円周率の連分数展開について

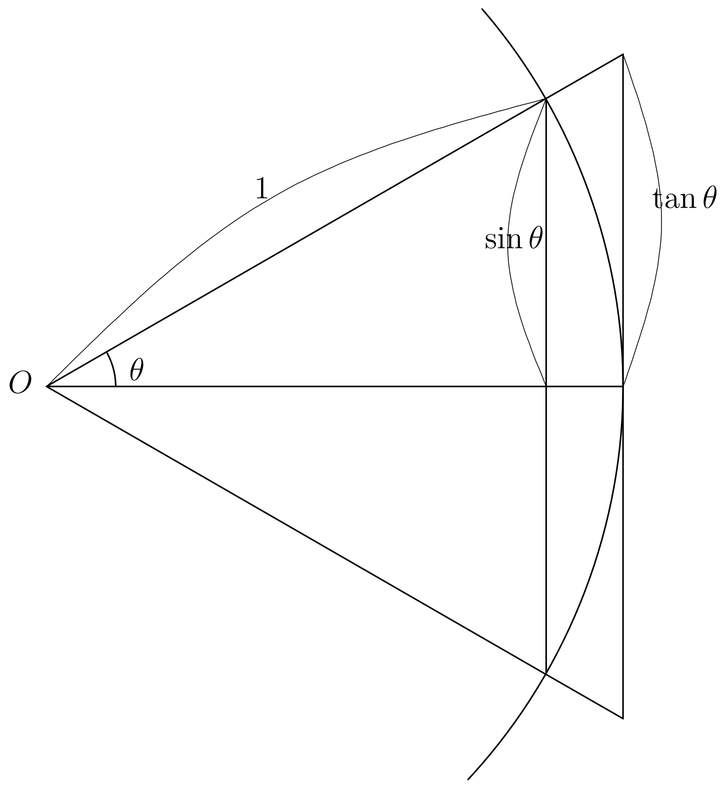
上越教育大学　中川仁

2002 年 9 月 27 日

人類は何千年も前から円周率を求めようと考えてきた．円は美しい基本的図形であるから，円周の長さや円の面積を求めようと考えることは，人間の知的本能からみれば当然であるかもしれない．円周の素朴な実測や，円の面積を小さな正方形のマス目の数で求めることによっては，3.14 まで求めることも困難である．円周率を計算する方法について，どのような工夫がなされてきたか，アルキメデス，グレゴリー，ガウスの方法を説明しよう．

1　アルキメデスの方法

半径 1 の円に内接する正 $n(\geq 3)$ 角形の周の長さを p_n，外接する正 n 角形の周の長さを q_n とする．$\theta = \frac{\pi}{n}$ ラジアンとおく．$p_n = 2n \sin\theta$, $q_n = 2n \tan\theta$ である．



同様に，$p_{2n} = 4n\sin\frac{\theta}{2}$, $q_{2n} = 4n\tan\frac{\theta}{2}$ である．このとき，p_n, q_n, p_{2n}, q_{2n} の間には次のような漸化式が成り立つ．

$$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \quad (p_n \text{ と } q_n \text{ の調和平均}), \tag{1}$$

$$p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}} \quad (p_n \text{ と } q_{2n} \text{ の幾何平均}). \tag{2}$$

[証明]

$$\begin{aligned}(1)\text{ の右辺} &= \frac{2(2n)^2\sin\theta\tan\theta}{2n(\sin\theta+\tan\theta)} = \frac{4n\sin\theta}{1+\cos\theta} \\ &= \frac{4n\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 4n\tan\frac{\theta}{2} = q_{2n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\text{ の右辺} &= \sqrt{8n^2\sin\theta\tan\frac{\theta}{2}} = \sqrt{16n^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}} \\ &= \sqrt{16n^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 4n\sin\frac{\theta}{2} = p_{2n}.\end{aligned}$$

□

$n = 6$ のとき，$p_6 = 6$, $q_6 = 4\sqrt{3}$ である．(1) より，

$$q_{12} = \frac{2\cdot 6\cdot 4\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}} = 24(2-\sqrt{3}).$$

(2) より，

$$p_{12} = \sqrt{6\cdot 24(2-\sqrt{3})} = 12\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

これを繰り返して小数で計算すれば，$\frac{1}{2}p_n < \pi < \frac{1}{2}q_n$ より，

$$\begin{aligned} n &= 12, \quad 3.1058\cdots < \pi < 3.2153\cdots, \\ n &= 24, \quad 3.1326\cdots < \pi < 3.1596\cdots, \\ n &= 48, \quad 3.1393\cdots < \pi < 3.1460\cdots, \\ n &= 96, \quad 3.1410\cdots < \pi < 3.1427\cdots, \\ n &= 192, \quad 3.1414\cdots < \pi < 3.1418\cdots. \end{aligned}$$

円周率 π の値として，正 96 角形の計算から，3.14 まで，正 192 角形の計算から，3.141 までわかる．

2　グレゴリー・ライプニッツの公式

ヨーロッパでは，17 世紀になり微積分的方法によって，ようやくアルキメデスの方法から脱却することができた．それは逆三角関数のテイラー展開を利用するものである．

三角関数 $x = \tan\theta$ は区間 $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において単調増加関数であるから，その逆関数として，$\theta = \arctan x$ を考えることができる．与えられた $-\infty < x < \infty$ に対して，$x = \tan\theta$ となる $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ が一意的に定まる．この θ を $\arctan x$ で表す．$x = \tan\theta$ について，

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + x^2$$

より，

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \tag{3}$$

を得る．等比数列の和の公式より，$|x| < 1$ に対して，

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

が成り立つ．(3) より，これを積分して，$\arctan x$ のテイラー展開

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{4}$$

を得る．この等式は，$|x| < 1$ のときに成り立っているが，$x = 1$ でも成り立つことが示され，$\tan\frac{\pi}{4} = 1$ より，$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから，(4) で $x = 1$ を代入して，グレゴリー・ライプニッツの公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} \tag{5}$$

を得る．

[証明]

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$$

を 0 から 1 まで積分して，

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx.$$

この左辺は，

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

に等しく，右辺の第 1 項の積分は $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であり，第 2 項の積分は不等式

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx < \int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3}$$

を満たすから，

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{1}{2n+3}$$

を得る．したがって，$n \to \infty$ として，(5) を得る． □

級数 (5) の収束は非常に遅いので，実際の計算には適していない．マチンは $\tan x$ の加法定理を用いて，これを次のように改良した．

$$\frac{\pi}{4} = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}. \tag{6}$$

これはグレゴリー・ライプニッツの公式 (5) よりもずっと収束が速く，$n = 4$ までの項の和から

$$\pi = 3.14159\cdots$$

を得る．グレゴリー・ライプニッツの公式 (5) は，インドで既に微積分を使わないで得られていた．

3 連分数

補題 1. a_n, $n \geq 1$ を複素数からなる数列として，x, y を変数として，

$$f_n(x,y) = 1 + \cfrac{a_1 x}{1 + \cfrac{a_2 x}{1 + \cfrac{a_3 x}{\ddots\, 1 + \cfrac{\ddots}{1 + \cfrac{a_{n-1} x}{1 + \cfrac{a_n x}{1+y}}}}}}, \quad n \geq 1,$$

$f_n(x) = f_n(x,0)$ とおけば，x の形式べき級数に展開したとき，任意の $N \geq n$ に対して，各 $1 \leq k \leq n$ について，$f_N(x)$ の x^k の係数は $f_n(x)$ の x^k の係数と等しい．したがって，形式べき級数として，

$$f(x) = 1 + \cfrac{a_1 x}{1 + \cfrac{a_2 x}{1 + \cfrac{a_3 x}{1 + \cfrac{a_4 x}{1 + \ddots}}}}$$

は意味を持つ．また，$g(x)$ を x から始まる形式べき級数とすれば，各 $1 \leq k \leq n$ について，$f_n(x, g(x))$ の x^k の係数は $f(x)$ の x^k の係数と等しい．

[証明]　A_n, B_n を漸化式

$$\begin{cases} A_n &= A_{n-1} + a_n x A_{n-2}, \\ B_n &= B_{n-1} + a_n x B_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

$A_0 = 1$, $A_1 = 1 + a_1 x$, $B_0 = 1$, $B_1 = 1$ によって定義する．B_n は定数項が 1 の x の多項式であることがわかる．n に関する帰納法によって

$$f_n(x, y) = \frac{A_{n-1} y + A_n}{B_{n-1} y + B_n} \tag{7}$$

が成り立つことを証明する．$n = 1$ に対して，

$$\frac{A_0 + A_1 y}{B_0 + B_1 y} = \frac{1 + (1 + a_1 x) y}{1 + y} = 1 + \frac{a_1 x}{1 + y} = f_1(x, y).$$

$n = k - 1$ について正しいとすれば，

$$\begin{aligned} f_k(x, y) &= f_{k-1}\left(x, \frac{a_k x}{1 + y}\right) = \frac{A_{k-2} \dfrac{a_k x}{1 + y} + A_{k-1}}{B_{k-2} \dfrac{a_k x}{1 + y} + B_{k-1}} \\ &= \frac{A_{k-1} y + A_{k-1} + a_k x A_{k-2}}{B_{k-1} y + B_{k-1} + a_k x B_{k-2}} = \frac{A_{k-1} y + A_k}{B_{k-1} y + B_k} \end{aligned}$$

となって，$n = k$ のときも正しい．帰納法により，すべての n に対して，(7) が成り立つ．$y = 0$ とすれば，$f_n(x) = \dfrac{A_n}{B_n}$ を得る．

$$\begin{aligned} A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k &= (A_{k-1} + a_k x A_{k-2}) B_{k-1} - A_{k-1}(B_{k-1} + a_k x B_{k-2}) \\ &= -a_k x (A_{k-1} B_{k-2} - A_{k-2} B_{k-1}). \end{aligned}$$

これを, $k = m, m - 1, \ldots, 2$ に対して繰り返し用いれば，$A_1 B_0 - A_0 B_1 = a_1 x$ に注意すると，

$$A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m = (-1)^{m-1} a_1 a_2 \cdots a_m x^m \tag{8}$$

を得る．したがって，

$$f_m(x) - f_{m-1}(x) = \frac{A_m}{B_m} - \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1} a_1 a_2 \cdots a_m x^m}{B_{m-1} B_m}. \tag{9}$$

ここで，漸化式から，B_{m-1}, B_m は定数項が 1 の x の多項式であるから，(9) の右辺を x の形式べき級数に展開すると，x^m から始まるべき級数になる．したがって，

$$f_N(x) - f_n(x) = \sum_{m=n+1}^{N} (f_m(x) - f_{m-1}(x))$$

は x^{n+1} から始まるべき級数になる．

$$f_n(x, g(x)) - f_n(x) = \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_n x^n g(x)}{B_n(B_n + B_{n-1} g(x))}$$

であり，分母は定数項 1 のべき級数だから，この右辺は x^{n+1} から始まる形式べき級数に展開される． $\square$

補題 2. $a_n,\ n \geq 1$ を正の実数からなる数列で，$0 < \delta_1 \leq a_n \leq \delta_1 < 1,\ n \geq 1$ を満たすとする．そのとき，連分数

$$f(x) = 1 + \cfrac{a_1 x}{1 + \cfrac{a_2 x}{1 + \cfrac{a_3 x}{1 + \cfrac{a_4 x}{1 + \ddots}}}}$$

は $0 \leq x \leq 1$ において一様収束して，区間 $[0, 1]$ における連続関数を定義する．

[証明] $f(x)$ の n 番目の近似分数を $\dfrac{A_n}{B_n}$ とすれば，漸化式

$$\begin{cases} A_n &= A_{n-1} + a_n x A_{n-2}, \quad A_0 = 1, A_1 = 1 + a_1 x, \\ B_n &= B_{n-1} + a_n x B_{n-2}, \quad B_0 = B_1 = 1, \quad n = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

から，B_n は係数がすべて正で，定数項が 1 の x の多項式であることがわかる．したがって，$0 \leq x \leq 1$ に対して，$B_n \geq 1,\ n \geq 0$．さらに，漸化式から，

$$B_k - B_{k-1} = a_k x B_{k-2} \geq a_k x.$$

したがって，

$$B_n = B_1 + \sum_{k=2}^{n} (B_k - B_{k-1}) \geq 1 + (a_2 + \cdots + a_n)x \geq 1 + (n-1)\delta_1 x.$$

$\square$

補題 3. $a_k,\ b_k\ (b_k \neq 0),\ k \geq 1$ を複素数からなる数列として，連分数

$$\lambda = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \ddots}}}}$$

を考える．もし，すべての $k \geq 1$ に対して，

$$|b_k| \geq |a_k| + 1$$

が成り立てば，この連分数は収束して，$|\lambda| \leq 1$ を満たす．

[証明]　A_k, B_k を漸化式

$$\begin{cases} A_k &= b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}, \\ B_k &= b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

$A_0 = 0$, $A_1 = a_1$, $B_0 = 1$, $B_1 = b_1$ によって定義する．そのとき，補題 1 の証明と同様にして，λ の k 番目の近似連分数

$$\lambda_k = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\ddots + \cfrac{a_{k-1}}{b_{k-1} + \cfrac{a_k}{b_k}}}}}$$

は $\dfrac{A_k}{B_k}$ に等しいことを示せる．

$$\begin{aligned} |B_k| &\geq |b_k||B_{k-1}| - |a_k||B_{k-2}| \\ &\geq |b_k||B_{k-1}| - (|b_k| - 1)|B_{k-2}|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B_k| - |B_{k-1}| &\geq (|b_k| - 1)(|B_{k-1}| - |B_{k-2}|) \\ &\geq (|b_k| - 1) \cdots (|b_2| - 1)(|B_1| - |B_0|) \\ &= (|b_k| - 1) \cdots (|b_2| - 1)(|b_1| - 1) \geq |a_1 a_2 \cdots a_k| \geq 0. \end{aligned}$$

したがって，

$$0 < |b_1| = |B_1| \leq |B_2| \leq |B_3| \leq \cdots .$$

ここで，

$$\begin{aligned} A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k &= (b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}) B_{k-1} - A_{k-1}(b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}) \\ &= -a_k (A_{k-1} B_{k-2} - A_{k-2} B_{k-1}) \\ &= (-1)^{k-1} a_1 a_2 \cdots a_k. \end{aligned}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{B_k} &= \frac{A_1}{B_1} + \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}\right) + \cdots + \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\right) \\ &= \frac{A_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k}. \end{aligned} \tag{10}$$

また，
$$\left|\frac{a_1a_2\cdots a_k}{B_{k-1}B_k}\right| \le \frac{|B_k|-|B_{k-1}|}{|B_{k-1}||B_k|} = \frac{1}{|B_{k-1}|} - \frac{1}{|B_k|}. \tag{11}$$
したがって，
$$\begin{aligned}\left|\frac{A_1}{B_1}\right| + \sum_{k=2}^{\infty}\left|\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\right| &\le \left|\frac{A_1}{B_1}\right| + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{|B_{k-1}|} - \frac{1}{|B_k|}\right) \\ &\le \left|\frac{A_1}{B_1}\right| + \frac{1}{|B_1|} = \frac{|a_1|+1}{|b_1|} \le 1. \end{aligned} \tag{12}$$
ゆえに，$\lambda = \lim_{k\to\infty}\dfrac{A_k}{B_k}$ は収束して，$|\lambda| \le 1$ を満たす． □

補題 4. $c_k,\ k \ge 1$ を 0 でない複素数からなる数列とすると，
$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \ddots}}}} = \cfrac{c_1a_1}{c_1b_1 + \cfrac{c_1c_2a_2}{c_2b_2 + \cfrac{c_2c_3a_3}{c_3b_3 + \cfrac{c_3c_4a_4}{c_4b_4 + \ddots}}}}.$$

[証明]　左辺の k 番目の近似連分数を $\dfrac{A_k}{B_k}$, 右辺の k 番目の近似連分数を $\dfrac{\tilde{A}_k}{\tilde{B}_k}$ とすれば，それぞれ漸化式
$$\begin{cases} A_k = b_kA_{k-1} + a_kA_{k-2}, \\ B_k = b_kB_{k-1} + a_kB_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$
$A_0 = 0,\ A_1 = a_1,\ B_0 = 1,\ B_1 = b_1$,
$$\begin{cases} \tilde{A}_k = c_kb_k\tilde{A}_{k-1} + c_{k-1}c_ka_k\tilde{A}_{k-2}, \\ \tilde{B}_k = c_kb_k\tilde{B}_{k-1} + c_{k-1}c_ka_k\tilde{B}_{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$
$\tilde{A}_0 = 0, \tilde{A}_1 = c_1a_1, \tilde{B}_0 = 1, \tilde{B}_1 = c_1b_1$ を満たす．このとき，数列 $A'_k = c_1c_2\cdots c_kA_k$, $B'_k = c_1c_2\cdots c_kB_k,\ k \ge 1$ は $\tilde{A}_k, \tilde{B}_k$ と同じ漸化式を満たし，初期値も等しいから，$\tilde{A}_k = c_1c_2\cdots c_kA_k, \tilde{B}_k = c_1c_2\cdots c_kB_k,\ k \ge 1$ を得る．したがって，$\dfrac{\tilde{A}_k}{\tilde{B}_k} = \dfrac{A_k}{B_k}$ である． □

4　超幾何級数の連分数展開

以下，ガウスによる超幾何級数の連分数展開 (1813 年) を用いて得られる公式について説明する．実数 α と自然数 n に対して，
$$(\alpha; n) = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

とおく．さらに，$(\alpha;0)=1$ とする．$(1;n)=n!$ である．$\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$ に対して，べき級数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha;n)(\beta;n)}{(\gamma;n)n!}x^n \tag{13}$$

は，$|x|<1$ において収束する．

[証明]　$a_n=\dfrac{(\alpha;n)(\beta;n)}{(\gamma;n)n!}$ とおけば，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(\alpha;n)(\beta;n)(\gamma;n+1)(n+1)!}{(\alpha;n+1)(\beta;n+1)(\gamma;n)n!}=\frac{(\gamma+n)(n+1)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

より，収束半径は $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1$ である．　□

このべき級数によって定義される関数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ を**ガウスの超幾何関数**と呼ぶ．パラメータ α,β,γ に特別な値を与えることによって，いろいろな初等関数が超幾何関数を用いて表せる．例えば，

$$\begin{aligned}
F(\alpha,0,\alpha;x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0;n)}{n!}x^n=1,\\
F(\alpha,\beta,\beta;x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha;n)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}(-x)^n=(1-x)^{-\alpha},\\
xF(1,1,2;x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!n!}{(n+1)!n!}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\log(1-x),\\
xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};-x^2\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(-1)^n x^{2n+1}=\arctan x.
\end{aligned}$$

超幾何関数の定義から容易に，次の関係式を導くことができる．

命題 5 (ガウスの隣接関係式)**.**

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}xF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x), \tag{14}$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=F(\alpha+1,\beta,\gamma+1;x)-\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}xF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x). \tag{15}$$

[証明]　$(\alpha+1;n)=\alpha^{-1}(\alpha;n+1)$, $(\beta+1;n)=\beta^{-1}(\beta+n)(\beta;n)=\beta^{-1}(\beta;n+1)$, $(\gamma+1;n)=\gamma^{-1}(\gamma+n)(\gamma;n)$, $(\gamma+2;n)=(\gamma+1)^{-1}(\gamma+n+1)(\gamma+1;n)=\gamma^{-1}(\gamma+1)^{-1}(\gamma+n+1)(\gamma;n+1)$ より，

$$
\begin{aligned}
(14)\text{ の右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha;n)(\beta+1;n)}{(\gamma+1;n)n!}x^n - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1;n)(\beta+1;n)}{(\gamma+2;n)n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma(\beta+n)(\alpha;n)(\beta;n)}{\beta(\gamma+n)(\gamma;n)n!}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\beta)(\alpha;n+1)(\beta;n+1)}{\beta(\gamma+1+n)(\gamma;n+1)n!}x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma(\beta+n)(\alpha;n)(\beta;n)}{\beta(\gamma+n)(\gamma;n)n!}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\gamma-\beta)n(\alpha;n)(\beta;n)}{\beta(\gamma+n)(\gamma;n)n!}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma(\beta+n)-(\gamma-\beta)n}{\beta(\gamma+n)}\right)\frac{(\alpha;n)(\beta;n)}{(\gamma;n)n!}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha;n)(\beta;n)}{(\gamma;n)n!}x^n = F(\alpha,\beta,\gamma;x).
\end{aligned}
$$

$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=F(\beta,\alpha,\gamma;x)$ に注意すれば，(14) で α と β を交換することによって (15) を得る． □

(14) の両辺を $F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)$ で割れば，

$$
\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)} = 1-\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x\frac{1}{\dfrac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x)}}.
$$

同様に，(15) で (α,β,γ) を $(\alpha,\beta+1,\gamma+1)$ で置き換えて，

$$
F(\alpha,\beta{+}1,\gamma{+}1;x) = F(\alpha{+}1,\beta{+}1,\gamma{+}2;x) - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}xF(\alpha{+}1,\beta{+}2,\gamma{+}3;x).
$$

この両辺を $F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x)$ で割れば，

$$
\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)}{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x)} = 1-\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x\frac{1}{\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x)}{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3;x)}}.
$$

したがって，

$$
\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)} = 1-\cfrac{\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x}{1-\cfrac{\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x}{\frac{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x)}{F(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3;x)}}}.
$$

(α,β,γ) を $(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)$ で置き換えることを繰り返せば，

$$
\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)} = 1+\cfrac{a_1x}{1+\cfrac{a_2x}{\ddots\cfrac{\ddots}{1+\cfrac{a_{2n}x}{\frac{F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+2n;x)}{F(\alpha+n,\beta+n+1,\gamma+2n+1;x)}}}}}. \tag{16}
$$

ここで，
$$a_1 = -\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \quad a_2 = -\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$
であり，(α,β,γ) を $(\alpha+n-1, \beta+n-1, \gamma+2n-2)$ で置き換えることによって，$n \geq 1$ に対して，
$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= -\frac{(\alpha+n-1)(\gamma+n-1-\beta)}{(\gamma+2n-2)(\gamma+2n-1)}, \\ a_{2n} &= -\frac{(\beta+n)(\gamma+n-\alpha)}{(\gamma+2n-1)(\gamma+2n)}. \end{aligned} \tag{17}$$

定理 6 (Gauss). 超幾何関数の比 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)/F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)$ は $|x|<1$ における有理型関数として，連分数展開
$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma;x)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)} = 1 + \cfrac{a_1x}{1+\cfrac{a_2x}{1+\cfrac{a_3x}{1+\cfrac{a_4x}{1+\ddots}}}}$$
を持つ．ここで，係数 a_{2n-1}, a_{2n} は (17) によって与えられる．

[証明]　$c_k = 2$, $k \geq 1$ として補題 4 を適用すれば，
$$1 + \cfrac{a_1x}{1+\cfrac{a_2x}{1+\cfrac{a_3x}{1+\cfrac{a_4x}{1+\ddots}}}} = 1 + \cfrac{2a_1x}{2+\cfrac{4a_2x}{2+\cfrac{4a_3x}{2+\cfrac{4a_4x}{2+\ddots}}}} \tag{18}$$
とかける．$0<r<1$ を固定する．$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = -\frac{1}{4}$ であるから，N を十分大きくとれば，
$$|4a_{2n-1}x| \leq 4|a_{2n-1}|r \leq 1, \quad |4a_{2n}x| \leq 4|a_{2n}|r \leq 1, \quad n \geq N, |x| \leq r$$
が成り立つ．$a'_k = 4a_{2N+k-1}x$, $b'_k = 2$ とおけば，$b'_k = 2 \geq |a'_k| + 1$, $k \geq 1$ であるから，補題 3 より，連分数
$$g_N(x) = \cfrac{4a_{2N}x}{2+\cfrac{4a_{2N+1}x}{2+\cfrac{4a_{2N+2}x}{2+\cdots}}} = \cfrac{a'_1}{b'_1+\cfrac{a'_2}{b'_2+\cfrac{a'_3}{b'_3+\cdots}}} \tag{19}$$

は収束する．さらに，(19) の右辺の k 番目の近似連分数を $\dfrac{A'_k}{B'_k}$ とすれば，補題 3 の証明から，

$$|B'_k| - |B'_{k-1}| \geq (|b'_k| - 1) \cdots (|b'_2| - 1)(|b'_1| - 1) = 1 \geq |a'_1 a'_2 \cdots a'_k|$$

を得る．これから，$|B'_k| \geq k+1$ を得る．$m > n$ に対して，

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left| \frac{A'_k}{B'_k} - \frac{A'_{k-1}}{B'_{k-1}} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{|B'_{k-1}|} - \frac{1}{|B'_k|} \right) = \frac{1}{|B'_n|} - \frac{1}{|B'_m|} < \frac{1}{n+1}$$

であるから，この連分数は $|x| \leq r$ において一様収束する．$|B'_k| \neq 0$ より，各項 $\dfrac{A'_k}{B'_k}$ は $|x| < r$ における正則関数であり，その極限 $g_N(x)$ も $|x| < r$ における正則関数である．B_{2N-2}, B_{2N-1} は定数項が 0 でない x の多項式であり，$g_N(0) = 0$ であるから，

$$(18)\ \text{の右辺} = \frac{A_{2N-2} g_N(x) + A_{2N-1}}{B_{2N-2} g_N(x) + B_{2N-1}}$$

は $|x| < r$ において有理型であり，$x = 0$ で正則な関数である．$0 < r < 1$ は任意であったから，(18) は $|x| < 1$ で有理型である．(18) の右辺の k 番目の近似連分数を $\dfrac{A_k}{B_k}$ とすれば，補題 1 の証明より，

$$f_{2n}(x, y) - f_{2n}(x) = \frac{A_{2n-1} y + A_{2n}}{B_{2n-1} y + B_{2n}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{a_1 \cdots a_{2n} x^{2n} y}{B_{2n}(B_{2n} + B_{2n-1} y)}.$$

であるから，

$$y = -1 + \frac{F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + 2n; x)}{F(\alpha + n, \beta + n + 1, \gamma + 2n + 1; x)}$$

とおけば，y は x から始まるべき級数であり，したがって，

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)} - f_{2n}(x) = f_{2n}(x, y) - f_{2n}(x) = \frac{a_1 \cdots a_{2n} x^{2n}}{B_{2n}(B_{2n} + B_{2n-1} y)} y$$

は x^{2n+1} から始まるべき級数である．よって，$\dfrac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)}$ と (18) のべき級数展開の係数は，x^{2n} の係数まで一致する．n は任意だから，これらは同じべき級数展開を持ち，$x = 0$ の近傍で一致する．ゆえに，$|x| < 1$ における有理型関数として，$\dfrac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)}$ と連分数 (18) は一致する． □

特に，$\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ とすれば，

$$F\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}; -x^2\right) = 1, \quad xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right) = \arctan x$$

であるから，定理 6 より，

$$\frac{1}{x^{-1}\arctan x} = 1 + \cfrac{-a_1x^2}{1 + \cfrac{-a_2x^2}{\ddots \cfrac{\ddots}{1 + \cfrac{-a_{2n}x^2}{1 + \ddots}}}}.$$

この逆数をとってから，両辺に x をかければ，

$$\arctan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{-a_1x^2}{1 + \cfrac{-a_2x^2}{\ddots \cfrac{\ddots}{1 + \cfrac{-a_{2n}x^2}{1 + \ddots}}}}}.$$

ここで，

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= -\frac{\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{\left(\frac{1}{2}+2n-2\right)\left(\frac{1}{2}+2n-1\right)} = -\frac{(2n-1)^2}{(4n-3)(4n-1)}, \\ a_{2n} &= -\frac{n\left(\frac{1}{2}+n-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+2n-1\right)\left(\frac{1}{2}+2n\right)} = -\frac{(2n)^2}{(4n-1)(4n+1)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

したがって，

$$-a_n = \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}, \quad n \geq 1$$

とまとめられる．以上によって，$|x| < 1$ における正則関数として，$\arctan x$ の連

分数展開

$$
\begin{aligned}
\arctan x &= \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x^2}{1\cdot 3}}{1+\cfrac{\frac{(2x)^2}{3\cdot 5}}{1+\cfrac{\frac{(3x)^2}{5\cdot 7}}{\ddots\cfrac{\ddots}{1+\cfrac{\frac{(nx)^2}{(2n-1)(2n+1)}}{\ddots}}}}}} \\
&= \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{(2x)^2}{5+\cfrac{(3x)^2}{\ddots\cfrac{\ddots}{2n-1+\cfrac{(nx)^2}{\ddots}}}}}} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

を得る．この右辺の連分数は，実数の閉区間 $[0,1]$ において，連続関数の一様収束極限であることがわかるから，$[0,1]$ における連続関数を表す．したがって，(20) の両辺で $x \to 1-0$ とすれば，$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから，π の連分数展開

$$
\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ddots}}}}} \qquad (21)
$$

を得る．

これから，数列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ を

$$
\begin{aligned}
A_n &= (2n+1)A_{n-1}+n^2A_{n-2},\ n=3,4\ldots, \quad A_1=3, A_2=19, \\
B_n &= (2n+1)B_{n-1}+n^2B_{n-2},\ n=3,4\ldots, \quad B_1=1, B_2=6.
\end{aligned}
$$

によって定めるとき，

$$\frac{A_n}{B_n} = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{n^2}{2n+1}}}}}}.$$

$n=5$ まで計算してみると，次のような π の近似分数を得る．

n	A_n	B_n	A_n/B_n	
1	3	1	3	3
2	19	6	19/6	$3.166\cdots$
3	160	51	160/51	$3.137\cdots$
4	1744	555	1744/555	$3.142\cdots$
5	23184	7380	644/205	$3.1414\cdots$

$A_{12}/B_{12} = 30594128896/9738413685 = 3.14159265416\cdots$ であり，これは小数点以下 8 桁まで正しい．

参考文献

[1] 小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.

[2] 青本和彦・喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.