

# 1 次分数変換と連分数について

中川仁

2012年10月1日

R. F. C. ウォルターズの本 [1] に述べられている円周率  $\pi$  の無理数性の証明を紹介する.

## 1 1 次分数変換

$GL_2(\mathbb{C})$  によって, 複素数を成分とする 2 次行列  $A$  で行列式の値が 0 でないものの全体のなす集合を表す.

$$GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, \det A = ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$GL_2(\mathbb{C})$  は行列の積に関して群をなす. 実際,  $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$  とすれば,

$$\det(AB) = \det A \det B \neq 0, \quad AB \in GL_2(\mathbb{C})$$

である. また, 単位行列  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$  は, 任意の  $A \in GL_2(\mathbb{C})$  に対して,  $AI = IA = A$  を満たす. さらに,  $A \in GL_2(\mathbb{C})$  に対して,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおけば,  $\det A^{-1} = (ad - bc)^{-1} \neq 0$  であるから,  $A^{-1} \in GL_2(\mathbb{C})$  であり,  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  を満たす.

定義 1.1.  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$  に対して, 1 次分数変換

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

を対応させる .

$$A(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0, \\ \infty, & c = 0, \end{cases} \quad A\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad (c \neq 0)$$

とすることによって,  $z \mapsto A(z)$  はリーマン球面  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  のリーマン面としての自己同型である .  $r$  を 0 でない複素数とすれば,

$$(rA)(z) = \frac{raz + rb}{rcz + rd} = \frac{az + b}{cz + d} = A(z)$$

である . また,  $I(z) = z$  である .

命題 1.2.  $A, B \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  とすれば,

$$(AB)(z) = A(B(z)).$$

[証明]  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して,  $j(A, z) = cz + d$  とおくと,

$$A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} = j(A, z) \begin{pmatrix} A(z) \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$AB \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = j(AB, z) \begin{pmatrix} (AB)(z) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

一方,

$$\begin{aligned} AB \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} &= A j(B, z) \begin{pmatrix} B(z) \\ 1 \end{pmatrix} = j(B, z) A \begin{pmatrix} B(z) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= j(B, z) j(A, B(z)) \begin{pmatrix} A(B(z)) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,  $(AB)(z) = A(B(z))$ ,  $j(AB, z) = j(A, B(z))j(B, z)$ . □

系 1.3.  $A \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ ,  $w = A(z)$  ならば,  $z = A^{-1}(w)$ .

有限個あるいは無限個の 1 次分数変換の合成によって, 多くのものを表すことができる . 例えば,

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots$$

として,  $F_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$  とおけば,  $A_k(z) = z + b_k$  であるから,

$$F_n(z) = z + b_0 + b_1 + \cdots + b_n, \quad F_n(0) = b_0 + b_1 + \cdots + b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

また,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_k \neq 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

として,  $F_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$  とおけば,  $A_k(z) = a_k z$  であるから,

$$F_n(z) = a_0 a_1 \cdots a_n z, \quad F_n(1) = a_0 a_1 \cdots a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(1) = \prod_{n=0}^{\infty} a_n.$$

さらに,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_k \neq 0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

として,  $F_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$  とおけば,  $A_k(z) = a_k + \frac{b_k}{z}$  であるから,

$$F_n(z) = a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{\ddots \frac{b_{n-1}}{a_n + \frac{b_n}{z}}}}} = a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_n + \frac{b_n}{z}}}},$$

$$F_n(\infty) = a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_n}}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\infty) = a_0 + \frac{b_0}{a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{a_n} + \cdots}}.$$

このようにして, 一般の有限連分数, および無限連分数が得られる. 特に,  $b_k = 1$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) であるような連分数を正則連分数という.

## 2 行列の無限積の極限

定義 2.1.  $A_0, A_1, A_2, \dots$  を複素数を成分とする 2 次行列で,

$$A_0 A_1 A_2 \cdots A_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1$$

とする.  $n \rightarrow \infty$  とするとき,  $p_n/q_n$  と  $r_n/s_n$  が同じ極限值  $\alpha$  に収束するならば,  $\alpha$  は行列の無限積の極限であるといい,

$$\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} A_n$$

と表す.

$\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} A_n$  のとき, 1 次分数変換の合成

$$F_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$$

と  $\alpha$  の関係を調べよう.

$$A_0 A_1 \cdots A_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix}$$

とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{s_n} = \alpha$$

である. 数列  $\{-s_n/q_n\}_{n=0}^{\infty}$  の密集点の集合を  $E$  とする.  $z \in \mathbb{C} \setminus E$  とすれば, ある  $\delta > 0$  と  $n_0$  に対して,

$$\left| z + \frac{s_n}{q_n} \right| \geq \delta, \quad \forall n \geq n_0$$

である.

$$F_n(z) - \frac{r_n}{s_n} = \frac{p_n z + r_n}{q_n z + s_n} - \frac{r_n}{s_n} = \frac{p_n s_n z + r_n s_n - q_n r_n z - r_n s_n}{s_n (q_n z + s_n)} = \frac{(p_n s_n - q_n r_n) z}{s_n (q_n z + s_n)}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \left| F_n(z) - \frac{r_n}{s_n} \right| &= \frac{|(p_n s_n - q_n r_n) z|}{|s_n (q_n z + s_n)|} = \frac{\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{r_n}{s_n} \right| |z|}{\left| z + \frac{s_n}{q_n} \right|} \\ &\leq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{r_n}{s_n} \right| \cdot \frac{|z|}{\delta} \leq \left( \left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{r_n}{s_n} \right| \right) \frac{|z|}{\delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |F_n(z) - \alpha| &= \left| F_n(z) - \frac{r_n}{s_n} + \frac{r_n}{s_n} - \alpha \right| \leq \left| F_n(z) - \frac{r_n}{s_n} \right| + \left| \frac{r_n}{s_n} - \alpha \right| \\ &\leq \left( \left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| + \left| \alpha - \frac{r_n}{s_n} \right| \right) \frac{|z|}{\delta} + \left| \frac{r_n}{s_n} - \alpha \right|. \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = \alpha, \quad \forall z \in (\mathbb{C} \setminus E) \cup \{0, \infty\}.$$

注意 2.2.  $\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} A_n$  かつ,  $c_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) が 0 でない複素数ならば,

$$\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} c_n A_n.$$

注意 2.3.  $\alpha \sim \prod_{n=0}^{\infty} A_n$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とするとき,  $c\alpha + d \neq 0$  ならば,

$$\frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \sim A \prod_{n=0}^{\infty} A_n.$$

実際,  $f_n(z) = (A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$ ,  $F_n(z) = (A A_0 A_1 \cdots A_n)(z)$  とおけば,  $F_n(z) = A(f_n(z))$  であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A(f_n(\infty)) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\infty)) = A(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A(f_n(0)) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0)) = A(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}. \end{aligned}$$

補題 2.4.  $a, b, c, d$  を正の実数とすれば,  $\frac{a+b}{c+d}$  は  $\frac{a}{c}$  と  $\frac{b}{d}$  の間にある.

[証明]  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$  としてよい. このとき,  $ad - bc > 0$  である.

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} - \frac{a+b}{c+d} &= \frac{a(c+d) - c(a+b)}{c(c+d)} = \frac{ad - bc}{c(a+c)} > 0, \\ \frac{a+b}{c+d} - \frac{b}{d} &= \frac{d(a+b) - b(c+d)}{d(c+d)} = \frac{ad - bc}{d(a+c)} > 0. \end{aligned}$$

□

定理 2.5.  $a_k, b_k, c_k$  を正整数とし,  $A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & 0 \end{pmatrix}$  とする ( $k = 1, 2, \dots$ ). このとき, ある  $\delta > 0$  について

$$a_k \geq (b_k c_k)^{1+\delta} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成り立つならば, 行列の無限積  $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$  は極限  $\alpha > 1$  をもち,  $\alpha$  は無理数である.

[証明]  $n \geq 1$  に対して,

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n p_{n-1} \\ b_n q_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 2$$

が成り立つ. 実際,  $n \geq 2$  のとき,

$$A_1 \cdots A_{n-1} A_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & r_{n-1} \\ q_{n-1} & s_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + c_n r_{n-1} & b_n p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + c_n s_{n-1} & b_n q_{n-1} \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + c_n r_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + c_n s_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n p_{n-1} \\ b_n q_{n-1} \end{pmatrix}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1} p_n + c_{n+1} r_n = a_{n+1} p_n + c_{n+1} b_n p_{n-1}, \\ q_{n+1} &= a_{n+1} q_n + c_{n+1} s_n = a_{n+1} q_n + c_{n+1} b_n q_{n-1}. \end{aligned}$$

これから,  $n \rightarrow \infty$  のとき,  $q_n \rightarrow \infty$  となることがわかる. さらに,

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 \geq (b_1 b_1)^{1+\delta} \geq b_1 b_1 \geq c_1 = q_1, \\ p_2 &= a_2 p_1 + c_2 r_1 = a_2 p_1 + c_2 b_1 \geq a_2 p_1 \geq a_2 c_1 = q_2 \end{aligned}$$

と上の漸化式から,  $p_n \geq q_n$  である. また,

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + c_{n+1} b_n p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + c_{n+1} b_n q_{n-1}},$$

$a_{n+1} > 0, c_{n+1} b_n > 0$  であるから, 補題 2.4 より,  $p_{n+1}/q_{n+1}$  は  $p_n/q_n$  と  $p_{n-1}/q_{n-1}$  の間にある. もっと詳しくいえば,

$$\begin{aligned} b_2(p_2 q_1 - p_1 q_2) &= \begin{vmatrix} p_2 & b_2 p_1 \\ q_2 & b_2 q_1 \end{vmatrix} = \det(A_1 A_2) = \det(A_1) \det(A_2) \\ &= (-b_1 c_1)(-b_2 c_2) = b_1 c_1 b_2 c_2 > 0. \end{aligned}$$

したがって,  $p_2/q_2 > p_1/q_1$  であるから,

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \dots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \dots < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}.$$

さらに,  $n > 2$  のとき,

$$q_n = a_n q_{n-1} + c_n b_{n-1} q_{n-2} > a_n q_{n-1} \geq b_n c_n q_{n-1} \geq c_n q_{n-1}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| &= \frac{|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n|}{q_n q_{n-1}} = \frac{|\det(A_1 \cdots A_n)|}{b_n q_n q_{n-1}} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n |\det(A_k)|}{b_n q_n q_{n-1}} = \frac{\prod_{k=1}^n b_k c_k}{b_n q_n q_{n-1}} \\ &< \frac{b_1 c_1 \cdots b_{n-1} c_{n-1} b_n c_n}{b_n c_n q_{n-1}^2} = \frac{b_1 c_1 \cdots b_{n-1} c_{n-1}}{q_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

ある  $K > 0$  について,  $q_{n-1} > (K b_1 c_1 \cdots b_{n-1} c_{n-1})^{1+\delta}$  が成り立つことを示す. これがいえれば,  $\sigma = \delta/(1+\delta)$  とおくと,  $1 - \sigma = 1/(1+\delta)$  であり,

$$q_{n-1}^{1-\sigma} = q_{n-1}^{1/(1+\delta)} > K b_1 c_1 \cdots b_{n-1} c_{n-1},$$

$n \rightarrow \infty$  のとき,

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{Kb_1c_1 \cdots b_{n-1}c_{n-1}}{Kq_{n-1}^2} < \frac{q_{n-1}^{1-\sigma}}{Kq_{n-1}^2} = \frac{1}{Kq_{n-1}^{1+\sigma}} \rightarrow 0$$

となるから,  $\frac{p_n}{q_n}$  はある実数  $\alpha$  に収束する.  $\alpha > \frac{p_1}{q_1} \geq 1$  である. また,

$$\left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{Kq_{n-1}^{1+\sigma}}$$

が成り立つ. これから  $\alpha$  は無理数であることがわかる. なぜならば, もし,  $\alpha$  が有理数で  $\alpha = k/l$  と表されるとすれば, 既に示した大小関係によって有理数  $p_n/q_n$  はすべて異なっているから, すべての  $n$  について  $|kq_{n-1} - lp_{n-1}|$  は 0 でない整数であり,

$$1 \leq |kq_{n-1} - lp_{n-1}| = lq_{n-1} \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{lq_{n-1}}{Kq_{n-1}^{1+\sigma}} = \frac{l}{Kq_{n-1}^\sigma} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となって矛盾である. 最後に, 数学的帰納法で

$$q_{n-1} > (Kb_1c_1 \cdots b_{n-1}c_{n-1})^{1+\delta}$$

を示そう. まず,  $n = 2$  のときは,  $K < c_1^{-\sigma} b_1^{-1}$  にとれば,  $Kb_1c_1 < c_1^{1-\sigma}$  より,

$$q_1 = c_1 = (c_1^{1-\sigma})^{1+\delta} > (Kb_1c_1)^{1+\delta}.$$

帰納法の仮定より,

$$q_{n-2} > (Kb_1c_1 \cdots b_{n-2}c_{n-2})^{1+\delta}$$

であるから,

$$\begin{aligned} q_{n-1} &= a_{n-1}q_{n-2} + c_{n-1}b_{n-2}q_{n-3} \geq a_{n-1}q_{n-2} \\ &\geq (b_{n-1}c_{n-1})^{1+\delta} q_{n-2} > (Kb_1c_1 \cdots b_{n-2}c_{n-2}b_{n-1}c_{n-1})^{1+\delta}. \end{aligned}$$

□

系 2.6.  $a_0, a_1, a_2, \dots$  が正整数ならば, 無限連分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots}}$$

は 1 より大きな無理数に収束する.

[証明]  $b_k = c_k = 1, a_k \geq 1 = (b_k c_k)^{1+\delta}$  より, 定理 2.5 を

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots$$

について適用すればよい.

□

例 2.7. 無理数  $\alpha$  に対して,  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $a_n = [\alpha_n]$ ,  $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  
 によって, 整数  $a_n$  と無理数  $\alpha_n$  を定める.  $a_n \geq 1$ ,  $\alpha_n > 1$  ( $\forall n \geq 1$ ) である. その  
 とき,

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}$$

である.

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\alpha = \frac{p_n \alpha_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \alpha_{n+1} + q_{n-1}}$$

であり,  $\alpha$  は  $p_n/q_n$  と  $p_{n+1}/q_{n+1}$  の間にある. 定理 2.5 より,  $p_n/q_n$  は収束する. その  
 極限は  $\alpha$  である. よって,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots + \frac{1}{a_n + \cdots}}}}$$

これを無理数  $\alpha$  の連分数展開という.

例 2.8.  $a, b, c$  を正整数で,  $a \geq (bc)^{1+1/2}$  となるものとする. 定理 2.5 において,  
 $a_k = a$ ,  $b_k = b$ ,  $c_k = c$ ,  $\delta = 1/2$  とすれば,

$$a_k \geq (b_k c_k)^{1+\delta}$$

であるから, 定理 2.5 より, ある無理数  $\alpha > 1$  が存在して,

$$\alpha \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 注意 2.3 より,

$$\alpha = \frac{a\alpha + b}{c\alpha}, \quad c\alpha^2 - a\alpha - b = 0.$$

$\alpha > 1$  より,  $\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2c}$  である. 例えば,  $a = b = c = 1$  とすれば,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これは,

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots}}}}$$



を意味する．また， $a = 3, b = 2, c = 1$  とすれば，同様にして，

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{3 + \sqrt{17}}{2} = 3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \dots$$

例 2.9. ある無理数  $\alpha$  が存在して，

$$\alpha \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．実際，定理 2.5 において， $a_k = k, b_k = 1, c_k = 2, \delta = 1/2$  とすれば， $k > 2$  のとき，

$$a_k = k > 2\sqrt{2} = 2^{1+\delta} = (b_k c_k)^{1+\delta}$$

が成り立つ．したがって，定理 2.5 より，ある無理数  $\beta > 1$  が存在して，

$$\beta \sim \prod_{k=3}^{\infty} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ． $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  であるから，注意 2.3 より，

$$\alpha = \frac{4\beta + 1}{4\beta + 2} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2.10.  $\alpha \sim \prod_{k=1}^{\infty} A_k$  であるとき，

$$\frac{1}{\alpha} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{\infty} A_k.$$

### 3 円周率の無理数性の証明

以下， $\coth(x/y)$  と  $\cot(x/y)$  を行列の無限積の極限として表すことを目標とする．これによって， $e$  の有理数乗と  $\pi$  が無理数であることが証明される．

補題 3.1. 2 項係数について，次の関係式が成り立つ．

$$\binom{n-1-k}{k+1} + \binom{n-1-k}{k} = \binom{n-k}{k+1},$$

$$\binom{n-1-k}{k+1}(n+1) + \binom{n-1-k}{k}(k+1) = \binom{n-k}{k+1}(n-k).$$

$m > n$  のとき,  $\sum_{k=m}^n a_k = 0, \prod_{k=m}^n p_k = 1$  であるとする.

補題 3.2.  $a, b$  を複素数で,  $b/a$  は 0 以下の整数ではないとし, 自然数  $n$  に対して,

$$f_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n-k} (ra+b),$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-k-1}{k} \prod_{r=k+2}^{n-k} (ra+b)$$

とおく. ただし,  $f_0 = 1, g_0 = 0, g_1 = 1$  とする. そのとき,  $n \geq 1$  に対して,

$$f_{n+1} = ((n+1)a+b)f_n + f_{n-1},$$

$$g_{n+1} = ((n+1)a+b)g_n + g_{n-1}.$$

[証明]

$$\begin{aligned} ((n+1)a+b)f_n &= \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} ((n+1)a+b) \prod_{r=k+1}^{n-k} (ra+b) \\ &= ((n+1)a+b) \prod_{r=1}^n (ra+b) + \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} ((n+1)a+b) \prod_{r=k+1}^{n-k} (ra+b) \\ &= \prod_{r=1}^{n+1} (ra+b) + \sum_{k'=0}^{[n/2]-1} \binom{n-k'-1}{k'+1} ((n+1)a+b) \prod_{r=k'+2}^{n-k'-1} (ra+b), \\ f_{n-1} &= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n-1-k} (ra+b) \\ &= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} ((k+1)a+b) \prod_{r=k+2}^{n-1-k} (ra+b). \end{aligned}$$

補題 3.1 より,

$$\begin{aligned} &((n+1)a+b)f_n + f_{n-1} \\ &= \prod_{r=1}^{n+1} (ra+b) + \sum_{k=0}^{[n/2]-1} \binom{n-k-1}{k+1} ((n+1)a+b) \prod_{r=k+2}^{n-k-1} (ra+b) \\ &+ \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} ((k+1)a+b) \prod_{r=k+2}^{n-1-k} (ra+b) \\ &= \prod_{r=1}^{n+1} (ra+b) + \sum_{k=0}^{[n/2]-1} \binom{n-k}{k+1} ((n-k)a+b) \prod_{r=k+2}^{n-k-1} (ra+b) \\ &+ \sum_{[n/2]-1 < k \leq [(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n-1-k} (ra+b). \end{aligned}$$

右辺の第2項は

$$\sum_{k=0}^{[n/2]-1} \binom{n-k}{k+1} \prod_{r=k+2}^{n-k} (ra+b) = \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n+1-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n+1-k} (ra+b)$$

とかきなおせる．したがって，

$$\begin{aligned} ((n+1)a+b)f_n + f_{n-1} &= \prod_{r=1}^{n+1} (ra+b) + \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n+1-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n+1-k} (ra+b) \\ &\quad + \sum_{[n/2]-1 < k \leq [(n-1)/2]} \binom{n-1-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n-1-k} (ra+b). \end{aligned}$$

ここで，右辺の第1項は，第2項の和における  $k=0$  の項に相当する．また，右辺の第3項は  $n$  が偶数のときは0であり， $n$  が奇数のときは，1である．これは第2項の和における  $[n/2] < k \leq [(n+1)/2]$  の項に相当する．したがって，

$$((n+1)a+b)f_n + f_{n-1} = \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \binom{n+1-k}{k} \prod_{r=k+1}^{n+1-k} (ra+b) = f_{n+1}.$$

$f_n = f_n(a, b)$  とかけば，定義によって，

$$g_n = g_n(a, b) = f_{n-1}(a, a+b)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= f_n(a, a+b) = (na+a+b)f_{n-1}(a, a+b) + f_{n-2}(a, a+b) \\ &= ((n+1)a+b)g_n(a, b) + g_{n-1}(a, b) = ((n+1)a+b)g_n + g_{n-1}. \end{aligned}$$

□

補題 3.3.  $f_n, g_n$  を補題 3.2 の通りとすれば，

$$\prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ g_n & g_{n-1} \end{pmatrix}.$$

[証明]  $f_0 = 1, f_1 = a+b, g_0 = 0, g_1 = 1$  であるから， $n=1$  のとき補題の主張は成り立っている． $n \geq 1$  として，

$$\prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ g_n & g_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つとすれば，補題 3.2 より，

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ g_n & g_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (n+1)a+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((n+1)a+b)f_n + f_{n-1} & f_n \\ ((n+1)a+b)g_n + g_{n-1} & g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ g_{n+1} & g_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

定理 3.4.  $a, b$  を複素数で,  $a \neq 0$  かつ  $b/a$  は 0 以下の整数ではないとし,

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! a^k (a+b)(2a+b) \cdots (ka+b)},$$

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! a^k (a+b)(2a+b) \cdots (ka+b)((k+1)a+b)}$$

とおく. このとき,  $Q \neq 0$  ならば,

$$\frac{P}{Q} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[証明]  $c = b/a$  とおけば,

$$a^k (a+b)(2a+b) \cdots (ka+b) = a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c).$$

$\Re(c) = c_0 + c_1$ ,  $c_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq c_1 < 1$  とかき,  $k_0 = \max(1, 1 - c_0)$  とおく.  $j \geq k_0$  ならば,

$$|j+c| \geq |\Re(j+c)| \geq k_0 + c_0 + c_1 \geq 1 - c_0 + c_0 + c_1 = 1 + c_1 \geq 1$$

であるから,  $k \geq k_0$  のとき,

$$\begin{aligned} |a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c)| &= |a|^{2k} \left( \prod_{j=1}^{k_0-1} |j+c| \right) \left( \prod_{j=k_0}^k |j+c| \right) \\ &\geq |a|^{2k} \prod_{j=1}^{k_0-1} |j+c| = C |a|^{2k}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! |a^k (a+b)(2a+b) \cdots (ka+b)|} \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k! |a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c)|} + \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k! |a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c)|} \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k! |a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c)|} + \frac{1}{C} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k!} |a|^{-2k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k! |a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c)|} + \frac{1}{C} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |a|^{-2k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k! |a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c)|} + \frac{1}{C} e^{|a|^{-2}} < \infty. \end{aligned}$$

ゆえに， $P$  は絶対収束する． $P = P(a, b)$  とかけば，

$$\begin{aligned} P(a, a+b) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! a^k (a+a+b)(2a+a+b) \cdots (ka+a+b)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a+b}{k! a^k (a+b)(2a+b)(3a+b) \cdots (ka+b)((k+1)a+b)} \\ &= (a+b)Q. \end{aligned}$$

よって， $Q$  も絶対収束する．ここで，補題 3.3 より，

$$\prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ g_n & g_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．一方， $f_n$  の定義を用いれば，

$$\begin{aligned} & \frac{f_n}{(a+b)(2a+b) \cdots (na+b)} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{a^{n-2k} (k+1+c) \cdots (n-k+c)}{a^n (1+c)(2+c) \cdots (n+c)} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-k)(n-k-1) \cdots (n-2k+1)}{k! a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c)(n-k+1+c) \cdots (n+c)} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n^k \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{2k-1}{n}\right)}{k! a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c) n^k \left(1 - \frac{k-1}{n} + \frac{c}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{c}{n}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{u_{n,k}}{k! a^{2k} (1+c)(2+c) \cdots (k+c)}. \end{aligned}$$

ここで，

$$u_{n,k} = u_{n,k}(c) = \frac{\left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{2k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{k-1}{n} + \frac{c}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n} + \frac{c}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{c}{n}\right)}$$

とおいた． $N$  を十分大きな正整数にとって， $n \geq N$  のとき， $|c|/n < \frac{1}{4}$  とする．

$$0 \leq j \leq k-1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 < \frac{n}{2}$$

に対して，

$$0 \leq \frac{j}{n} < \frac{1}{2}, \quad 1 \geq 1 - \frac{j}{n} > \frac{1}{2}, \quad \left|1 - \frac{j}{n} + \frac{c}{n}\right| \geq \left|1 - \frac{j}{n}\right| - \left|\frac{c}{n}\right| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$|u_{n,k}| < \frac{1}{4^{-k}} = 2^{2k}.$$

したがって,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|u_{n,k}|}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|2/a|^{2k}}{k!|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\ & \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{|2/a|^{2k}}{k!|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \frac{1}{C}e^{4/|a|^2} < \infty. \end{aligned}$$

これと  $P$  が絶対収束することから, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $N_1 \geq N$  が存在して,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{|u_{n,k}|}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} < \varepsilon, \\ & \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} < \varepsilon \end{aligned}$$

である. 各  $0 \leq k \leq N_1$  に対して,  $n \rightarrow \infty$  とすれば,  $u_{n,k} \rightarrow 1$  である. よって,  $N_2 \geq N_1$  が存在して,  $n \geq N_2$  ならば,  $|u_{n,k} - 1| < \varepsilon$  ( $0 \leq k \leq N_1$ ) が成り立つ. したがって,  $n \geq N_2$  ならば,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)} - P \right| \\ & \leq \sum_{k=0}^{N_1} \frac{|u_{n,k} - 1|}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \sum_{k=N_1+1}^{[n/2]} \frac{|u_{n,k}|}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\ & \quad + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} \\ & < \varepsilon \sum_{k=0}^{N_1} \frac{1}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|} + \varepsilon + \varepsilon < (S+2)\varepsilon. \end{aligned}$$

ここで,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!|a|^{2k}|(1+c)(2+c)\cdots(k+c)|}$$

とおいた.  $\varepsilon$  は任意だから, これは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{(a+b)(2a+b)\cdots(na+b)} = P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!a^{2k}(1+c)(2+c)\cdots(k+c)}$$

を意味する．同様に，

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n}{(a+b)(2a+b) \cdots (na+b)} \\ &= \frac{1}{a+b} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}(a, a+b)}{(a+a+b)(2a+a+b) \cdots ((n-1)a+a+b)} \\ &= \frac{1}{a+b} P(a, a+b) = Q \end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{g_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f_n}{(a+b)(2a+b) \cdots (na+b)}}{\frac{g_n}{(a+b)(2a+b) \cdots (na+b)}} = \frac{P}{Q}$$

を得る．

□

注意 3.5.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(na+b)g_{n-1}}{g_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{g_{n-1}}{(a+b)(2a+b) \cdots ((n-1)a+b)}}{\frac{g_n}{(a+b)(2a+b) \cdots (na+b)}} = \frac{Q}{Q} = 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{n-1}}{g_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(na+b)g_{n-1}}{g_n} \cdot \frac{1}{na+b} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

したがって， $E = \{0\}$  であり， $(\mathbb{C} \setminus E) \cup \{0, \infty\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  であるから，

$$F_n(z) = \frac{f_n z + f_{n-1}}{g_n z + g_{n-1}}$$

とおくとき，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = \frac{P}{Q}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

が成り立つ．したがって，任意の  $B \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  に対して，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(B(z)) = \frac{P}{Q}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とかくとき， $B(\infty) = \frac{a}{c}$ ， $B(0) = \frac{b}{d}$  であるから，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{af_n + cf_{n-1}}{ag_n + cg_{n-1}} = \frac{P}{Q}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bf_n + df_{n-1}}{bg_n + dg_{n-1}} = \frac{P}{Q}. \quad (1)$$

系 3.6. 複素数  $x, y \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  に対して,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \sim \coth \frac{x}{y},$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & ix \\ ix & 0 \end{pmatrix} \sim \cot \frac{x}{y}.$$

[証明] 定理 3.4 において,  $a = \frac{2y}{x}$ ,  $b = \frac{-y}{x}$  とおけば,  $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$  である. また, このとき,

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(2y/x)^{2k}(1-1/2)(2-1/2)\cdots(k-1/2)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \left(\frac{x}{y}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{x}{y}\right)^{2k} = \cosh \frac{x}{y},$$

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(2y/x)^{2k+1}(1-1/2)(2-1/2)\cdots(k-1/2)(k+1/2)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k! 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)(2k+1)} \left(\frac{x}{y}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{y}\right)^{2k+1}$$

$$= \sinh \frac{x}{y}.$$

よって,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} ka+b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \frac{P}{Q} = \frac{\cosh \frac{x}{y}}{\sinh \frac{x}{y}} = \coth \frac{x}{y}$$

が得られる. 注意 2.2 より, 左辺の各行列を  $x$  倍してもよいから,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \sim \coth \frac{x}{y}$$

を得る. 次に,  $x$  を  $ix$  で置き換えれば,

$$\coth \frac{ix}{y} = \frac{\cosh \frac{ix}{y}}{\sinh \frac{ix}{y}} = \frac{\cos \frac{x}{y}}{i \sin \frac{x}{y}} = \frac{1}{i} \cot \frac{x}{y}$$

であるから,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & ix \\ ix & 0 \end{pmatrix} \sim \coth \frac{ix}{y} = \frac{1}{i} \cot \frac{x}{y}.$$



よって,

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & ix \\ ix & 0 \end{pmatrix} \sim \cot \frac{x}{y}.$$

□

例 3.7. 系 3.6 で,  $x = 1$  とすれば,

$$\coth \frac{1}{y} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (2k-1)y & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

さらに,  $y$  が自然数のときは, この等式は連分数展開

$$\coth \frac{1}{y} = y + \frac{1}{3y + \frac{1}{5y + \frac{1}{7y + \dots}}}$$

を与えている. 特に,  $y = 1$  として,

$$\coth 1 = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7 + \dots}}}$$

定理 3.8. 自然数  $m, n$  に対して,  $e^{m/n}$  は無理数である.

[証明] 定理 2.5 と系 3.6 によって,

$$\coth \frac{m}{n} = \frac{\cosh \frac{m}{n}}{\sinh \frac{m}{n}} = \frac{e^{2m/n} + 1}{e^{2m/n} - 1}$$

は無理数であり, したがって,  $e^{2m/n}$  は無理数である. 特に,  $e^{m/n}$  は無理数である. □

定理 3.9.  $x, y \in \mathbb{C}^*$  に対して,

$$\cot \frac{x}{y} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

[証明] まず,  $J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{J} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とおくとき, 行列の等式

$$J\bar{J} = I, \quad J \begin{pmatrix} a & ib \\ ib & 0 \end{pmatrix} J = - \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{J} \begin{pmatrix} a & ib \\ ib & 0 \end{pmatrix} \bar{J} = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことに注意する． $A_k = \begin{pmatrix} (2k-1)y & ix \\ ix & 0 \end{pmatrix}$  とおけば，

$$\begin{aligned}
J \left( \prod_{k=1}^{2n} A_k \right) J^{-1} &= J \left( \prod_{k=1}^n A_{2k-1} A_{2k} \right) J^{-1} \\
&= \prod_{k=1}^n (J A_{2k-1} A_{2k} J^{-1}) = \prod_{k=1}^n (J A_{2k-1} J J^{-1} A_{2k} J^{-1}) \\
&= \prod_{k=1}^n \left\{ (-1) \begin{pmatrix} (4k-3)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= (-1)^n \prod_{k=1}^n \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^{2k} (4k-3)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{2k+1} (4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= (-1)^n \prod_{k=1}^{2n} \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} (2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned}
J \left( \prod_{k=1}^{2n+1} A_k \right) J &= J^2 J^{-1} A_1 J \left( \prod_{k=1}^n J^{-1} A_{2k} A_{2k+1} J \right) = J A_1 J \left( \prod_{k=1}^n J^{-1} A_{2k} J^{-1} J A_{2k+1} J \right) \\
&= (-1) \begin{pmatrix} y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \left\{ (-1) \begin{pmatrix} -(4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (4k+1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \left\{ \begin{pmatrix} (-1)^{2k+1} (4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{2k+2} (4k+1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{2n+1} \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} (2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

系 3.6 の第 2 式と注意 3.5 から，

$$\cot \frac{x}{y} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} (2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

を得る． □

**定理 3.10.** 自然数  $x, y$  に対して，

$$\cot \frac{x}{y} \sim \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

が成り立つ．したがって，任意の自然数  $x, y$  について， $\tan \frac{x}{y}$  は無理数である．

[証明]  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とおくと, 次の等式が成り立つ.

$$T^2 = I, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ b & 0 \end{pmatrix} S,$$

$$S \begin{pmatrix} -a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} T = -U \begin{pmatrix} a-2b & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = U \begin{pmatrix} a-2b & b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

これらを用いれば,  $A_k = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(2k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$  とおくととき,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n+1} A_k &= A_1 \prod_{k=1}^n (A_{2k} A_{2k+1}) = A_1 S^{-1} S \left\{ \prod_{k=1}^n A_{2k} A_{2k+1} \right\} S^{-1} \\ &= A_1 S^{-1} \left\{ \prod_{k=1}^n S A_{2k} T T A_{2k+1} S^{-1} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \left\{ S \begin{pmatrix} -(4k-1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} T T \begin{pmatrix} (4k+1)y & x \\ x & 0 \end{pmatrix} S^{-1} \right\} S \\ &= \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \left\{ -U \begin{pmatrix} (4k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} (4k+1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} S \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{2n+1} \left\{ U \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} S. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{2n} A_k &= \prod_{k=1}^n (A_{2k-1} A_{2k}) = T T^{-1} \left\{ \prod_{k=1}^n (A_{2k-1} A_{2k}) \right\} T T^{-1} \\ &= T \left\{ \prod_{k=1}^n (T^{-1} A_{2k-1} A_{2k} T) \right\} T^{-1} = T \left\{ \prod_{k=1}^n (T A_{2k-1} S^{-1} S A_{2k} T) \right\} T^{-1} \\ &= T \prod_{k=1}^n \left\{ U \begin{pmatrix} (4k-3)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} (-U) \begin{pmatrix} (4k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} T^{-1} \\ &= (-1)^n T \prod_{k=1}^{2n} \left\{ U \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} T^{-1} \\ &= (-1)^n T U \begin{pmatrix} y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{2n} \left\{ U \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} T^{-1} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{2n} \left\{ U \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} T^{-1}. \end{aligned}$$

以上まとめると,

$$\begin{aligned} \left( \prod_{k=1}^{2n} A_k \right) T &= (-1)^n \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{2n} \left\{ U \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \left( \prod_{k=1}^{2n+1} A_k \right) S^{-1} &= (-1)^n \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{2n+1} \left\{ U \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

定理 3.9 と注意 3.5 から,

$$\cot \frac{x}{y} \sim \begin{pmatrix} y-x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2k-1)y-2x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

これと定理 2.5 によって,  $\tan \frac{x}{y} = 1/\cot(x/y)$  は無理数である.  $\square$

系 3.11. 円周率  $\pi$  は無理数である.

[証明] もし,  $\pi$  が有理数であるとすれば,  $\pi/4$  も有理数であり,  $\pi/4 = x/y$ ,  $x, y$  は互いに素な自然数, とかける. そのとき, 定理 3.10 より,  $\tan \pi/4 = \tan x/y$  は無理数となるが,  $\tan \pi/4 = 1$  であるから, これは矛盾である. ゆえに,  $\pi$  は無理数である.  $\square$

例 3.12. 等式

$$\begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh x \\ \sinh x \end{pmatrix}$$

を用いれば, 系 3.6 より,  $x \in \mathbb{C}^*$  に対して,

$$e^{2x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (\coth x) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 2k-1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

また,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \prod_{k=1}^n \begin{pmatrix} 2k-1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^n \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \right\} \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2k-1) + 2x & 2k-1 \\ 2k-1 & (2k-1) - 2x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1-2x & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

(2) と注意 3.5 より, 任意の  $x \in \mathbb{C}^*$  に対して,

$$e^{2x} \sim \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1-2x & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る. 特に,  $x = 1/2$  とすれば,

$$e \sim \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る. これは,  $e$  の連分数展開が

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}$$

であることを示している ( $k = 1$  の部分から, 最初の 2 がでる).

例 3.13. 定理 3.10 において,  $x = y = 1$  とすれば,

$$\cot 1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \prod_{k=2}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る. よって,

$$\tan 1 \sim \prod_{k=2}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

を得る. これは  $\tan 1$  の連分数展開が

$$\tan 1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \dots}}}}}}}}$$

であることを示している.

## 参考文献

- [1] R. F. C. ウォルターズ, 算数からはじめよう! 数論, 岩波書店, 2011.