線形代数学

平成23年度　後期

中川 仁

目標　線形代数について，基礎線形代数学で学んだベクトルと行列に関する基本事項を基礎として，ベクトル空間の基本的概念，線形写像の固有値等の内容を解説する．

記号　$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ実数全体，複素数全体の集合とする．

目 次

5　行列式

5.1　置換

n を自然数 n とし，n 個の文字 $1, 2, \cdots, n$ からなる集合を

$$M_n = \{1, 2, \cdots, n\}$$

とする．写像

$$\sigma : M_n \longrightarrow M_n$$

が全単射であるとき，σ を M_n の**置換**といい，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と表す．$\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)$ は互いに相異なり $1, 2, \cdots, n$ を並べ替えたものである．したがって，M_n の置換全体の集合を S_n とすると，S_n は $n!$ 個の元からなる．$\sigma(k) = k$ となる部分は省略してかくことにする．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とかく．$\sigma, \tau \in S_n$ のとき，合成写像 $\sigma\tau : M_n \longrightarrow M_n$ も全単射だから，$\sigma\tau \in S_n$ である．$\sigma\tau$ を σ と τ の積という．任意の $\rho, \sigma, \tau \in S_n$ に対して，結合法則

$$(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$$

が成立する．

例 5.1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

これからわかるように，$\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は一般には異なる．

恒等写像 $\epsilon : M_n \longrightarrow M_n$ を**単位置換**という．任意の $\sigma \in S_n$ に対して，

$$\epsilon\sigma = \sigma\epsilon = \sigma$$

が成立する．

$\sigma \in S_n$ に対して，写像 σ の逆写像 $\sigma^{-1} : M_n \longrightarrow M_n$ も全単射だから，$\sigma^{-1} \in S_n$ である．σ^{-1} を σ の**逆置換**という．

$$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \epsilon$$

が成立する．

$i, j \in M_n, i \neq j$ に対して，$\sigma(i) = j, \sigma(j) = i, \sigma(k) = k \ (k \neq i, j)$ によって定まる $\sigma \in S_n$ を $(i\,j)$ とかく．これを**互換**という．

$$\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix} = (i\,j).$$

互換と同様に，$a_1, a_2, \ldots, a_r$ を M_n の相異なる元とするとき，

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_r & a_1 \end{pmatrix} = (a_1\,a_2\ \ldots\ a_{r-1}\,a_r)$$

とかく．このような置換を r-**サイクル**と呼ぶ．任意の置換は互いに共通の数字を含まないようなサイクルの積に表すことができる．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3\,5)(2\,4).$$

さらに，r-サイクルは次のように互換の積に表せる．

$$(a_1\,a_2\ \ldots\ a_{r-1}\,a_r) = (a_1\,a_2)(a_2\,a_3)\cdots(a_{r-2}\,a_{r-1})(a_{r-1}\,a_r).$$

例えば，$(1\,3\,5) = (1\,3)(3\,5)$ である．以上によって，次の命題を得る．

命題 5.1. 任意の置換は互換の積として表すことができる．

命題 5.2. S_n の任意の元は，互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せる．

[証明]　n に関する帰納法で証明する．$n = 2$ のときは明らかである．$n > 2$ として，S_{n-1} の任意の元は，互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-2\,n-1)$ の積として表せるとする．命題 5.1 より，任意の元は互換の積であるから，任意の互換 $(a\,b) \in S_n$ が互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せることを示せばよい．$1 \leq a < b \leq n-1$ ならば，$(a\,b) \in S_{n-1}$ であるから，帰納法の仮定によって，$(a\,b)$ は互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せる．$b = n$ のとき，互換 $(a\,n)$ は $(a\,n) = (a\,n-1)(n-1\,n)(a\,n-1)$ とかけ，$(a\,n-1)$ は $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-2\,n-1)$ の積としてかけるから，互換 $(a\,n)$ は互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せる．よって，$(a\,n)$ も互換 $(1\,2), (2\,3), \cdots, (n-1\,n)$ の積として表せる．　$\square$

例 5.2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表す.

$$\sigma_1 = (1\,2\,5)(3\,4) = (1\,2)(2\,5)(3\,4).$$

変数 $x_1, \cdots, x_n$ の多項式 P と置換 $\sigma \in S_n$ に対して，変数 $x_1, \cdots, x_n$ を，それぞれ $x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}$ で置き換えて得られる多項式を σP で表す．$\sigma, \tau \in S_n$ とすると，

$$\sigma(\tau x_i) = \sigma x_{\tau(i)} = x_{\sigma(\tau(i))} = (\sigma\tau)x_i$$

であるから，一般の多項式 P についても，

$$\sigma(\tau P) = (\sigma\tau)P$$

が成り立つ．今，Δ_n を次のような多項式とする．

$$\begin{array}{rcl} \Delta_n & = & \prod_{i<j}(x_i - x_j) \\ & = & \begin{array}{cccc} (x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ & \times(x_2 - x_3) & & (x_2 - x_n) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \times(x_{n-1} - x_n). \end{array} \end{array}$$

$\Delta_2 = x_1 - x_2$, $\Delta_3 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ である．

$$\begin{array}{rcl} (1\,2)\Delta_3 & = & (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = -\Delta_3, \\ (2\,3)\Delta_3 & = & (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) = -\Delta_3, \end{array}$$

であり，$(1\,3) = (1\,2)(2\,3)(1\,2)$ であるから，$(1\,3)\Delta_3 = (1\,2)(2\,3)(1\,2)\Delta_3 = (-1)^3\Delta_3 = -\Delta_3$ がわかる．一般に，Δ_n は，互換 $(i\,j)$ に対して，

$$(i\,j)\Delta_n = -\Delta_n$$

を満たすことが n に関する帰納法によって証明される．

命題 5.3. 1 つの置換を互換の積で表すとき，偶数個の互換の積であるか奇数個の互換の積であるかは，与えられた置換によって定まる．

[証明]　σ を与えられた置換とする．

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s = \tau_1\tau_2\cdots\tau_t$$

σ_i, τ_j は互換，と書けたとする．このとき，

$$\begin{array}{rcl} \sigma\Delta & = & (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{s-1})(\sigma_s\Delta) \\ & = & -(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{s-1})\Delta \\ & = & \cdots\cdots = (-1)^s\Delta. \end{array}$$

同様に,

$$\begin{aligned} \tau\Delta &= (\tau_1\tau_2\cdots\tau_{t-1})(\tau_t\Delta) \\ &= -(\tau_1\tau_2\cdots\tau_{t-1})\Delta \\ &= \cdots\cdots = (-1)^t\Delta. \end{aligned}$$

したがって，$(-1)^s = (-1)^t$ となり，s, t はともに偶数であるか，またはともに奇数である． □

偶数個の互換の積として表せる置換を**偶置換**といい，奇数個の互換の積として表せる置換を**奇置換**という．単位置換は偶置換とする．置換 σ に対して，その**符号** $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma\text{が偶置換のとき} \\ -1, & \sigma\text{が奇置換のとき} \end{cases}$$

と定義する．

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\sigma\tau) &= \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau), \\ \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) &= \mathrm{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

が成り立つ．

補題 5.4. $S_n = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_N\}$ $(N = n!)$ とするとき，

(1) $\tau \in S_n$ ならば，$\{\sigma_1\tau, \cdots, \sigma_N\tau\} = S_n$.

(2) $\{\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_N^{-1}\} = S_n$.

[証明]　$\sigma_i\tau = \sigma_j\tau$ とすると，

$$(\sigma_i\tau)\tau^{-1} = (\sigma_j\tau)\tau^{-1},\ \ \sigma_i\epsilon = \sigma_j\epsilon,\ \ \sigma_i = \sigma_j$$

したがって，$i = j$ となる．よって，$\sigma_1\tau, \cdots, \sigma_N\tau$ は相異なるから，これらのなす集合は S_n 全体と一致する．次に，$\sigma_i^{-1} = \sigma_j^{-1}$ とすると，

$$\sigma_j\sigma_i^{-1} = \sigma_j\sigma_j^{-1} = \epsilon,$$

$$(\sigma_j\sigma_i^{-1})\sigma_i = \epsilon\sigma_i = \sigma_i,$$

$$\sigma_j = \sigma_j\epsilon = \sigma_j(\sigma_i^{-1}\sigma_i) = \sigma_i.$$

したがって，$i = j$ となる．よって，$\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_N^{-1}$ は相異なるから，これらのなす集合は S_n 全体と一致する． □

5.2　行列式の定義

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

に対して，和

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

を A の**行列式**とよび，

$$|A|,\ \det A,\ D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n),\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とかく.

例 5.3. $S_2 = \{\epsilon, (1\,2)\}$，$\mathrm{sgn}(\epsilon) = 1$，$\mathrm{sgn}((1\,2)) = -1$ だから，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

である.

レポート問題 1.

$$S_3 = \left\{ 1, (1\,2), (1\,3), (2\,3), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

について，各元の符号を求めよ．さらに，3 次行列 $A = (a_{ij})$ の行列式をその成分の多項式として表わせ.

5.3　行列式の基本的性質

行列式の性質の中で，記号 $D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を用いて説明できるものから述べる.

命題 5.5. 行列式 $D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ は次の性質を持つ:

(1) $D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}'_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
$\qquad + D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n).$

(2) $D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,c\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=cD(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$.

(3) $D(\boldsymbol{a}_{\tau(1)},\cdots,\boldsymbol{a}_{\tau(n)})=\mathrm{sgn}(\tau)D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n),\quad \tau\in S_n$.

系 5.6. ある $j\neq k$ に対して，$\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_k$ ならば，$D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0$ である．

系 5.7. $c\in\mathbb{R}$, $j\neq k$ ならば,

$$D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j+c\boldsymbol{a}_k,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n).$$

[証明]

$$\begin{aligned}
&D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j+\boldsymbol{a}'_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots(a_{\sigma(j)j}+a'_{\sigma(j)j})\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(j)j}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&\quad +\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a'_{\sigma(j)j}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&= D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}'_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,c\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots(ca_{\sigma(j)j})\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&= c\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(j)j}\cdots a_{\sigma(n)n}\\
&= cD(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_n).
\end{aligned}$$

$\tau\in S_n$ に対して，$\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{a}_{\tau(j)}$，$j=1,\ldots,n$ とおく．$b_{ij}=a_{i\tau(j)}$ である．補題 5.4 の (1) を用いれば,

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_{\tau(1)},\cdots,\boldsymbol{a}_{\tau(n)}) &= D(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(n)n}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots a_{\sigma(n)\tau(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i)\tau(i)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma\tau^{-1}(j)j}\quad(\sigma\tau^{-1}=\sigma')\\
&= \sum_{\sigma'\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma'\tau)a_{\sigma'(1)1}\cdots a_{\sigma'(n)n}\\
&= \mathrm{sgn}(\tau)D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n).
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{a}_k$ ならば，$\tau=(j\,k)$ として，(3) を適用すると，$D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=0$ を得る．(1) と系 1 から，系 2 がでる． □

命題 5.8. 単位行列 $I = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ の行列式は 1 である.

[証明]

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \delta_{\sigma(1)1} \cdots \delta_{\sigma(n)n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる. □

命題 5.9.

$$|{}^t A| = |A|.$$

[証明] ${}^t A = (a'_{ij})$ とおくと, $a'_{ij} = a_{ji}$ であるから,

$$\begin{aligned} |{}^t A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a'_{\sigma(1)1} \cdots a'_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

かけ算の順序を入れ換えれば,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

だから, 補題 5.4 より,

$$\begin{aligned} |{}^t A| &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\sigma' \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma') a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n)n} \\ &= |A| \end{aligned}$$

となる. □

レポート問題 2. 行列式の性質を用いて計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

注意 5.1. 命題 5.5 と命題 5.9 より, 行についても命題 5.5 とと同様なことが成り立つ.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

とするとき，

$$|A| = |{}^tA| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (A \text{ の第 1 行と第 2 行を交換した行列式})$$

5.4　行列式の展開

n 次の行列式は $n-1$ 次の行列式の和として表せることを示そう．n 次行列 $A = (a_{ij})$ から，その第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる $n-1$ 次行列を A_{ij} とかく．このとき，

定理 5.10.

$$(1) \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

$$(2) \quad |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

$n = 4$ とする．$i = 1, j = 4$ とする．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{a}_4 = a_{14}\boldsymbol{e}_1 + a_{24}\boldsymbol{e}_2 + a_{34}\boldsymbol{e}_3 + a_{44}\boldsymbol{e}_4$ であるから，

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4) &= a_{14} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1) + a_{24} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2) \\ &\quad + a_{34} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_3) + a_{44} D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_4). \end{aligned}$$

ここで，第 4 項について，$a'_{i4} = 0,\ i = 1, 2, 3,\ a'_{44} = 1$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_4) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a'_{\sigma(4)4} \\
&= \sum_{\sigma \in S_4, \sigma(4)=4} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\
&= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A_{44}|.
\end{aligned}
$$

第 3 項についても，上の結果から

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_3) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -|A_{34}|.
\end{aligned}
$$

第２項についても，同様に，

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = |A_{24}|.
\end{aligned}
$$

第１項についても，同様に，

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -|A_{14}|.
\end{aligned}
$$

以上によって，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^5|A_{14}| + (-1)^6|A_{24}| + (-1)^7|A_{34}| + (-1)^8|A_{44}|$$

が示された．一般の場合も同様である．

定理 5.11.

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ik}|A_{ij}| = \delta_{kj}|A|.$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}|A_{ij}| = \delta_{ki}|A|.$$

［証明］ (1) $k=j$ の場合が前の定理である．$k \neq j$ の場合，右辺は 0 である．左辺は，$|A|$ において，第 j 列を第 k 列で置き換えて得られる行列式

$$D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overbrace{\boldsymbol{a}_k}^{j}, \cdots, \overbrace{\boldsymbol{a}_k}^{k}, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

の第 j 列に関する展開だから，系 5.6 より 0 である．(2) は命題 5.9 と (1) からでる． □

例 5.4. 行列式の展開を用いて計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

例 5.5. 行列式の性質を用いて計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

レポート問題 3. 行列式の展開を用いて計算せよ．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

5.5　クラメールの公式

A が n 次正則行列のとき，任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は唯一つの解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ を持った．この $\boldsymbol{x}$ を行列式を用いて表す．

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n),$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

定理 5.12. クラメールの公式　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ならば，

$$D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = x_j|A|$$

となる．特に，$|A| \neq 0$ ならば，

$$x_j = \frac{1}{|A|} D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \ \ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

[証明]　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ならば，

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

である．このとき，

$$\begin{aligned} & D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\ = & \sum_{k=1}^{n} x_k D(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \\ = & x_j|A| \end{aligned}$$

となる．　□

5.6　積の行列式

定理 5.13. A, B を n 次行列とすると，$|AB| = |A||B|$ が成り立つ．

[証明]　$A=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$, $B=(b_{ij})$ とすると，

$$AB=(\sum_{k_1=1}^{n} b_{k_1 1}\boldsymbol{a}_{k_1},\cdots,\sum_{k_n=1}^{n} b_{k_n n}\boldsymbol{a}_{k_n}).$$

したがって，

$$\begin{aligned}
|AB| &= \sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{n} b_{k_1 1}\cdots b_{k_n n} D(\boldsymbol{a}_{k_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{k_n}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(n)n} D(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{a}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1}\cdots b_{\sigma(n)n} D(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n) \\
&= |A||B|
\end{aligned}$$

となる．□

定理 5.14. A を n 次行列とするとき，

$$A \text{ が正則} \Longleftrightarrow |A|\neq 0$$

である．また，$|A|\neq 0$ であるとき，A の逆行列 A^{-1} は次の公式で与えられる．

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}{}^t(\alpha_{ij}).$$

ここで，$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ である．α_{ij} を A における a_{ij} の**余因子**という．

[証明]　A が正則であるとする．このとき，

$$AA^{-1}=I.$$

したがって，

$$|A||A^{-1}|=1.$$

ゆえに，$|A|\neq 0$. 逆に，$|A|\neq 0$ ならば，定理 5.11 より，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\alpha_{ij}}{|A|}=\delta_{jk},\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\frac{\alpha_{ij}}{|A|}=\delta_{ki}.$$

よって，

$$B=\frac{1}{|A|}{}^t(\alpha_{ij})$$

とおけば，

$$BA=I,\ AB=I.$$

すなわち，$B=A^{-1}$ である．□

6　ベクトル空間

6.1　部分空間

定義 6.1. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が次の条件 (i), (ii) を満たすとき $\mathbb{R}^n$ の**部分空間**であるという．

(i) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ に対して，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$;

(ii) $\forall \boldsymbol{x} \in W$, $\forall k \in \mathbb{R}$ に対して，$k\boldsymbol{x} \in W$.

例 6.1. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

は部分空間である．

練習問題 6.1. $\mathbb{R}^4$ の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

は部分空間である．

6.2　1 次独立と 1 次従属

定義 6.2. $\mathbb{R}^n$ におけるベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ について，

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$$

が成り立つのは，$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$ の場合に限るとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は **1 次独立**であるという．そうでないとき，**1 次従属**であるという．

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は 1 次独立であることは，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{r-1}$ が 1 次独立であり，$\boldsymbol{v}_r$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{r-1}$ の 1 次結合として表せないことと同値である．

例 6.2. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立．$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次従属．

練習問題 6.2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立であることを証明せよ．

6.3　基底

$\mathbb{R}^n$ におけるベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ の 1 次結合の全体を W とすると，W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は部分空間 W を**生成**するという．さらに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を W の**基底**という．

例 6.3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は例 6.1 の部分空間 W の基底である．

命題 6.1. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W が r 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ によって生成されるとする．このとき，$s > r$ ならば，s 個の W のベクトルは 1 次従属になる．

[証明]　$s = r+1$ の場合に証明すればよい．r に関する帰納法によって示す．$r = 1$ のときは，$W = \{k\boldsymbol{v}_1; k \in \mathbb{R}\}$ であるから，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W$ は，$\boldsymbol{x}_1 = a_1\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2 = a_2\boldsymbol{v}_1$ とかける．$a_1 = a_2 = 0$ ならば，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$．$a_1 \neq 0$ または $a_2 \neq 0$ ならば，$a_2\boldsymbol{x}_1 - a_1\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$.

$r = p - 1$ のとき，補題が正しいとする．$r = p$ のとき，W_1 を $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{p-1}$ によって生成される W の部分空間とする．$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{p+1} \in W$ とすると，

$$\boldsymbol{x}_i = a_{i1}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{ip}\boldsymbol{v}_p,\ \ (i = 1, \cdots, p+1).$$

もし，$a_{1p} = a_{2p} = \cdots = a_{p+1p} = 0$ とすると，W_1 のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{p+1}$ は帰納法の仮定から 1 次従属である．次に，$a_{1p}, a_{2p}, \cdots, a_{p+1p}$ のどれかが 0 でないとする．$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{p+1}$ の番号をいれかえて，$a_{1p} \neq 0$ としてよい．

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_i - (a_{ip}/a_{1p})\boldsymbol{x}_1,\ \ (i = 2, \cdots, p+1)$$

とおけば，帰納法の仮定から p 個の W_1 のベクトル $\boldsymbol{y}_i$, $(i = 2, \cdots, p+1)$ は 1 次従属である．よって，少なくとも 1 つは 0 でない $\mathbb{R}$ の元 k_i, $i = 2, \cdots, p+1$ が存在して，

$$k_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + k_{p+1}\boldsymbol{y}_{p+1} = \boldsymbol{0}.$$

$$k_1 = -(k_2a_{2p} + \cdots + k_{p+1}a_{p+1p})/a_{1p}$$

とおけば，

$$k_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + k_{p+1}\boldsymbol{x}_{p+1} = \boldsymbol{0}.$$

□

系 6.2. $\mathbb{R}^n$ の $n+1$ 個のベクトルは 1 次従属である．

系 6.3. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_s$ がともに $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W の基底ならば，$r = s$ である．

6.4　次元

定義 6.3. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $W \neq \{\mathbf{0}\}$ の中で 1 次独立なベクトルの最大個数を，W の**次元**といい，$\dim W$ とかく．すなわち，W の中に r 個の 1 次独立なベクトルが存在し，r 個より多くのベクトルは必ず 1 次従属になるとき，W の次元は r 次元であるという．系 6.2 より，$1 \leq \dim W \leq n$ である．$\dim W = r$ ならば，<u>W は r 個のベクトルからなる基底を持つ</u>．$\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ とおく．

[証明]　$\dim W = r$ ならば，W は r 個の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を含む．そのとき，W の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ をとると，$r+1$ 個の W のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r,\ \boldsymbol{v}$ は 1 次従属であるから，$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ の 1 次結合である．したがって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は W を生成し，1 次独立であるから，W の基底である．　□

定理 6.4. $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W が m 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ によって生成されるとする．このとき，これらの m 個のベクトルのうちの 1 次独立なベクトルの最大個数が W の次元である．

[証明]　$\boldsymbol{v}_i$ がすべて $\mathbf{0}$ ならば，$W = \{\mathbf{0}\}$ だから $\dim W = 0$. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ の中に含まれる 1 次独立なベクトルの最大個数が r であるとする．このとき番号をつけかえて，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ が 1 次独立であるとしてよい．$r+1 \leq j \leq m$ とするとき $r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_j$ は 1 次従属だから，

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r + k_j\boldsymbol{v}_j = 0$$

となる．ここで，$k_1, \cdots, k_r, k_j$ の中には少なくとも 1 つ 0 でないものがある．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ が 1 次独立であることから，$k_j \neq 0$ がわかる．したがって，

$$\boldsymbol{v}_j = -k_j^{-1}(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r) \quad (r+1 \leq j \leq m).$$

これから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は W を生成することがわかる．また，これらは 1 次独立である．命題 6.1 より，r 個より多くのベクトルは必ず 1 次従属になるから，$\dim W = r$ である．　□

V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間で，$p = \dim V$, $q = \dim W$ とする．このとき，$V \subset W$ ならば，次元の定義から明らかに，$p \leq q$ である．さらに

$$V \subset W,\ p = q \Longrightarrow V = W$$

が成り立つ．実際，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ を V の基底とすると，$p = q = \dim W$ であるから，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p$ は W の基底でもある．

定理 6.5. W を $\mathbb{R}^n$ の r 次元部分空間とし，s 個の W のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s$ が 1 次独立であるとする．このとき，$s < r$ ならば，W に属する $r-s$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を選んで，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ が W の基底になるようにできる．

[証明]　V_1 を $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s$ によって生成される W の部分空間とする．このとき，定理 6.4 より，$\dim V_1 = s$ である．$s < r$ ならば，$V_1 \subsetneq W$ である．したがって，$\boldsymbol{v}_{s+1} \in W$, $\boldsymbol{v}_{s+1} \notin V_1$ となるベクトル $\boldsymbol{v}_{s+1}$ が存在する．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_{s+1}$ は 1 次独立である．V_2 を $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_{s+1}$ によって生成される W の部分空間とする．$\dim V_2 = s+1$ である．もし，$s+1 = r$ ならば，$V_2 = W$ であり，したがって，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_{s+1}$ は W の基底になる．$s+1 < r$ ならば，上の議論を繰り返せばよい． □

例 6.4. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_1 + x_2 = 0 \right\}$ とする．このとき，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば，これらは V の基底になる．よって，$\dim V = 3$ である．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を含むような $\mathbb{R}^4$ の基底として，$\boldsymbol{v}_4$ を V に属さないようにとる，例えば，$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にとれば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の基底である．

レポート問題 4. $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_1 + x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

について，次の (1), (2) に答えよ．

(1)　V の基底と次元を求めよ．

(2)　(1) で求めた V の基底を含むような $\mathbb{R}^4$ の基底を求めよ．

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が V の基底としてとれた．よって，$\dim V = 2$ である．$\boldsymbol{v}_3 \notin V$ として $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ によって生成される部分空

間を V_1 とする．

$$V_1' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

とおけば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in V_1'$ であり，したがって，$V_1 \subset V_1'$ である．$\dim V_1 = \dim V_1' = 3$ であるから，$V_1 = V_1'$ である．$\boldsymbol{v}_4 \notin V_1$ として，$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとれば，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の基底である．

7　線形写像

7.1　線形写像と行列

定義 7.1. 写像 $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \\ f(k\boldsymbol{x}) &= kf(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

を満たすとき，f は**線形写像**であるという．$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である．

$n \times m$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

に対して，写像 $L_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$L_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$$

によって定義すれば，L_A は線形写像である．$\mathbb{R}^m$ の基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^m$ の基底であった．$\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ を $\mathbb{R}^m$ の**標準基底**と呼ぶ．線形写像 $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ に対して，

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, m$$

とおく．このとき，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_m\boldsymbol{e}_m$$

だから，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_m f(\boldsymbol{e}_m) \\ &= x_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + x_m \boldsymbol{a}_m \\ &= A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

したがって，$f = L_A$ となる．

7.2 線形写像の合成

命題 7.1. $A = (a_{ij})$ を n 行 m 列の行列，$B = (b_{jk})$ を m 行 l 列の行列とすると，

$$L_A L_B = L_{AB}$$

が成立する．

[証明] 合成写像 $L_A L_B : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^n$ も線形写像であることは容易にわかる．したがって，ある n 行 l 列の行列 $C = (c_{ik})$ が存在して，$L_A L_B = L_C$ とかける．$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_l$ を $\mathbb{R}^l$ の標準基底とすると，

$$L_B(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{b}_k,$$

$$\begin{aligned} L_A L_B(\boldsymbol{e}_k) &= L_A(\boldsymbol{b}_k) \\ &= A\boldsymbol{b}_k \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} b_{jk} \\ \sum_{j=1}^m a_{2j} b_{jk} \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} b_{jk} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

一方，$L_C(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{c}_k$ だから，

$$\boldsymbol{c}_k = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} b_{jk} \\ \sum_{j=1}^m a_{2j} b_{jk} \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} b_{jk} \end{pmatrix}.$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} = AB \text{ の } (i,k) - \text{成分}$$

したがって，$C = AB$ である． □

補題 7.2. f を集合 X から集合 Y への写像，g を集合 Y から集合 Z への写像，h を集合 Z から集合 W への写像とする．そのとき，$(hg)f = h(gf)$ が成り立つ．

補題7.2より，$(L_A L_B)L_C = L_A(L_B L_C)$である．したがって，命題7.1よりただちに，次を得る．

系 7.3. A, B, Cをそれぞれ，$n \times m$，$m \times l$，$l \times k$型の行列とすると，

$$(AB)C = A(BC)$$

が成立する．

7.3　像空間，核空間

定義 7.2. 線形写像$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$に対して，

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\}, \\ \ker f &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\} \end{aligned}$$

とおく．fの線形性から，$\operatorname{Im} f$は$\mathbb{R}^n$の部分ベクトル空間である．これをfの**像空間**という．また，$\ker f$は$\mathbb{R}^m$の部分ベクトル空間である．これをfの**核空間**という．

$$\begin{aligned} f \text{ が全射} &\iff \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n, \\ f \text{ が単射} &\iff \ker f = \{\boldsymbol{0}\}. \end{aligned}$$

[証明]　$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$であるから，fが単射とすれば，$\ker f = \{\boldsymbol{0}\}$である．逆に，$\ker f = \{\boldsymbol{0}\}$とする．$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$とすれば，

$$f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}.$$

したがって，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \ker f = \{\boldsymbol{0}\}$である．すなわち，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$．ゆえに，$f$は単射である．　□

定理 7.4. 線形写像$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$に対して，

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = m$$

が成立する．

[証明]　$\dim \ker f = s \leq m$とおく．$\ker f$の基底を$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s$とする．定理6.5より，$r = m - s$個のベクトル$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$をとって，

$$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s,\ \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$$

が$\mathbb{R}^m$の基底であるようにできる．任意の$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$は，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_s\boldsymbol{u}_s + y_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + y_r\boldsymbol{v}_r$$

とかけるから，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= x_1 f(\boldsymbol{u}_1) + \ldots + x_s f(\boldsymbol{u}_s) + y_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + y_r f(\boldsymbol{v}_r) \\ &= y_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + y_r f(\boldsymbol{v}_r). \end{aligned}$$

したがって，$\mathrm{Im}\, f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_r)$ で生成される．$k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}$ に対して，

$$k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + k_r f(\boldsymbol{v}_r) = \mathbf{0}$$

とすると，

$$f(k_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + k_r \boldsymbol{v}_r) = \mathbf{0}.$$

すなわち，

$$k_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + k_r \boldsymbol{v}_r \in \ker\, f.$$

したがって，

$$k_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + k_r \boldsymbol{v}_r = h_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + h_s \boldsymbol{u}_s$$

とかけるが，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_s$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が $\mathbb{R}^m$ の基底であることから，$k_1 = \ldots = k_r = h_1 = \ldots = h_s = 0$. したがって，$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_s)$ は 1 次独立である．これで，$\dim \mathrm{Im}\, f = r = m - s$ が示された． □

系 7.5. f が全単射ならば，$m = n$ である．

[証明]　$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^n$, $\ker f = \{0\}$ であるから，$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f = n + 0 = m$, $n = m$. □

系 7.6. $m > n$ ならば，f は単射ではない．

[証明]　$\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R}^n$ より，$\dim \mathrm{Im}\, f \leq n$ である．したがって，$m = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f \leq n + \dim \ker f$, $\dim \ker f \geq m - n > 0$. すなわち，$\ker f \supsetneq \{0\}$. ゆえに，$f$ は単射でない． □

系 7.7. $m < n$ ならば，f は全射ではない．

[証明]　$\dim \ker f \geq 0$ だから，$m = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f \geq \dim \mathrm{Im}\, f$, したがって，$\dim \mathrm{Im}\, f \leq m < n$, $\mathrm{Im}\, f \subsetneq \mathbb{R}^n$. ゆえに，$f$ は全射ではない． □

系 7.8. $m = n$ のとき，f が単射 $\Longleftrightarrow$ f が全射．

[証明]　f が単射だとすれば，$\ker f = \{0\}$, $\dim \ker f = 0$, $n = m = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f = \dim \mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^n$. ゆえに，$f$ は全射である．f が全射だとすれば，$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^n$, $\dim \mathrm{Im}\, f = n$. よって，$m = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \ker f = n + \dim \ker f$, $\dim \ker f = m - n = 0$. $\ker f = \{0\}$. ゆえに f は単射である． □

例 7.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ について，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ $\ker L_A$ とすると，

$$\begin{aligned} &2x - y + z = 0, \quad x + 4y = 0, \\ &x = -4y, \quad z = 9y. \end{aligned}$$

したがって，

$$\ker L_A = \left\{ k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\}.$$

ゆえに，$\dim \ker L_A = 1$．したがって，$\dim \mathrm{Im}\, L_A = 2$．$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば，

$$A \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，

$$-4\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}.$$

よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属である．$\dim \mathrm{Im}\, L_A = 2$.

レポート問題 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，線形写像 $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ について，$\dim \ker L_A$，$\dim \mathrm{Im}\, L_A$ を求めよ．さらに，$\mathrm{Im}\, L_A$，$\ker L_A$ の基底を求めよ．

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker L_A$ とすれば，

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0, \\ x - y + 3z &= 0, \\ 3x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

$y = -2x$, $x + 2x + 3z = 0$, $z = -x$, $3x - 2x - x = 0$. ゆえに，

$$\ker L_A = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\}.$$

したがって，$\ker L_A$ の基底として，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim\ker\, L_A \;=\; 1$ である．

$\dim \mathrm{Im}\, L_A \;=\; 3-1 \;=\; 2$．$\mathrm{Im}\, L_A$ はベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成されるが,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成され，これが基底である．

補題 7.9. f を集合 X から集合 Y への写像，g を集合 Y から集合 X への写像とする．そのとき，$gf = 1_X$，1_X は X の恒等写像，ならば，f は単射であり，g は全射である．

［証明］　$f(x) = f(x')$ とすれば，$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$，よって，$f$ は単射である．任意の $x \in X$ に対して，$y = f(x) \in Y$ とおけば，$g(y) = g(f(x)) = x$, よって，g は全射である．　□

命題 7.10. n 次行列 A に対して次の 3 つの条件は互いに同値である．

(i) A は正則である．

(ii) $BA = I_n$ となる n 次行列 B が存在する．

(iii) $AB = I_n$ となる n 次行列 B が存在する．

［証明］　(ii) または (iii) を仮定すると，補題 7.9 と系 7.8 より，$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は全単射になる．この逆写像も明らかに線形写像であるから，ある n 次行列 C が存在して，$L_A^{-1} = L_C$ となる．このとき，命題 7.1 より $AC = CA = I_n$．すなわち，A は正則である．また，$B = C$ であることもわかる．(i)$\Rightarrow$(ii), (i)$\Rightarrow$ (iii) は明らか．　□

命題 7.11. A を n 次行列とするとき，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が非自明解 ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となる解 $\boldsymbol{x}$) を持つための必要十分条件は,

$$|A| = 0$$

である．

[証明]　$|A| \neq 0$ ならば，A は正則であるから，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ならば，

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

を得る．$|A| = 0$ ならば，A は正則でない．したがって，線形写像 $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は全単射ではない．系 7.8 より，L_A は単射でない．よって，$\ker L_A \supsetneqq \{\mathbf{0}\}$ である．すなわち，$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ で，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を満たすものが存在する．　□

7.4　階数

定義 7.3. n 行 m 列の行列 A に対して，線型写像 $L_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ の像空間の次元を行列 A の**階数**といい，$\operatorname{rank} A$ とかく．すなわち，

$$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} L_A.$$

$A = (a_{ij})$ を n 行 m 列の行列とし，$\boldsymbol{e}_j$, $(1 \leq j \leq m)$ を $\mathbb{R}^m$ の標準基底，$\boldsymbol{a}_j$, $(1 \leq j \leq m)$ を A の列ベクトルとする．このとき，

$$L_A(\boldsymbol{e}_j) = A\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_j, \quad 1 \leq j \leq m$$

であるから，$\operatorname{Im} L_A$ は $\boldsymbol{a}_j$, $1 \leq j \leq m$ で生成される．したがって，

$$\operatorname{rank} A = \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \text{ の中で 1 次独立なものの最大個数.}$$

命題 7.12. A を n 行 m 列の行列，P を n 次正則行列，Q を m 次正則行列とする．そのとき，

$$\operatorname{rank} PA = \operatorname{rank} AQ = \operatorname{rank} A$$

が成り立つ．特に，基本変形によって行列の階数は変わらない．

[証明]　$L_Q : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ は全単射であるから，$\mathrm{Im} L_Q = \mathbb{R}^m$ である．$L_{AQ} = L_A L_Q$ であるから，$\operatorname{Im} L_{AQ} = \mathrm{Im} L_A$ である．よって，$\operatorname{rank} AQ = \operatorname{rank} A$ である．また，$L_{PA} = L_P L_A$ かつ $L_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は全単射であるから，$\ker L_{PA} = \ker L_A$ である．また，定理 7.4 より，

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} L_{PA} + \dim \ker L_{PA} &= m, \\ \dim \operatorname{Im} L_A + \dim \ker L_A &= m \end{aligned}$$

であるから，$\dim \operatorname{Im} L_{PA} = \dim \operatorname{Im} L_A$ を得る．よって，$\operatorname{rank} PA = \operatorname{rank} A$ である．基礎線形代数学の命題 4.2 より，A に基本変形を繰り返して，階段行列 A' が得られたとすると，$A' = PA$, P は m 次正則行列，とかける．よって，上に示したことから，$\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A$ を得る．　□

命題 7.13. $A=(a_{ij})$ を次のような n 行 m 列の階段行列とする．$j_1<j_2<\ldots<j_s$, $a_{ij}=0$, $j<j_i$, $a_{ij_i}\neq 0$, $1\leq i\leq s$, $a_{ij}=0$, $s<i\leq n$, $j=1,\ldots,m$. そのとき，$\mathrm{rank}\,A=s$ である．

[証明]　A の第 j 列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする．そのとき，

$$\boldsymbol{a}_{j_1}=\begin{pmatrix} a_{1j_1}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_{j_2}=\begin{pmatrix} *\\ a_{2j_2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \ldots\ ,\boldsymbol{a}_{j_s}=\begin{pmatrix} *\\ *\\ *\\ a_{sj_s}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

であるから，明らかに $\boldsymbol{a}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{j_s}$ は1次独立である．よって，$\mathrm{rank}\,A\geq s$ である．また，すべての列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ の第 i-成分は $s<i\leq n$ に対して，0であるから，線形写像 $L_A:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ の像空間 $\mathrm{Im}L_A$ は $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_s$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の s 次元部分空間に含まれる．したがって，$\mathrm{rank}\,A=\dim\mathrm{Im}\,L_A\leq s$ である．以上によって，$\mathrm{rank}\,A=s$ が示された． □

例 7.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}$ の階数を求める．$\boldsymbol{a}_j$, $(1\leq j\leq 3)$ を A の列ベクトルとする．

$$\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_3$$

だから，$\mathrm{rank}\,A=2$. これは基本変形を用いて次のように階数を求めることもできる．

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ 0 & -5 & -5\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}\\ &\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=A'.\end{aligned}$$

命題7.13より，$\mathrm{rank}\,A'=2$ であり，命題7.12より，$\mathrm{rank}\,A=2$ を得る．

命題 7.14. $A=(a_{ij})$ を n 行 m 列の行列とすると，$\mathrm{rank}\,{}^tA=\mathrm{rank}\,A$.

[証明]　$\operatorname{rank} A = s$, $\operatorname{rank} {}^t\!A = r$ とする．A に基本変形を繰り返して階段行列 A' を得たとする．命題 7.12 より，$\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A = s$ である．命題 7.13 より，階段行列 A' の第 $s+1$ 行から第 n 行までは $\mathbf{0}$ である．したがって，${}^t\!A'$ の第 $s+1$ 列から第 n 列までは $\mathbf{0}$ であり，${}^t\!A'$ の列ベクトルで 1 次独立なものは高々s 個しかない．ゆえに，$\operatorname{rank} {}^t\!A' \leq s$ である．また，$A' = PA$, P は n 次正則行列，とかけるから，${}^t\!A' = {}^t\!A {}^t\!P$ である．命題 7.12 より，$\operatorname{rank} {}^t\!A' = \operatorname{rank} {}^t\!A = r$ である．以上によって，$r \leq s$ を得た．A を ${}^t\!A$ でおきかえて同じ議論をすれば，$s \leq r$ を得る．ゆえに，$r = s$ である．　$\square$

命題 7.15. A を n 行 m 列，B を m 行 l 列の行列とすると，

$$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A, \quad \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$$

が成立する．

[証明]　$L_B : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $L_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を考える．$L_{AB} = L_A L_B$ だから，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l$ に対して，

$$L_{AB}(\boldsymbol{x}) = L_A(L_B(\boldsymbol{x})) \in \operatorname{Im} L_A,$$

$$\operatorname{Im} L_{AB} \subset \operatorname{Im} L_A.$$

したがって，

$$\operatorname{rank} AB = \dim \operatorname{Im} L_{AB} \leq \dim \operatorname{Im} L_A = \operatorname{rank} A.$$

次に，$r = \operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Im} L_B$ とし，$\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_r$ を $\operatorname{Im} L_B$ の基底とする．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^l$ に対して，$L_B(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} L_B$ であるから，

$$L_B(\boldsymbol{x}) = k_1 \boldsymbol{y}_1 + \cdots + k_r \boldsymbol{y}_r \quad (k_j \in \mathbb{R})$$

とかける．よって，

$$L_{AB}(\boldsymbol{x}) = L_A(L_B(\boldsymbol{x})) = k_1 L_A(\boldsymbol{y}_1) + \cdots + k_r L_A(\boldsymbol{y}_r).$$

したがって，$\operatorname{Im} L_{AB}$ は r 個のベクトル $L_A(\boldsymbol{y}_1), \ldots, L_A(\boldsymbol{y}_r)$ によって生成される．ゆえに，

$$\operatorname{rank} AB = \operatorname{Im} L_{AB} \leq r = \operatorname{rank} B.$$

$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A$ かつ $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ である．　$\square$

例 7.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 1$ であるが，$AB = O$ だから，$\operatorname{rank} AB = 0$ である．

8　固有値と固有ベクトル

8.1　固有値

特に断らない限りは，考えるベクトル空間は複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であるとする．

定義 8.1. f を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ 自身への線型写像とする．$\alpha \in \mathbb{C}$ が f の**固有値**であるとは，

$$f(\boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{v}$$

を満たす $\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}$ が存在するときをいい，このようなベクトル $\boldsymbol{v}$ を固有値 α の**固有ベクトル**という．また，n 次行列 A に対して，線型写像

$$L_A : \mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$$

の固有値，固有ベクトルを，行列 A の固有値，固有ベクトルという．

定理 8.1. n 次行列 A と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\alpha \text{ が } A \text{ の固有値} \Longleftrightarrow |\alpha I - A| = 0$$

ここで，I は n 次単位行列である．

[証明]　命題 7.11 より，

$$\begin{aligned} \alpha \text{ が } A \text{ の固有値} \quad &\Longleftrightarrow \quad (\alpha I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ が非自明解を持つ} \\ &\Longleftrightarrow \quad |\alpha I - A| = 0. \end{aligned}$$

□

A を n 次行列とし，変数 t についての n 次の多項式

$$f_A(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{vmatrix}$$

を考えれば，定理 8.1 は，

$$\alpha \text{ が } A \text{ の固有値} \Longleftrightarrow \alpha \text{ が方程式 } f_A(t) = 0 \text{ の根}$$

を主張している．多項式 $f_A(t)$, 方程式 $f_A(t) = 0$ をそれぞれ，A の**固有多項式**，**固有方程式**という．

$$P^{-1}AP = B$$

のとき，

$$\begin{aligned} f_B(t) &= |tI - B| = |tI - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(tI - A)P| \\ &= |P^{-1}||tI - A||P| = f_A(t) \end{aligned}$$

である．

8.2　行列の対角化

A を n 次行列とし，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を相異なる A の固有値とする．

$$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$$

をそれぞれ固有値 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ の固有ベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は 1 次独立である．実際，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{v}_r = 0$$

とすると，この両辺に行列 A を左からかければ，

$$c_1\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_r\alpha_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}.$$

したがって，

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_r)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{r-1}(\alpha_{r-1} - \alpha_r)\boldsymbol{v}_{r-1} = \mathbf{0}.$$

r に関する帰納法によって，$c_1 = \cdots = c_r = 0$ がわかる．

定理 8.2. n 次行列 A が n 個の相異なる固有値 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を持つとする．そのとき，固有値 α_i の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ とし，$P = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ とおけば，P は正則行列であり，A は次のように対角化される．

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

［証明］　$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であるから，$P = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ とおけば，P は正則行列である．実際，線形写像 $L_P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ の像空間は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ で生成され，$\mathbb{C}^n$ になるから，L_P は全射であり，したがって，全単射である．よって，P は正則行列である．

$$AP = (A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_n) = (\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \cdots, \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

P は正則行列だから，両辺に P^{-1} を左からかければよい．　□

レポート問題 6.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

とするとき，A の固有値と固有ベクトルを求めて，A を対角化せよ．また，A^m を求めよ．

$$\begin{aligned} f_A(t) &= |tI - A| \\ &= (t-11)(t+1) + 32 \\ &= t^2 - 10t + 21 \\ &= (t-3)(t-7). \end{aligned}$$

したがって，A の固有値は $3, 7$ である．

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v}_1 &= 3\boldsymbol{v}_1, \\ A\boldsymbol{v}_2 &= 7\boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

を解けば,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルとしてとれる．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となる．したがって,

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 7^m \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 7^m \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 7^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^m & 7^m \\ 2\cdot 3^m & 7^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3^m + 2\cdot 7^m & 3^n - 7^m \\ -2\cdot 3^m + 2\cdot 7^m & 2\cdot 3^m - 7^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 8.1.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 14 & 12 \\ -7 & 10 & 6 \\ -9 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

とするとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．さらに，A^m を求めよ．

$$\begin{aligned}
f_A(t) &= \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t+11 & -14 & -12 \\ 7 & t-10 & -6 \\ 9 & -9 & t-11 \end{vmatrix} \\
&= (t+11)\begin{vmatrix} t-10 & -6 \\ -9 & t-11 \end{vmatrix} - (-14)\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 9 & t-11 \end{vmatrix} \\
&\quad +(-12)\begin{vmatrix} 7 & t-10 \\ 9 & -9 \end{vmatrix} \\
&= (t+11)(t^2 - 21t + 110 - 54) + 14(7t - 77 + 54) \\
&\quad -12(-63 - 9t + 90) \\
&= (t+11)(t^2 - 21t + 56) + 14(7t - 23) - 12(-9t + 27) \\
&= t^3 - 21t^2 + 56t + 11t^2 - 231t + 616 + 98t - 322 + 108t - 324 \\
&= t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = (t-2)(t^2 - 8t + 15) \\
&= (t-2)(t-3)(t-5).
\end{aligned}$$

よって，A の固有値は $2, 3, 5$ である．固有値 2 の固有ベクトルを求める．

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$\begin{pmatrix} -11x + 14y + 12z \\ -7x + 10y + 6z \\ -9x + 9y + 11z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
-13x + 14y + 12z &= 0, \\
-7x + 8y + 6z &= 0, \\
-9x + 9y + 9z &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-13x + 14y + 12z &= 0, \\
-7x + 8y + 6z &= 0, \\
-x + y + z &= 0.
\end{aligned}$$

これから，$-x+2y=0,\ x=2y,\ z=y$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって，固有値 2 の固有ベクトルとして，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．次に，固有値 3 の固有ベクトルを求める．

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{pmatrix} -11x+14y+12z \\ -7x+10y+6z \\ -9x+9y+11z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} -14x+14y+12z &= 0, \\ -7x+7y+6z &= 0, \\ -9x+9y+8z &= 0. \end{aligned}$$

これから，$z=0,\ y=x$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，固有値 3 の固有ベクトルとして，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．最後に，固有値 5 の固有ベクトルを求める．

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすれば,

$$\begin{pmatrix} -11x+14y+12z \\ -7x+10y+6z \\ -9x+9y+11z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \\ 5z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} -16x+14y+12z &= 0, \\ -7x+5y+6z &= 0, \\ -9x+9y+6z &= 0. \end{aligned}$$

これから，$2x-4y=0$, $x=2y$．$-9y+6z=0$, $z=3y/2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 3y/2 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \frac{y}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

よって，固有値 5 の固有ベクトルとして，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれる．

$$P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく．そのとき，

$$AP = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix},$$

$$A^m = P \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix} P^{-1}.$$

P^{-1} を基本変形によって求める.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 3^m & 0 \\ 0 & 0 & 5^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^m & 3^m & 4\cdot 5^m \\ 2^m & 3^m & 2\cdot 5^m \\ 2^m & 0 & 3\cdot 5^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6\cdot 2^m - 3^m - 4\cdot 5^m & -6\cdot 2^m + 2\cdot 3^m + 4\cdot 5^m & -4\cdot 2^m + 4\cdot 5^m \\ 3\cdot 2^m - 3^m - 2\cdot 5^m & -3\cdot 2^m + 2\cdot 3^m + 2\cdot 5^m & -2\cdot 2^m + 2\cdot 5^m \\ 3\cdot 2^m - 3\cdot 5^m & -3\cdot 2^m + 3\cdot 5^m & -2\cdot 2^m + 3\cdot 5^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.3 行列の対角化の応用

例 8.2. 数列 $\{a_n\}$ は次の漸化式を満たすとする.

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

一般項 a_n を a_0, a_1 を用いて表す. $b_n = a_{n+1}$ とおけば,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n, \\ b_{n+1} &= a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n = 5b_n - 6a_n \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$\boldsymbol{x}_n = A^n \boldsymbol{x}_0 = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

A の固有多項式を $f_A(t)$ とすると,

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 6 & t-5 \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 6 = (t-2)(t-3)$$

であるから, A の固有値は $2, 3$ である. 固有値 2 の固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

より, $y = 2x$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとれる.

固有値 3 の固有ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

より，$y=3x$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ をとれる．

$$P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

であり,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2\cdot 2^n & 3\cdot 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 6\cdot 2^n - 6\cdot 3^n & -2\cdot 2^n + 3\cdot 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

の第 1 成分を求めれば,

$$a_n = a_0(3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n) + a_1(-2^n + 3^n).$$

例 8.3. x の関数 y は次の微分方程式を満たすとする．

$$y'' = 5y' - 6y.$$

ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．$x=0$ のとき，$y=c_0$, $y'=c_1$ とする．この微分方程式を解く．$z=y'$ とおけば,

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= y'' = 5y' - 6y = 5z - 6y. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

したがって,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

そこで,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y - z \\ -2y + z \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u \\ 3v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$u' = 2u, \qquad v' = 3v.$$

この微分方程式の解は,

$$u = ae^{2x}, \qquad v = be^{3x}, \qquad (a, b \text{ は定数})$$

である. $x = 0$ のとき,

$$u = a = 3c_0 - c_1, \qquad v = b = -2c_0 + c_1.$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^{2x} \\ be^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{2x} + be^{3x} \\ 2ae^{2x} + 3be^{3x} \end{pmatrix},$$

$$y = (3c_0 - c_1)e^{2x} + (-2c_0 + c_1)e^{3x} = c_0(3e^{2x} - 2e^{3x}) + c_1(-e^{2x} + e^{3x}).$$

8.4 行列の三角化

定理 8.3. 任意の n 次行列 A に対して，適当な正則行列 P が存在して，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

[証明]　n に関する帰納法を用いる．$n = 1$ のときは，明らか．$n - 1$ まで，定理の主張が成立するとする．α_1 を A の一つの固有値とし，$\boldsymbol{v}_1$ を固有値 α_1 の固有ベクトルとする．$\boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{C}$ の基底になるようにとる．

$$Q = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} AQ\boldsymbol{e}_1 &= A\boldsymbol{v}_1 \\ &= \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 \\ &= Q\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,

$$Q^{-1}AQ\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots\cdots \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

となる．ここで，A_1 は $n-1$ 次行列だから，帰納法の仮定により，$n-1$ 次正則行列 R_1 が存在して，$R_1^{-1}A_1R_1$ が上三角行列になる．

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad P = QR$$

とおけば，$P^{-1}AP = R^{-1}(Q^{-1}AQ)R$ は上三角行列になる．　□

定理 8.4. (Cayley-Hamilton)　n 次行列 A の固有多項式を,

$$f_A(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$$

とすると，
$$f_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n I = O.$$
ここで，O は零行列，I は単位行列である．

[証明]　定理 8.3 より，$B = P^{-1}AP$ が上三角行列になるような n 次正則行列 P をとれる．このとき，$f_A(t) = f_B(t)$ であり，

$$f_A(A) = f_B(A) = f_B(PBP^{-1}) = Pf_B(B)P^{-1}.$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とすると，
$$f_B(t) = (t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \cdots (t - \alpha_n).$$
したがって，
$$f_B(B) = (B - \alpha_1 I)(B - \alpha_2 I) \cdots (B - \alpha_n I).$$
各 i について，

$$(B - \alpha_1 I) \cdots (B - \alpha_i I) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

を示す (これがいえれば，$i = n$ として，$f_B(B) = O$ を得る)．$i = 1$ のときは明か．i のとき成立するとして，$i + 1$ のときを示す．

$$\begin{aligned} & (B - \alpha_1 I) \cdots (B - \alpha_i I)(B - \alpha_{i+1} I) \\ = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_{i+1} & & & & \\ & \ddots & & & * \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_n - \alpha_{i+1} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって，$i + 1$ のときも正しい．　□