． $k \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ならば，この対応 $\Gamma x \mapsto [\mathfrak{a}_x]$ は $\Gamma \backslash L(27|D_k|)$ から $Cl_k^{(3)}$ の上への全単射を与える（このことは，もう少し一般的に， m が平方因数を持たない場合に後で説明する）．したがって， $\hat{h}(27|D_k|) = |Cl_k^{(3)}|$ である．

1.3 m が平方因数を持たない場合

補題 1.4. $\mathfrak{b}_{\gamma x} = \mathfrak{b}_x$ ， $\forall \gamma \in \Gamma$ ．

[証明] Γ の生成元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ についてチェックすればよい． \square

$\hat{L}_{k,c}(f)$ によって， $x \in \hat{L}(27|D_k|c^2 f^2)$ で， H_x の係数の最大公約数が f であるようなもの全体のなす集合を表す．これは Γ -不変である．そのとき，任意の自然数 m に対して，次の分解を得る．

$$(1.4) \quad \hat{L}(27|D_k|m^2) = \bigcup_{cf=m} \hat{L}_{k,c}(f) \quad (\text{disjoint}).$$

$\hat{L}_{k,c}(f)$ に属する 2 元 3 次形式の同値類の個数を求めよう． $\omega_{k,c}(f)$ によって，整 proper $\mathcal{O}_{k,c}$ -イデアル \mathfrak{b} で， $N(\mathfrak{b}) = f$ ， $[\mathfrak{b}] \in Cl_{k,c}^3$ を満たすようなもの全体のなす集合を表す． $S_{k,c}(f)$ によって， $(\xi, \mathfrak{b}) \in Cl_{k,c} \times \omega_{k,c}(f)$ で， $\xi^3[\mathfrak{b}] = 1$ を満たすもの全体のなす集合を表す．各 $\mathfrak{b} \in \omega_{k,c}(f)$ に対して，イデアル類 ξ で， $\xi^3[\mathfrak{b}] = 1$ を満たすものが丁度 $|Cl_{k,c}^{(3)}|$ 個存在する．したがって， $|S_{k,c}(f)| = |Cl_{k,c}^{(3)}| |\omega_{k,c}(f)|$ である．写像 $\Phi: \hat{L}_{k,c}(f) \rightarrow S_{k,c}(f)$ を $\Phi(x) = ([\mathfrak{a}_x], \mathfrak{b}_x)$ によって定義する．

補題 1.5. 写像 Φ は全射である .

これらの準備のもとで , $\hat{L}_{k,c}(f)$ に属する 2 元 3 次形式の同値類の個数をイデアル類群 $\mathcal{O}_{k,c}$ のことばで表示する公式を与えることができる .

命題 1.6. $D_k c^2 \neq -3$ とする . そのとき , 写像 Φ は $\Gamma \backslash \hat{L}_{k,c}(f)$ と $S_{k,c}(f)$ の間の全単射を引き起こす . 特に ,

$$|\Gamma \backslash \hat{L}_{k,c}(f)| = |Cl_{k,c}^{(3)}| |\omega_{k,c}(f)|$$

が成り立つ .

命題 1.6 で除外した場合に対しては , 次が成り立つ .

命題 1.7. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $c = 1$, $f \in \mathbb{Z}$, $f > 0$ とする . そのとき ,

$$\hat{h}_2(81f^2) = |\Gamma \backslash \hat{L}_{k,1}(f)| = 3|Cl_{k,1}^{(3)}| |\omega_{k,1}(f)|$$

が成り立つ .

(1.4) と命題 1.6, 1.7 より , 次を得る .

命題 1.8. k を虚 2 次体 , m を正整数とし , $n = |D_k| m^2$ とおく . そのとき ,

$$\tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m} |Cl_{k,c}^{(3)}| |\omega_{k,c}(f)|$$

が成り立つ .

ここで , m は平方因数を持たないとする . これによって , $m = cf$ のとき , $(c, f) = 1$ が保証される .

$$\Omega_{k,c}(f) = \bigcup_{g|f} \omega_{k,c}(g)$$

とおけば ,

$$|\omega_{k,c}(f)| = \sum_{g|f} \mu\left(\frac{f}{g}\right) |\Omega_{k,c}(g)|$$

とかける . したがって , 命題 1.8 の等式は次のように書き直せる .

$$(1.5) \quad \tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m} \sum_{g|f} \mu\left(\frac{f}{g}\right) |\Omega_{k,c}(g)| |Cl_{k,c}^{(3)}|.$$

χ を k に対応する Dirichlet 指標とすると , (1.5) は , 次のように書き直せる .

$$(1.6) \quad \tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m} \sum_{g|f} \mu\left(\frac{f}{g}\right) |Cl_{k,c}^{(3)}| \frac{\prod_{p|g} (2 + \chi(p))}{|X_{k,c}(g)|}.$$

ここで , $X_{k,c}(g) = H_{k,c}(g)/Cl_{k,c}^3$, $H_{k,c}(g)$ は $N(\mathfrak{p})|g$ を満たす素イデアル \mathfrak{p} のイデアル類たちと $Cl_{k,c}^3$ とによって生成される $Cl_{k,c}$ の部分群を表す .

補題 1.9. $\xi_i(s, L)$ ($i = 1, 2$) は次のように表示される:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\xi_1(L, s) &= \sum_{K \in \mathcal{K}_1^+} |D_K|^{-s} \eta_K(2s) + \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathcal{K}_2} |D_K|^{-s} \eta_K(2s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Q}^+} |D_k|^{-s} \eta_{\mathbb{Q} \oplus k}(2s) + \frac{1}{6} \eta_{\mathbb{Q}^3}(2s), \\ \frac{1}{2}\xi_2(L, s) &= \sum_{K \in \mathcal{K}_1^-} |D_K|^{-s} \eta_K(2s) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Q}^-} |D_k|^{-s} \eta_{\mathbb{Q} \oplus k}(2s).\end{aligned}$$

$$(1.7) \quad \eta_A(s) = \prod_p \eta_{A_p}(s), \quad \eta_{A_p}(s) = \sum_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}_{A_p} : \mathcal{O})^{-s},$$

が成り立つ. ここで, \mathcal{O} は A_p のすべての整環をわたる.

補題 1.10. K を 3 次体, k を 2 次体とし, A を $K, \mathbb{Q} \oplus k, \mathbb{Q}^3$ のいずれかとすれば,

$$\eta_A(s) = \frac{\zeta_A(s)}{\zeta_A(2s)} \zeta(2s) \zeta(3s-1)$$

が成り立つ.

K を 3 次体, k を 2 次体とし, A を $K, \mathbb{Q} \oplus k, \mathbb{Q}^3$ のいずれかとするとき,

$$\eta_A(s) = \sum_{f=1}^{\infty} \frac{a_A(f)}{f^s}$$

とかく.

補題 1.9 より,

$$(1.8) \quad h(-n) = \sum_{cf=m} \sum_{K \in \mathcal{K}_{k,c}} 2a_K(f) + a_{\mathbb{Q} \oplus k}(m).$$

ここで, $\mathcal{K}_{k,c}$ は判別式 $D_k c^2$ の 3 次体全体であった. $m = cf$ は平方因数を持たないから, f もそうであり, $(c, f) = 1$ である. 特に, 素数 $p|f$ は $K \in \mathcal{K}_{k,c}$ において完全分岐しない. $\eta_A(s)$ はオイラー積を持つから,

$$a_A(f) = \prod_{p|f} a_A(p).$$

補題 1.10 より,

$$\begin{aligned}a_{\mathbb{Q} \oplus k}(p) &= 2 + \chi(p), \\ a_K(p) &= \begin{cases} 1, & p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, & \chi(p) = -1, \\ 2, & p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2^2, & \chi(p) = 0, \\ 3, & p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3, & \chi(p) = 1, \\ 0, & p = \mathfrak{p}, & \chi(p) = 1, \end{cases}\end{aligned}$$

したがって, (1.8) は $p|f$, $\chi(p) = 1$ が完全分解するような K をわたる和になる. $\mathcal{K}_{k,c}(f) = \{K \in \mathcal{K}_{k,c} | p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \ \forall p|f, \chi(p) = 1\}$ であったから, (1.8) は類体論を用いれば, 次のように変形される.

$$\begin{aligned} h(-n) &= \sum_{cf=m} \sum_{K \in \mathcal{K}_{k,c}(f)} 2 \prod_{p|f} (2 + \chi(p)) + \prod_{p|m} (2 + \chi(p)) \\ &= \sum_{cf=m} 2|\mathcal{K}_{k,c}(f)| \prod_{p|f} (2 + \chi(p)) + \prod_{p|m} (2 + \chi(p)) \\ &= \sum_{cf=m} \sum_{d|c} \mu\left(\frac{c}{d}\right) \frac{|C_{l_{k,d}}^{(3)}|}{|X_{k,d}(f)|} \prod_{p|f} (2 + \chi(p)). \end{aligned}$$

この右辺は, 和の変数を書き直せば, (1.6) の右辺と一致する. 以上によって,

命題 1.11. k を虚 2 次体, m を平方因数を持たない自然数として, $n = |D_k|m^2$ とおく. そのとき, $\tilde{h}(27n) = h(-n)$ が成り立つ.

同様にして,

命題 1.12. k を虚 2 次体, m_0 を平方因数を持たない 3 と素な自然数として, $m = 9m_0$, $n = |D_k|m^2$ とおく. そのとき, $\tilde{h}(27n) = h(-n)$ が成り立つ.

1.4 一般の場合

$\eta_A(s)$ の $p = 3$ におけるオイラー因子を適当に修正することによって得られる $\hat{\eta}_A(s)$ を用いて, ゼータ関数 $\xi_i(\hat{L}, s)$, $i = 1, 2$ に対しても補題 1.9 と同様な表示が得られる.

$$\hat{\eta}_A(s) = \sum_{f=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_A(f)}{f^s}$$

とかく. $k \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ならば,

$$(1.9) \quad \tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m'} \sum_{K \in \mathcal{K}_{k',c}} 2\hat{a}_K(f) + \hat{a}_{\mathbb{Q} \oplus k'}(m').$$

ここで,

$$k' = \mathbb{Q}(\sqrt{3n}), \quad m' = \begin{cases} 3m, & 3 \nmid D_k, \\ 9m, & 3|D_k \end{cases} \quad (27n = D_{k'}(m')^2)$$

とおいた.

m を任意の自然数とする. $n = |D_k|m^2$, q は m と素な素数とする.

(1.8), (1.9) と補題 1.10 による $a_A(q^N)$ の具体的表示から, 二つの数列 $\{\tilde{h}(27nq^{2N})\}_{N \geq 0}$ と $\{h(-nq^{2N})\}_{N \geq 0}$ は全く同じ漸化式を満たすことがわかる.

参考文献

- [1] B. Datskovsky and D. J. Wright, The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms. II: Local theory, *J. Reine Angew. Math.* **367** (1986), 27–75.
- [2] B. N. Delone and D. K. Faddeev, The Theory of Irrationalities of the Third Degree, *Amer. Math. Soc. Transl.* **10**, 1964.
- [3] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, *Invent. math.* **119** (1998), 101–138.
- [4] Y. Ohno, A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 1083–1094.
- [5] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, *J. Math. Soc. Japan* **24** (1972), 132–188.