算術幾何平均と円周率

上越教育大学　中川 仁

平成 21 年 9 月 18 日

1　アルキメデスの方法による円周率の計算

定義 1.1. 正の実数 a, b に対して,

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = A(a^{-1}, b^{-1})^{-1}$$

とおく．$A(a,b)$ を**算術平均**, $G(a,b)$ を**幾何平均**，$H(a,b)$ を**調和平均**という.

次の不等式が成り立つ.

$$A(a,b) \geq G(a,b) \geq H(a,b) \qquad (\text{等号は } a = b \text{ のときに限り成立}).$$

[証明]　$A(a,b) \geq G(a,b)$ はよく知られている．これから，$A(a^{-1}, b^{-1}) \geq G(a^{-1}, b^{-1})$ を得る．逆数をとれば，$H(a,b) = A(a^{-1}, b^{-1})^{-1} \leq G(a^{-1}, b^{-1})^{-1} = G(a,b)$.　□

命題 1.2 (アルキメデスの方法). 半径 1 の円に外接する正 $6 \cdot 2^n$ 角形の周の長さの半分を a_n，内接する正 $6 \cdot 2^n$ 角形の周の長さの半分を b_n とする．このとき，次のような漸化式と不等式が成り立つ.

$$a_{n+1} = H(a_n, b_n) \quad (a_n \text{ と } b_n \text{ の調和平均}),$$
$$b_{n+1} = G(a_{n+1}, b_n) \quad (a_{n+1} \text{ と } b_n \text{ の幾何平均}),$$
$$3 = b_0 < \cdots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_0 = 2\sqrt{3} = 3.4\ldots.$$

[証明]　$\theta = \dfrac{2\pi}{6 \cdot 2^{n+2}}$ とおけば，$a_n = 6 \cdot 2^n \tan 2\theta$, $b_n = 6 \cdot 2^n \sin 2\theta$,

$$\tan\theta = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta \tan 2\theta}{\sin 2\theta + \tan 2\theta},$$

$$2\sin^2\theta = 2\sin\theta\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin 2\theta \tan\theta.$$

これから，$a_{n+1} = H(a_n, b_n)$, $b_{n+1} = G(a_{n+1}, b_n)$. 相似を使った初等幾何的な証明については，[3], [5] を参照.　□

$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列，$\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるから収束する．それらは同じ極限値に収束することがわかり，その共通の極限値が π である．この方法で円周率 π を 1 千万桁計算するには，約 1 千 7 百万回の乗除と平方根の計算を要する ([4]).

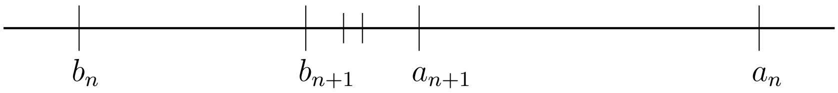
2　算術幾何平均

与えられた正の実数 $a > b$ から，$a_0 = a,\ b_0 = b,$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

によって数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を定義する．アルキメデスの方法のときと同様に，

$$b < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_2 < a_1 < a.$$



よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が存在する．さらに，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

より，$\alpha = \beta$ を得る．極限値 α を a と b の**算術幾何平均**といい，$\mathrm{AGM}(a, b)$ で表す．

例 2.1. $\mathrm{AGM}(2, 1)$ を計算してみよう．収束はかなり速いことがわかる．

n	a_n	b_n	$a_n - b_n$
0	2.00000000000	1.00000000000	1.00000000000
1	1.50000000000	1.41421356237	0.08578643763
2	1.45710678119	1.45647531512	0.00063146606
3	1.45679104815	1.45679101394	0.00000003421
4	1.45679103105	1.45679103105	0.00000000000

定理 2.2 (ガウスの公式)**.** $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$ $c_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2},\ n = 0, 1, \ldots$ とすれば，

$$\pi = \frac{2\mathrm{AGM}\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}.$$

$\displaystyle s_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k c_k^2, \quad p_n = \frac{2a_n^2}{1 - s_n}$ とおけば，

p_1	3.	18767	26427	12108	62720	19299	70525	36923	26510
p_2	3.	14168	02932	97653	29391	80704	24560	00938	27957
p_3	3.	14159	26538	95446	49600	29147	58818	04348	61088
p_4	3.	14159	26535	89793	23846	63606	02706	63132	17577
p_5	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971
π	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971

p_3 は小数第 9 位まで，p_4 は小数第 20 位まで，p_5 は小数第 40 位まで，π と一致している．このように，算術幾何平均を用いたガウスの公式は，円周率 π を高速に計算することに適している．この公式によれば，p_{20} 程度で π を約 100 万桁計算できる．ガウスは数値計算によって，1799 年にこの公式を発見して日記に「この事実の証明は必ず解析学の全く新しい分野を開くであろう」と記している．以下，[1],[2],[4] にしたがって，ガウスの公式の証明を紹介する．

3 楕円積分と算術幾何平均の関係

3.1 楕円の弧長

$a > b > 0$ とし，楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

を考える．この楕円の第 1 象限の部分の弧長を L とすると，

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

である．(3.1) を x で微分して，

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

(3.1) より，$a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2)$ であるから，$x = at,\ k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ とおけば，

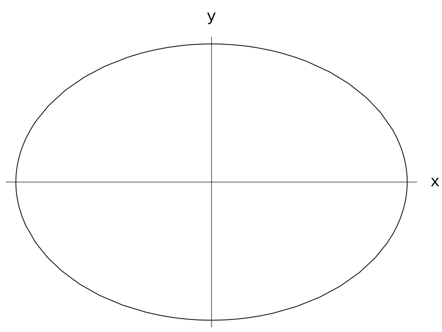


図 1: 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}}\, dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx = a\int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2t^2}{1 - t^2}}\, dt.$$

ここで，$0 \le k < 1$ であり，$k = 0$ のときが円の場合である．このような形の積分を**楕円積分**という．

定義 3.1. 次の楕円積分を**ルジャンドル-ヤコビの標準型**という.

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (\textbf{第 1 種楕円積分}),$$
$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \quad (\textbf{第 2 種楕円積分}).$$

いずれも, $x = \sin\theta$ と置換することによって, 右側の表示を得る.

定義 3.2.

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}},$$
$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

とおけば, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より,

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{a}K(k),$$
$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = aE(k).$$

よって,

$$I(a,b) = \frac{1}{a}K(k), \quad J(a,b) = aE(k) \ \ (= L). \tag{3.2}$$

命題 3.3.

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b).$$

[証明] $u = b\tan\theta$ とおけば, $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{b}{\cos^2\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}$, $\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{d\theta}{du} = \dfrac{\cos^2\theta}{b\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{b^2+u^2}}$. よって,

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,du. \end{aligned}$$

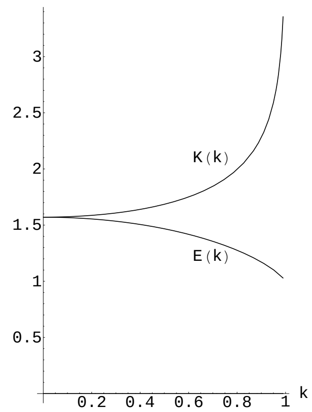


図 2: $K(k), E(k)$ のグラフ

したがって，

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+u^2\right)(ab+u^2)}}\,du.$$

ここで，$u=\dfrac{1}{2}\left(v-\dfrac{ab}{v}\right)$ とおけば，$ab+u^2=\dfrac{1}{4v^2}(ab+v^2)^2$，$\dfrac{1}{\sqrt{ab+u^2}}\dfrac{du}{dv}=\dfrac{1}{v}$，$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+u^2=\dfrac{1}{4}(a^2+v^2)(1+b^2v^{-2})=\dfrac{1}{4v^2}(a^2+v^2)(b^2+v^2)$ であり，v が 0 から ∞ まで動くとき，u は $-\infty$ から ∞ まで単調増加する．よって，

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(a^2+v^2)(b^2+v^2)}}\,dv=I(a,b).$$

□

命題 3.4. $k'=\sqrt{1-k^2}$ とおけば，$K(k)=\dfrac{\pi}{2\mathrm{AGM}(1,k')}$.

[証明]　$a_0=1,\ b_0=k'$ として，$n\geq 0$ について，$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ とする．$m=\mathrm{AGM}(1,k')$ とおけば，定義から，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=m$ である．命題3.3 の等式

$$I(1,k')=I(a_1,b_1)=\cdots=I(a_n,b_n)$$

において，$n\to\infty$ とすれば，

$$I(1,k')=I(m,m)=\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2m}=\frac{\pi}{2\mathrm{AGM}(1,k')}.$$

ここで，

$$I(1,k')=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+k'^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=K(k).$$

□

次に，$J\left(\dfrac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)$ と $J(a,b)$ の関係を調べよう．

補題 3.5. $\dfrac{dE}{dk}=\dfrac{1}{k}(E-K)$，$\dfrac{dK}{dk}=\dfrac{1}{kk'^2}(E-k'^2K)$.

[証明]

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dk}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{dk}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{k\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\\&=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\\&=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\\&=\frac{1}{k}(E-K),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dK}{dk} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dk}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin^2\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sin\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\,d\theta = \frac{k}{k'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right)\sin\theta\,d\theta \\
&= \frac{k}{k'^2}\left[-\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{k}{k'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{kk'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2\sin^2\theta+k^2-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{kk'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta - \frac{1}{kk'^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k'^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= \frac{1}{kk'^2}(E-k'^2K).
\end{aligned}
$$

□

補題 3.6.

(a) $K(k) = \dfrac{1}{1+k}K\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$, (b) $K(k) = \dfrac{2}{1+k'}K\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right)$,

(c) $E(k) = \dfrac{1+k}{2}E\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) + \dfrac{k'^2}{2}K(k)$, (d) $E(k) = (1+k')E\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right) - k'K(k)$.

[証明] (b) $k_1 = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{k'}}{\frac{1+k'}{2}}\right)^2} = \frac{1-k'}{1+k'}$ とおけば，$k_1' = \sqrt{1-k_1^2} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ である．命題 3.3 と (3.2) より，

$$
\begin{aligned}
K(k) = I(1,k') = I\left(\frac{1+k'}{2}, \sqrt{k'}\right) &= \frac{2}{1+k'}I(1,k_1') \\
&= \frac{2}{1+k'}K(k_1) = \frac{2}{1+k'}K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right).
\end{aligned}
$$

(a) $\ell = \frac{1-k'}{1+k'}$ とおく．$k' = \frac{1-\ell}{1+\ell}$, $k = \sqrt{1-k'^2} = \frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}$. (b) より，

$$
K(\ell) = K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1+k'}{2}K(k) = \frac{1}{1+\ell}K\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right).
$$

ℓ を k で置き換えれば，$K(k) = \frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$ を得る．

(d) (a) と同じく，$\ell = \frac{1-k'}{1+k'}$ とおく．$\frac{dk'}{dk} = -\frac{k}{k'}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ell}{dk} &= \frac{d\ell}{dk'}\frac{dk'}{dk} = \frac{(-2)}{(1+k')^2}\frac{(-k)}{k'} = \frac{2k^2}{(1+k')^2k'k} = \frac{2(1-k'^2)}{(1+k')^2k'k} \\
&= \frac{2(1-k')}{(1+k')kk'} = \frac{2\ell}{kk'}
\end{aligned}
$$

に注意する．$g(k) = K(\ell)$ とおく．(b) より，$(1+k')K = 2g$ である．これを k で微分して，

$$-\frac{k}{k'}K + (1+k')\frac{dK}{dk} = 2\frac{dK}{dk}(\ell)\frac{2\ell}{kk'}.$$

これと補題 3.5 の第 2 式から，

$$-\frac{k}{k'}K + (1+k')\frac{1}{kk'^2}(E - k'^2K) = 2\frac{1}{\ell\ell'^2}\left(E(\ell) - \ell'^2 g\right)\frac{2\ell}{kk'}.$$

$(1+k')K = 2g$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{1+k'}{kk'^2}E &= \left(\frac{1+k'}{k} + \frac{k}{k'}\right)K + \frac{4}{kk'\ell'^2}\left(E(\ell) - \ell'^2 g\right) \\
&= \frac{k' + k'^2 + k^2}{kk'}K + \frac{4}{\ell'^2 kk'}E(\ell) - \frac{2(1+k')}{kk'}K \\
&= \frac{1+k'}{kk'}K + \frac{4}{\ell'^2 kk'}E(\ell) - \frac{2(1+k')}{kk'}K \\
&= \frac{(1+k')^2}{kk'^2}E(\ell) - \frac{1+k'}{kk'}K.
\end{aligned}$$

よって，(d) を得る．
(c) (d) より，

$$(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = E(k) + k'K(k).$$

ここで，$\ell = \frac{1-k'}{1+k'}$ とおけば，$k' = \frac{1-\ell}{1+\ell}$, $k = \frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}$ であるから，(a) より，

$$\frac{2}{1+\ell}E(\ell) = E\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) + \frac{1-\ell}{1+\ell}K\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) = E\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) + (1-\ell)K(\ell).$$

よって，

$$E(\ell) = \frac{1+\ell}{2}E\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) + \frac{1-\ell^2}{2}K(\ell) = \frac{1+\ell}{2}E\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) + \frac{\ell'^2}{2}K(\ell).$$

ℓ を k でおきかえれば，(c) を得る． □

命題 3.7.

$$2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - J(a,b) = abI(a,b).$$

[証明] $k' = \frac{b}{a}$, $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, $\frac{1-k'}{1+k'} = \frac{a-b}{a+b}$, (3.2) の $J(a,b) = aE(k)$ より，

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{a+b}{2}E\left(\sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}}\right) = \frac{a+b}{2}E\left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

よって，$J(a,b)=aE(k)$ と $I(a,b)=\frac{1}{a}K(k)$ に注意すれば，補題 3.6 の (d) より，

$$
\begin{aligned}
&2J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)-J(a,b)\\
&=(a+b)E\left(\frac{a-b}{a+b}\right)-aE(k)=(a+b)E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)-aE(k)\\
&=\frac{a+b}{1+k'}(E(k)+k'K(k))-aE(k)=ak'K(k)=bK(k)=abI(a,b).
\end{aligned}
$$

□

補題 3.8. $c_n=\sqrt{a_n^2-b_n^2}$ $(n\geq 0)$ とおけば，$n\geq 1$ のとき，$c_n=\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty}2^nc_n^2=0$ が成り立つ．

[証明] $n\geq 1$ のとき，$c_n^2=\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)^2-a_{n-1}b_{n-1}=\left(\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}\right)^2$ より，$c_n=\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}$ である．$a_{n-1}>b_{n-1}\geq b$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\mathrm{AGM}(a,b)$ より，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$ である．特に，ある番号 n_0 が存在して，$n\geq n_0$ ならば，$0<c_n<b$ である．よって，$n>n_0$ のとき，$a_{n-1}+b_{n-1}\geq 2b_{n-1}\geq 2b$ であるから，

$$
0<\frac{c_n}{b}=\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2b}=\frac{a_{n-1}^2-b_{n-1}^2}{2b(a_{n-1}+b_{n-1})}=\frac{c_{n-1}^2}{2b(a_{n-1}+b_{n-1})}<\frac{1}{4}\left(\frac{c_{n-1}}{b}\right)^2.
$$

これから，

$$
0<c_{n_0+m}<b\left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+\cdots+2^{m-1}}\left(\frac{c_{n_0}}{b}\right)^{2^m}<4b\left(\frac{1}{4}\right)^{2^m}=\frac{4b}{2^{2^{m+1}}}.
$$

よって，$\lim_{m\to\infty}2^{n_0+m}c_{n_0+m}^2=0$ を得る． □

命題 3.9.

$$
J(a,b)=\left(a^2-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}c_n^2\right)I(a,b).
$$

[証明] $A_n=2^n\left(J(a_n,b_n)-a_n^2I(a_n,b_n)\right)$ とおく．命題 3.7 と命題 3.3 より，

$$
\begin{aligned}
A_{n+1}-A_n&=2^n\left(2J(a_{n+1},b_{n+1})-J(a_n,b_n)\right)-2^{n+1}a_{n+1}^2I(a_{n+1},b_{n+1})+2^na_n^2I(a_n,b_n)\\
&=2^na_nb_nI(a_n,b_n)-2^{n+1}a_{n+1}^2I(a_n,b_n)+2^na_n^2I(a_n,b_n)\\
&=2^{n-1}\left(2a_nb_n-(a_n+b_n)^2+2a_n^2\right)I(a_n,b_n)\\
&=2^{n-1}(a_n^2-b_n^2)I(a_n,b_n)=2^{n-1}c_n^2I(a,b).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2^{-n}A_n&=a_n^2I(a_n,b_n)-J(a_n,b_n)\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta+b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a_n^2\cos^2\theta+b_n^2\sin^2\theta}\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a_n^2-a_n^2\cos^2\theta-b_n^2\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta+b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a_n^2-b_n^2)\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta+b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta\\
&=c_n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta+b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta\leq c_n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta+b_n^2\sin^2\theta}}=c_n^2I(a_n,b_n).
\end{aligned}
$$

したがって，$0 < -A_n \leq 2^n c_n^2 I(a_n, b_n) = 2^n c_n^2 I(a, b)$. 補題 3.8 より，$\lim_{n\to\infty} 2^n c_n = 0$ が成り立つから，$A_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(A_{n+1} - A_n) = \lim_{N\to\infty} A_{N+1} = 0$. これから，

$$
\begin{aligned}
J(a,b) - a^2 I(a,b) &= A_0 = -\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n+1} - A_n) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I(a,b) \\
&= -I(a,b)\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2, \\
J(a,b) &= \left(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) I(a,b).
\end{aligned}
$$

□

次の**ルジャンドルの関係式**の証明は次節で与える.

命題 3.10 (ルジャンドルの関係式).

$$
E(k)K(k') + E(k')K(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2}.
$$

[定理 2.2(ガウスの公式) の証明]

$a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおけば，$k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}} = b$ である．命題 3.10 より，

$$
2E(b)K(b) - K(b)^2 = \frac{\pi}{2}. \tag{3.3}
$$

命題 3.9 より，

$$
E(b) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) I(1,b) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) K(b). \tag{3.4}
$$

(3.4) を (3.3) に代入すれば,

$$
\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n} c_n^2\right) K(b)^2 = \frac{\pi}{2}. \tag{3.5}
$$

命題 3.4 より，$K(b) = \frac{\pi}{2\mathrm{AGM}(1,b)}$ であるから，これを (3.5) に代入して，

$$
\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n} c_n^2\right) \frac{\pi^2}{4\mathrm{AGM}(1,b)^2} = \frac{\pi}{2}. \qquad \square
$$

4 ルジャンドルの関係式の証明

定義 4.1. $a, b, c \in \mathbb{C}$，c は 0 以下の整数ではないとする．$n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ に対して，$a^{(n)} = a(a+1)\cdots(a+n-2)(a+n-1)$, $a^{(0)} = 1$ とおく ($1^{(n)} = n!$ である)．そのとき，級数

$$
F(a,b,c;u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)} b^{(n)}}{n! c^{(n)}} u^n \tag{4.1}
$$

を**ガウスの超幾何級数**と呼ぶ.

命題 4.2. 超幾何級数 $f(u) = F(a,b,c;u)$ は $|u| < 1$ において収束し，単位円板上の正則関数を表す．さらに，これは微分方程式

$$u(1-u)\frac{d^2 f}{du^2} + (c - (a+b+1)u)\frac{df}{du} - abf = 0 \tag{4.2}$$

を満たす.

[証明]　$A_n = \dfrac{a^{(n)}b^{(n)}}{n!c^{(n)}}$ とおくと，

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{(n+1)(c+n)}{(a+n)(b+n)} \to 1 \ \ (n \to \infty) \tag{4.3}$$

であるから，$f(u) = F(a,b,c;u)$ の収束半径は 1 である．次に，微分作用素 $D = u\dfrac{d}{du}$ を考える．$Du^n = nu^n$ が成り立つことに注意する．そのとき，

$$\left[(a+D)(b+D) - (c+D)(1+D)\frac{1}{u}\right] f(u) = 0 \tag{4.4}$$

が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned}
(4.4)\ \text{の左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty}(a+D)(b+D)A_n u^n - \sum_{n=0}^{\infty}(c+D)(1+D)A_n u^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a+D)(b+D)A_n u^n - \sum_{n=-1}^{\infty}(c+D)(1+D)A_{n+1} u^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a+n)(b+n)A_n u^n - \sum_{n=-1}^{\infty}(c+n)(1+n)A_{n+1} u^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(a+n)(b+n)A_n - (c+n)(1+n)A_{n+1}\right] u^n = 0.
\end{aligned}$$

ここで，最後に (4.3) を用いた．(4.4) を通常の微分方程式にかきなおそう．

$$D^2 f = D(Df) = u\frac{d}{du}\left(u\frac{df}{du}\right) = u\frac{df}{du} + u^2\frac{d^2 f}{du^2}$$

であるから，

$$(a+D)(b+D)f = (D^2 + (a+b)D + ab)f = u\frac{df}{du} + u^2\frac{d^2 f}{du^2} + (a+b)u\frac{df}{du} + abf.$$

一方，$D\left(\dfrac{1}{u}f\right) = u\left(-\dfrac{1}{u^2}f + \dfrac{1}{u}\dfrac{df}{du}\right) = -\dfrac{1}{u}f + \dfrac{df}{du}$ であるから，

$$(c+D)(1+D)\frac{1}{u}f = (c+D)\left[\frac{1}{u}f + D\left(\frac{1}{u}f\right)\right] = (c+D)\frac{df}{du} = c\frac{df}{du} + u\frac{d^2 f}{du^2}.$$

したがって，

$$(u^2-u)\frac{d^2f}{du^2}+((a+b+1)u-c)\frac{df}{du}+abf=0.$$

□

命題 4.3. $K(k)=\dfrac{\pi}{2}F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1;k^2\right).$

[証明]　拡張された 2 項係数

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n}&=\frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}\\&=\frac{(-1)^n(1/2)(1/2+1)\cdots(1/2+n-1)}{n!}=\frac{(-1)^n(1/2)^{(n)}}{n!}\end{aligned}$$

を用いれば，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^{(n)}}{n!}x^n$$

である．また，部分積分によって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\,d\theta=\frac{(1/2)^{(n)}}{n!}\frac{\pi}{2}$$

がわかる．したがって，

$$\begin{aligned}K(k)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^{(n)}}{n!}k^{2n}\sin^{2n}\theta\right)d\theta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^{(n)}}{n!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\theta\,d\theta\\&=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^{(n)}(1/2)^{(n)}}{n!n!}k^{2n}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right).\end{aligned}$$

□

補題 4.4. $K'(k)=K(k')$ とおけば，$K(k),\ K'(k)$ は 2 階線形微分方程式

$$(k^3-k)\frac{d^2y}{dk^2}+(3k^2-1)\frac{dy}{dk}+ky=0 \tag{4.5}$$

の解である．

[証明]　$F(u)=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-ux^2)}}$ とおけば，命題 4.3 より，

$$F(u)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;u\right)$$

である．命題 4.2 より，$y = F(u)$ は微分方程式

$$(u-u^2)\frac{d^2y}{du^2} + (1-2u)\frac{dy}{du} - \frac{1}{4}y = 0 \tag{4.6}$$

を満たす．$G(u) = F(1-u)$ とおけば，$\dfrac{dG}{du} = -\dfrac{dF}{du}(1-u)$, $\dfrac{d^2G}{du^2} = \dfrac{d^2F}{du^2}(1-u)$, $(1-u)-(1-u)^2 = u-u^2$, $1-2(1-u) = -(1-2u)$ より，

$$(u-u^2)\frac{d^2G}{du^2} + (1-2u)\frac{dG}{du} - \frac{1}{4}G = 0$$

を得る．すなわち，$y = G(u)$ も微分方程式 (4.6) の解である．$K(k) = F(k^2)$ であるから，

$$\frac{dK}{dk} = 2k\frac{dF}{du}(k^2), \quad \frac{d^2K}{dk^2} = 4k^2\frac{d^2F}{du^2}(k^2) + 2\frac{dF}{du}(k^2).$$

したがって，$\dfrac{d^2F}{du^2}(k^2) = \dfrac{1}{4k^2}\dfrac{d^2K}{dk^2} - \dfrac{1}{4k^3}\dfrac{dK}{dk}$, $\dfrac{dF}{du}(k^2) = \dfrac{1}{2k}\dfrac{dK}{dk}$ である．これを

$$(k^2-k^4)\frac{d^2F}{du^2}(k^2) + (1-2k^2)\frac{dF}{du}(k^2) - \frac{1}{4}F(k^2) = 0$$

に代入して整理すれば,

$$(k^3-k)\frac{d^2K}{dk^2} + (3k^2-1)\frac{dK}{dk} + kK = 0$$

を得る． $K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}) = F(1-k^2) = G(k^2)$ であり，G は F と同じ微分方程式を満たすから，K' は K と同じ微分方程式を満たす. □

補題 4.5. $K'(k) = K(k')$, $E'(k) = E(k')$ とおけば，$EK' + E'K - KK'$ は定数である．

[証明]　微分方程式 (4.5) において，$u = k^{-\frac{1}{2}}k'^{-1}$, $y = uz$ とおく．そのとき，$(k^3-k)u^2 = -1$ であるからこれを k で微分して,

$$2(k^3-k)\frac{du}{dk} + (3k^2-1)u = 0,$$
$$(k^3-k)\frac{d^2u}{dk^2} + \frac{3(3k^2-1)}{2}\frac{du}{dk} + 3ku = 0.$$

また,

$$\frac{dy}{dk} = u\frac{dz}{dk} + \frac{du}{dk}z, \quad \frac{d^2y}{dk^2} = u\frac{d^2z}{dk^2} + 2\frac{du}{dk}\frac{dz}{dk} + \frac{d^2u}{dk^2}z$$

であるから，z は次の微分方程式を満たす.

$$(k^3-k)\left(u\frac{d^2z}{dk^2} + 2\frac{du}{dk}\frac{dz}{dk} + \frac{d^2u}{dk^2}z\right) + (3k^2-1)\left(u\frac{dz}{dk} + \frac{du}{dk}z\right) + kuz = 0.$$

これを整理すれば,

$$\frac{d^2z}{dk^2}+\frac{1}{4k^2}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 z=0. \tag{4.7}$$

補題 4.4 より，$y=K$, $y=K'$ はともに微分方程式 (4.5) の解であった．したがって，$H_1(k)=k^{\frac{1}{2}}k'K(k)$, $H_2(k)=k^{\frac{1}{2}}k'K'(k)$ とおけば，$z=H_i(k)$, $i=1,2$ は微分方程式 (4.7) の解である．よって，$W=\dfrac{dH_1}{dk}H_2-H_1\dfrac{dH_2}{dk}$ とおけば,

$$\frac{dW}{dk}=\frac{d^2H_1}{dk^2}H_2-H_1\frac{d^2H_2}{dk^2}=0$$

より，W は定数である．$\dfrac{d}{dk}k^{\frac{1}{2}}k'=\dfrac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}k'-k^{\frac{3}{2}}k'^{-1}$ に注意すれば，補題 3.5 より,

$$\begin{aligned}
W&=\left(\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}k'-k^{\frac{3}{2}}k'^{-1}\right)Kk^{\frac{1}{2}}k'K'+k^{\frac{1}{2}}k'\frac{dK}{dk}k^{\frac{1}{2}}k'K'\\
&\quad-\left(\frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}k'-k^{\frac{3}{2}}k'^{-1}\right)K'k^{\frac{1}{2}}k'K-k^{\frac{1}{2}}k'\frac{dK'}{dk}k^{\frac{1}{2}}k'K\\
&=kk'^2\left(\frac{dK}{dk}K'-K\frac{dK'}{dk}\right).
\end{aligned}$$

ここで，補題 3.5 より，$kk'^2\dfrac{dK}{dk}=E-k'^2K$ である．さらに,

$$kk'^2\frac{dK'}{dk}=-kk'^2\frac{dK}{dk}(k')\frac{k}{k'}=-k^2k'\frac{dK}{dk}(k')=-E(k')+k^2K(k').$$

よって，$k^2+k'^2=1$ より,

$$W=(E-k'^2K)K'-K(-E(k')+k^2K(k'))=EK'+E'K-KK'. \quad \square$$

[ルジャンドルの関係式の証明]　補題 4.5 より，$W=EK'+E'K-KK'$ は定数である．$\lim\limits_{k\to 0}W$ を計算することによってこの定数を求めよう．$K(0)=\frac{\pi}{2}$ である．また,

$$E(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\big[\sin\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

$W=(E-K)K'+E'K$ であるから,

$$\lim_{k\to 0}W=\lim_{k\to 0}(E-K)K'+E(1)K(0)=\lim_{k\to 0}(E-K)K'+\frac{\pi}{2}.$$

よって，$\lim_{k\to 0}(E-K)K'=0$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}
(K-E)K' &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\right) \times K(k') \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\theta}}\right) \\
&\leq k\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta}}\right) \\
&= kK\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta}} \\
&\leq kK\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta}} = kK\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

したがって，

$$0<(K-E)K' \leq kK\frac{\pi}{2} \to 0 \quad (k\to 0).$$

□

参考文献

[1] 竹之内修・伊藤隆， π–π の計算 アルキメデスから現代まで–， 共立出版，2007.

[2] 梅村浩，楕円関数論， 東京大学出版会， 2000.

[3] 小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.

[4] 大浦拓哉，円周率の公式と計算法，http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ ooura/pi04.pdf

[5] 中川仁，http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/pi.pdf

[6] 中川仁，http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/pi2002.pdf