算数

上越教育大学　中川仁

平成 25 年 4 月

小学校で，算数を教えるためのバックグランドとなる数学的知識を持ってもらうことが本講義の目的である．例えば，円の面積はなぜ πr^2 で求められるのか．錐体の体積の公式 $\frac{1}{3}Sh$ に $\frac{1}{3}$ があるのはなぜなのか．そういったことについて，自分自身が知らないことをこどもたちに教えられるだろうか．自信を持って教えるためには，バックグランドとなる数学的知識が必要である．この授業では，そういったバックグランドを予備知識を必要としない形で伝えたい．

1　自然数の和，平方数の和，立方数の和

1 から 10 までの自然数の和

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55.$$

1 から 100 までの自然数の和

$$1+2+3+\cdots+99+100$$

は次のようにして求められる．$S=1+2+3+\cdots+99+100$ とおくと，

$$\begin{aligned}
S &= 1+2+3+\cdots+99+100,\\
S &= 100+99+98+\cdots+2+1,\\
2S &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(99+2)+(100+1)\\
&= 101\times 100,\\
S &= \frac{101\times 100}{2} = 101\times 50 = 5050.
\end{aligned}$$

n を自然数とし，1 から n までの自然数の和を S_n とすれば，

$$S_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n.$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1+2+3+\cdots+(n-1)+n,\\
S_n &= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1,\\
2S_n &= (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-1+2)+(n+1)\\
&= n(n+1),
\end{aligned}
$$

したがって，

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

練習問題 1. 1 から 100 までの自然数の和は 5050 であった．2 から 100 までの偶数の和を求めよ．1 から 99 までの奇数の和を求めよ．これを一般化して，n を自然数とするとき，1 から $2n-1$ までの奇数の和を求めよ．

$1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$ のように，自然数 a の 2 乗として表せる数を**平方数**という．また，$1=1^3$, $8=2^3$, $27=3^3$ のように，自然数 a の 3 乗として表せる数を**立方数**という．n を自然数とし，1^2 から n^2 までの平方数の和

$$Q_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$$

や 1^3 から n^3 までの立方数の和

$$C_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3$$

を求めるにはどうしたらよいだろうか．

自然数の和の答え

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

から逆に出発して，これが 1 から n までの自然数の和になっていることを示そう．

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}\left(n+1-(n-1)\right) = n.$$

よって，

$$
\begin{aligned}
S_1 - S_0 &= 1,\\
S_2 - S_1 &= 2,\\
&\cdots\cdots\\
S_n - S_{n-1} &= n.
\end{aligned}
$$

これらを加えれば，

$$S_n - S_0 = 1+2+\cdots+(n-1)+n.$$

$S_0=0$ であるから，

$$S_n = 1+2+\cdots+(n-1)+n.$$

この考え方を用いて，平方数の和 Q_n を求めよう．整数 $n \geq 0$ に対して，

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-1} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)}{3}\,(n+2-(n-1)) = n(n+1) \\ &= n^2 + n. \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{gathered} T_1 - T_0 = 1^2 + 1, \\ T_2 - T_1 = 2^2 + 2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ T_n - T_{n-1} = n^2 + n. \end{gathered}$$

これらを加えれば，

$$T_n - T_0 = \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + (1 + 2 + \cdots + n)\,.$$

$T_0 = 0$ であるから，

$$T_n = \left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + (1 + 2 + \cdots + n) = Q_n + S_n.$$

したがって，

$$\begin{aligned} Q_n = T_n - S_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2(n+2)-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

よって，平方数の和 Q_n に対する次の公式を得た．

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.2}$$

立方数の和 C_n についても同様にして求められる．整数 $n \geq 0$ に対して，

$$U_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} U_n - U_{n-1} &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{4}\,(n+3-(n-1)) = n(n+1)(n+2) \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n. \end{aligned}$$

よって，

$$U_1 - U_0 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1,$$
$$U_2 - U_1 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$U_n - U_{n-1} = n^3 + 3n^2 + 2n.$$

これらを加えれば，

$$\begin{aligned} U_n - U_0 &= \left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right) + 3\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 2\left(1 + 2 + \cdots + n\right) \\ &= C_n + 3Q_n + 2S_n. \end{aligned}$$

$U_0 = 0$ であるから，

$$U_n = C_n + 3Q_n + 2S_n.$$

したがって，

$$\begin{aligned} C_n &= U_n - 3Q_n - 2S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left((n+2)(n+3) - 2(2n+1) - 4\right) = \frac{n(n+1)}{4}\left(n^2 + 5n + 6 - 4n - 2 - 4\right) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

よって，立方数の和 C_n に対する次の公式を得た．

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{1.3}$$

(1.1) と (1.3) より，$C_n = S_n^2$，

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n\}^2$$

が成り立っている．すなわち，**立方数の和は自然数の和の 2 乗と等しい．**

練習問題 2. 次の表はかけ算九九の表である．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

以下の問に答えよ．

(1) $a_1 = 1$ とし，各 $k = 2, \ldots, 9$ に対して，a_k を次のように定める．

$$a_k = (k \times 1 + k \times 2 + \cdots + k \times k) + (1 \times k + 2 \times k + \cdots + (k-1) \times k).$$

例えば，$a_2 = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 2 = 2 + 4 + 2 = 8$ である．このとき，a_3, a_4, a_5 を求めよ．

(2) 各 $k = 1, \ldots, 9$ に対して，k の段のかけ算の答えの合計を b_k とする．例えば，

$$b_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18.$$

b_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ を求めよ．

(3) $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$ と $b_1 + b_2 + \cdots + b_9$ はどちらもかけ算九九の表におけるかけ算の答えをすべて合計したものであるから，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = b_1 + b_2 + \cdots + b_9$$

が成り立つ．$n > 9$ として，1 から n までの自然数の積の表について，同様に a_k と b_k $(1 \leq k \leq n)$ を定める．そのとき，a_k, b_k を求めて，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

が成り立つことと，

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n\}^2$$

が成り立つことを説明せよ．

2　放物線で囲まれる図形の面積

$a > 0$ とし，放物線 $y = x^2$ と x 軸および $x = a$ で囲まれる図形の面積を S とする．n を自然数とし，$0 \leq x \leq a$ を n 等分して，$h = \dfrac{a}{n}$, $x_k = kh$ $(k = 1, \ldots, n)$ とおく．図 1 の中央の図のように，放物線上の点 (x_k, x_k^2) の左側に横の長さが h で縦の長さが x_k^2 の長方形をつくり，その面積を $k = 1, 2, \ldots, n$ について加えれば，

$$S < x_1^2 h + x_2^2 h + \cdots + x_n^2 h$$

である．同様に，図 1 の右側の図のように，放物線上の点 (x_k, x_k^2) の右側に横の長さが h で縦の長さが x_k^2 の長方形をつくり，その面積を $k = 1, 2, \ldots, n-1$ について加えれば，

$$x_1^2 h + x_2^2 h + \cdots + x_{n-1}^2 h < S$$

である．(1.2) より，

$$\begin{aligned}x_1^2h + x_2^2h + x_3^2h + \cdots + x_n^2h &= (h)^2h + (2h)^2h + (3h)^2h + \cdots + (nh)^2h \\ &= h^3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = a^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).\end{aligned}$$

$x_n^2h = (nh)^2h = a^2h = \dfrac{a^3}{n}$ であるから，

$$\begin{aligned}x_1^2h + x_2^2h + x_3^2h + \cdots + x_{n-1}^2h &= x_1^2h + x_2^2h + x_3^2h + \cdots + x_{n-1}^2h + x_n^2h - x_n^2h \\ &= a^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) - \frac{a^3}{n} \\ &= a^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).\end{aligned}$$

よって，

$$a^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) < S < a^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right). \tag{2.1}$$

n を大きくすれば，不等式 (2.1) の両側はともに $\dfrac{1}{3}a^3$ に近づくから，

$$S = \frac{1}{3}a^3$$

でなければならない．

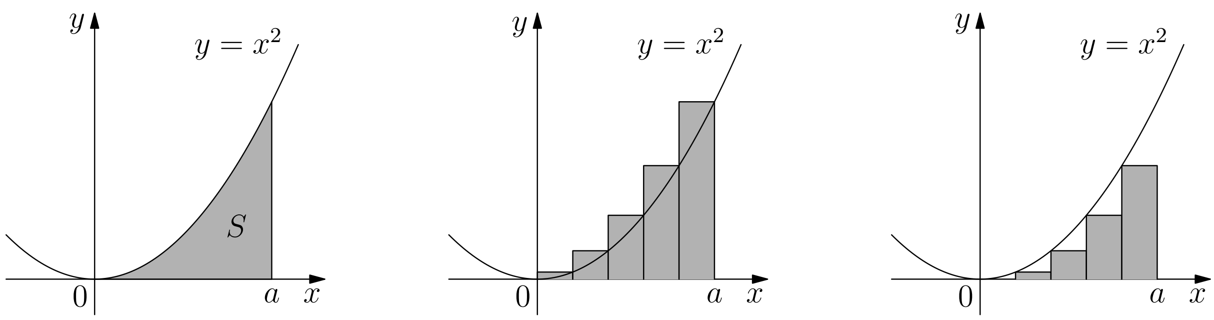

図 1: 放物線で囲まれる図形の面積

3　円周率と円の面積

円の面積の公式について考察してみる．半径 r の円について，その周の長さを $L(r)$ とし，面積を $S(r)$ とする．

n を 3 以上の自然数とする．半径 r の円に内接する正 n 角形について，その周の長さを $L_n(r)$ とし，面積を $S_n(r)$ とする．

$n=6$ とする．半径 r の円に内接する正 6 角形は 1 辺の長さが r の正三角形 6 個からなるから，周の長さは $L_6(r)=6r$ である．

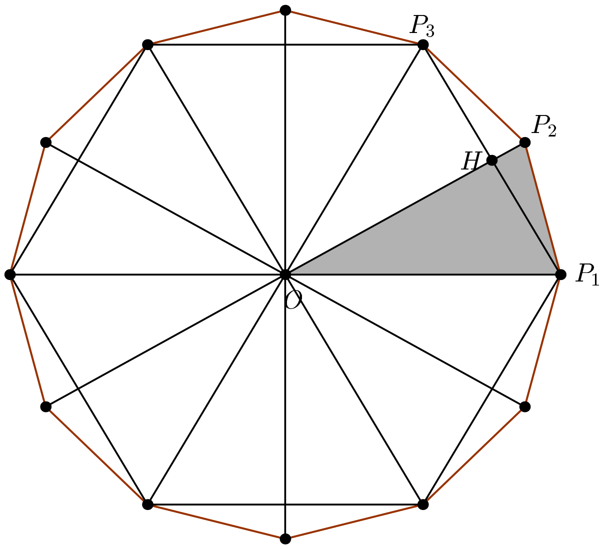

図 2: 円に内接する正 12 角形

次に，$n=12$ として半径 r の円に内接する正 12 角形の面積 $S_{12}(r)$ を求めてみよう．図 2 のように，$\triangle OP_1P_2$ において，底辺の長さ $OP_2=r$, 高さ $P_1H=\dfrac{r}{2}$ であるから，

$$\triangle OP_1P_2\ \text{の面積} = \frac{1}{2}r\times\frac{r}{2}=\frac{1}{4}r^2.$$

したがって，

$$S_{12}(r)=12\times\frac{1}{4}r^2=3r^2.$$

よって，$S_{12}(r)$ と $L_6(r)$ の間には，

$$S_{12}(r)=3r^2=\frac{1}{2}r(6r)=\frac{1}{2}rL_6(r)$$

という関係式が成り立っている．同様にして，任意の $n\geq 3$ に対して，正 $2n$ 角形を $2n$ 等分した三角形の高さは，$\dfrac{1}{2}\dfrac{L_n(r)}{n}$ であり，底辺の長さは半径 r であるから，その面積は

$$\frac{1}{2}\times r\times\frac{1}{2}\frac{L_n(r)}{n}=\frac{r}{4n}L_n(r)$$

であり，したがって，

$$S_{2n}(r)=2n\times\frac{r}{4n}L_n(r)=\frac{1}{2}rL_n(r),$$

$$S_{2n}(r) = \frac{1}{2} r L_n(r)$$

という関係式が成り立っている．n をどんどん大きくしていけば，左辺の $S_{2n}(r)$ は円の面積 $S(r)$ に近づき，右辺の L_n は円周の長さ $L(r)$ に近づく．したがって，

$$S(r) = \frac{1}{2} r L(r)$$

である．特に，$r = 1$ のとき，

$$L(1) = 2\pi$$

によって**円周率** π を定義すれば，$S(1) = \pi$ である．

半径 r の円に内接する正 n 角形と半径 1 の円に内接する正 n 角形は相似であり，相似比は $r : 1$ であるから，

$$L_n(r) = r L_n(1)$$

であり，n を大きくしていけば，

$$L(r) = r L(1) = 2\pi r$$

となる．したがって，

$$S(r) = \frac{1}{2} r L(r) = \frac{1}{2} r (2\pi r) = \pi r^2.$$

以上，円周率の定義，円周の長さ，円の面積について説明した．それでは，円周率 π の値はどれくらいだろうか？

明らかに，$2\pi = L(1) > L_6(1) = 6$ であるから，$\pi > 3$ である．円に外接する 1

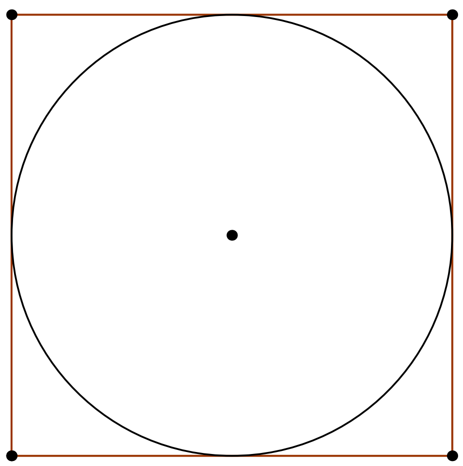

図 3: 円に外接する正方形

辺の長さが $2r$ の正方形の面積は $(2r)^2 = 4r^2$ であるから，

$$S(r) = \pi r^2 < 4r^2.$$

したがって，$\pi < 4$ である．以上によって，$3 < \pi < 4$ であることがわかった．

円周率をもう少し詳しく求めるために，円の面積を上から評価する古代中国の数学者 劉徽(りゅうき)(220 年頃–280 年頃) の方法を紹介する．図 2 の $\triangle OP_1P_3$ の部分を拡大したものが図 4 である．ここで，四角形 $P_1Q_1Q_3P_3$ は長方形であり，点 P_2 は線分 Q_1Q_3 上にある．このとき，

$$\begin{aligned}\triangle P_1P_2P_3 \text{ の面積} &= \text{四角形 } OP_1P_2P_3 \text{ の面積} - \triangle OP_1P_3 \text{ の面積} \\ &= 2 \times \triangle OP_1P_2 \text{ の面積} - \triangle OP_1P_3 \text{ の面積} \\ &= 2 \times \frac{S_{12}}{12} - \frac{S_6}{6} = \frac{S_{12} - S_6}{6}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\text{長方形 } P_1Q_1Q_3P_3 \text{ の面積} = 2 \times \triangle P_1P_2P_3 \text{ の面積} = \frac{S_{12} - S_6}{3}.$$

図 4 から，

$$\begin{aligned}\text{扇形 } OP_1P_3 \text{ の面積} &< \triangle OP_1P_3 \text{ の面積} + \text{長方形 } P_1Q_1Q_3P_3 \text{ の面積} \\ &= \frac{S_6(r)}{6} + \frac{S_{12}(r) - S_6(r)}{3} = \frac{S_6(r) + 2S_{12}(r) - 2S_6(r)}{6} \\ &= \frac{2S_{12}(r) - S_6(r)}{6}.\end{aligned}$$

円の面積 $S = \pi r^2$ は扇形 OP_1P_3 の面積の 6 倍であるから，

$$\pi r^2 < 6\left(\frac{2S_{12}(r) - S_6(r)}{6}\right) = 2S_{12}(r) - S_6(r).$$

$S_{12}(r) = 3r^2$ であった．一辺の長さが r の正三角形 OP_1P_3 の面積は

$$\frac{1}{2}r \times \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$

であるから，

$$S_6(r) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2.$$

したがって，

$$2S_{12}(r) - S_6(r) = 6r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 = \frac{3(4-\sqrt{3})}{2}r^2,$$

$$\pi < \frac{3(4-\sqrt{3})}{2} = 3.4019\cdots.$$

同様にして，任意の $n \geq 3$ に対して，

$$\pi r^2 < 2S_{2n}(r) - S_n(r)$$

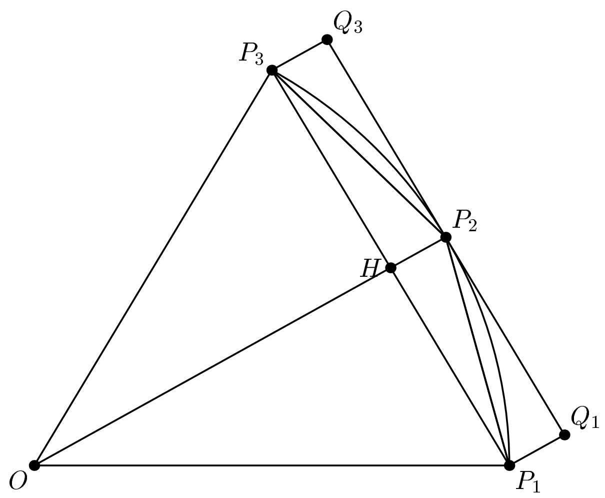

図 4: 劉徽の方法

が成り立つことがわかる．

$n=12$ とすれば，$\pi r^2 < 2S_{24}(r) - S_{12}(r)$ である．$S_{12}(r) = 3r^2$ であり，練習問題 3 より $L_{12}(r) = 6(\sqrt{6}-\sqrt{2})r$ であるから，

$$S_{24}(r) = \frac{1}{2} r L_{12}(r) = 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})r^2.$$

よって，

$$\pi r^2 < 2 \times 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})r^2 - 3r^2,$$
$$\pi < 6(\sqrt{6}-\sqrt{2}) - 3 = 3.2116\cdots.$$

練習問題 3. 半径 r の円に内接する正 12 角形の周の長さ L_{12} を求めよ．これを用いて，$\pi > 3.1$ を示せ．

4　円錐と球の体積，球の表面積

底面の半径 r，高さ h の円柱の体積は $\pi r^2 h$ であることを知っているとして，底面の半径 r，高さ h の円錐の体積は

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

であることを示そう．

円錐を高さの方向に n 等分する．頂点からの距離が $\dfrac{h}{n}k$ であるような底面と平行な平面で円錐を切ったときの切口の円の半径は $\dfrac{r}{n}k$ である．V_k によって，半径 $\dfrac{r}{n}k$ で高さが $\dfrac{h}{n}$ の円柱の体積を表す．この円柱を切口の平面の上側に置いて，$k = 1, \ldots, n$

について並べれば，円錐を含む空間図形が得られる (図 5 中央)．また，この円柱を切口の平面の下側に置いて，$k = 1, \dots, n-1$ について並べれば，円錐に含まれる空間図形が得られる (図 5 右)．したがって，円錐の体積 V は次の不等式を満たす．

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1} < V < V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1} + V_n. \tag{4.1}$$

ここで，

$$V_k = \pi \left(\frac{r}{n}k\right)^2 \frac{h}{n} = \frac{\pi r^2 h}{n^3} k^2 \tag{4.2}$$

であるから，平方数の和の公式 (1.2) を用いれば，

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1} + V_n &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \pi r^2 h \times \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \\ &= \pi r^2 h \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right), \end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1} + V_{n-1} &= \frac{\pi r^2 h}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) \\ &= \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \pi r^2 h \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right). \end{aligned}$$

したがって，不等式 (4.1) の両側は n を大きくしていけば，ともに $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ に近づく．ゆえに，円錐の体積は

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

でなければならない．

底面の面積が S で高さが h の錐体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

で与えられることも円錐の体積も同様にして示される．

半径 r の球の体積は

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

であることを示そう．

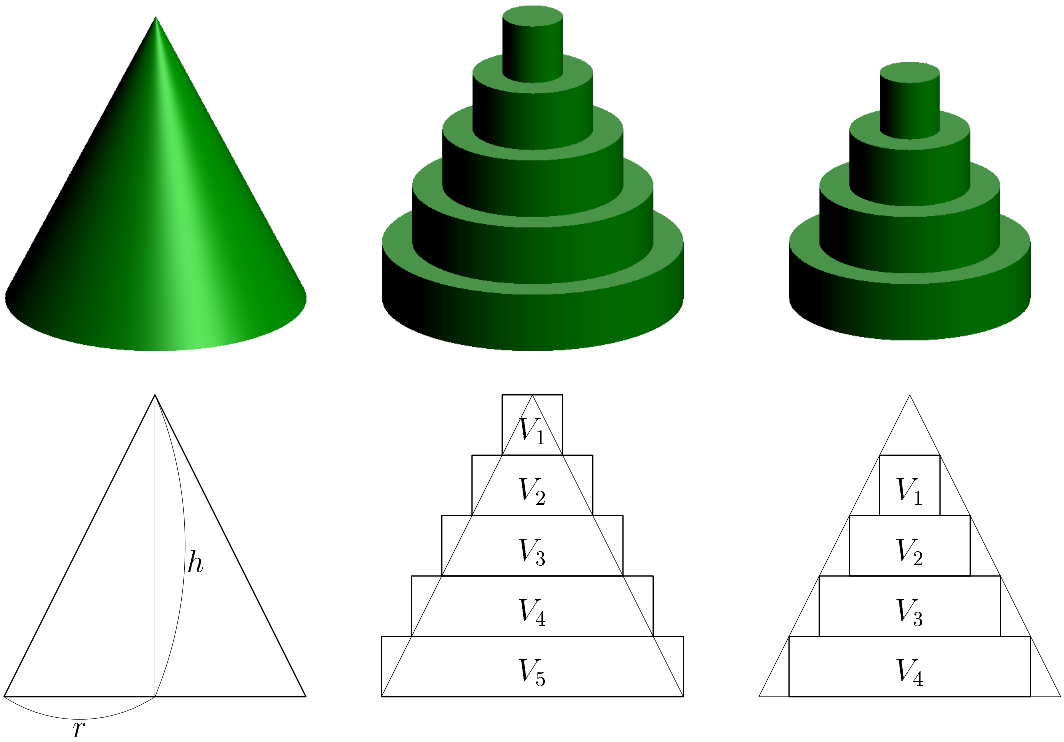

図 5: 円錐の体積の求め方 ($n = 5$)

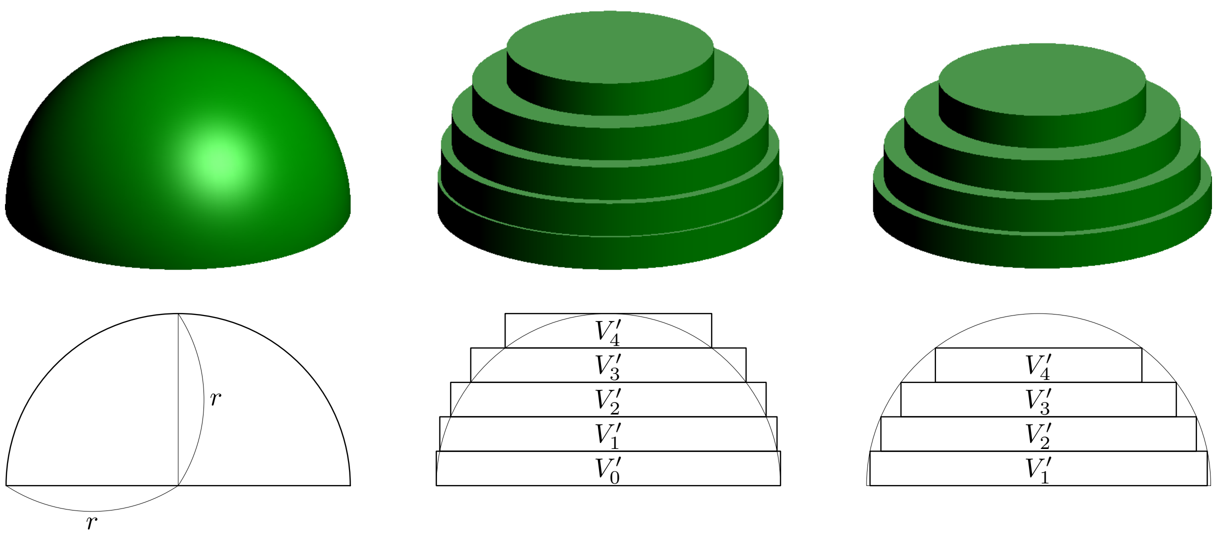

図 6: 球の体積の求め方 ($n = 5$)

上半球を高さの方向に n 等分する．底面からの距離が $\dfrac{r}{n}k$ であるような底面と平行な平面で半球を切ったときの切口の円の半径を r_k とすると，

$$r_k = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{n}k\right)^2}$$

である．V'_k によって，半径 r_k で高さが $\dfrac{r}{n}$ の円柱の体積を表す．この円柱を切口の平面の上側に置いて，$k = 0, 1, \ldots, n-1$ について並べれば，上半球を含む空間図形が得られる (図 6 中央)．また，この円柱を切口の平面の下側に置いて，$k = 1, \ldots, n-1$ について並べれば，上半球に含まれる空間図形が得られる (図 6 右)．したがって，上半球の体積 $\dfrac{1}{2}V$ は次の不等式を満たす．

$$V'_1 + V'_2 + \cdots + V'_{n-1} < \frac{1}{2}V < V'_0 + V'_1 + V'_2 + \cdots + V'_{n-1}. \tag{4.3}$$

ここで，

$$V'_k = \pi r_k^2 \frac{r}{n} = \frac{\pi r}{n}\left(r^2 - \left(\frac{r}{n}k\right)^2\right) = \frac{\pi r^3}{n} - V_k.$$

ここで，

$$V_k = \frac{\pi r^3}{n^3}k^2$$

とおいた．この V_k は円錐の体積の計算において，$h = r$ としたときの V_k である．

$$V'_k + V_k = \frac{\pi r^3}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

であるから，$k = 0, 1, \ldots, n-1$ について和をとれば，

$$(V'_0 + V'_1 + V'_2 + \cdots + V'_{n-1}) + (V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}) = \pi r^3.$$

また，$V_0 = 0$ と $h = r$ に注意すれば，円錐の体積の計算でみたように，

$$V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1} = \pi r^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).$$

したがって，

$$\begin{aligned} V'_0 + V'_1 + V'_2 + \cdots + V'_{n-1} &= \pi r^3 - \pi r^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) \\ &= \frac{2\pi r^3}{3} - \pi r^3\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

$V'_0 = \dfrac{\pi r^3}{n}$ であるから，

$$V'_1 + V'_2 + \cdots + V'_{n-1} = \frac{2\pi r^3}{3} - \pi r^3\left(\frac{3}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right). \tag{4.5}$$

(4.4) と (4.5) によって，不等式 (4.3) の両側は n を大きくしていけば，ともに $\dfrac{2}{3}\pi r^3$ に近づく．ゆえに，半球の体積は $\dfrac{1}{2}V = \dfrac{2}{3}\pi r^3$ でなければならない．よって，球の体積は $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ である．また，半径 r の半球の体積と半径 r で高さ h の円錐の体積の和は半径 r で高さ r の円柱の体積と等しいこともわかった．

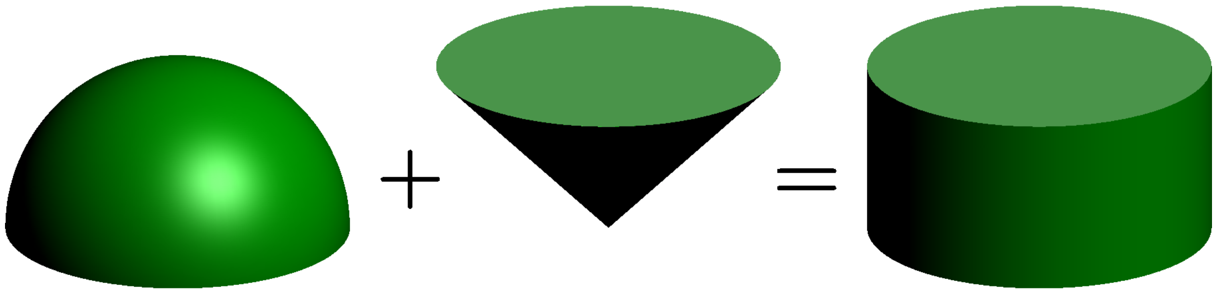

図 7: 半球の体積＋円錐の体積＝円柱の体積

最後に，半径 r の球の表面積 S が

$$S = 4\pi r^2$$

で与えられることを示そう．半径 r の球の体積を $V(r)$ とすれば，

$$V(r) = \frac{4\pi}{3}r^3$$

であった．地球のように大きな球があると考え，地表から高さ h にある空気の体積はおよそ Sh である．よって，$h > 0$ を十分小さいとすると，

$$V(r+h) - V(r) \fallingdotseq Sh, \qquad \frac{V(r+h) - V(r)}{h} \fallingdotseq S.$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\frac{V(r+h) - V(r)}{h} &= \frac{4\pi}{3h}\left((r+h)^3 - r^3\right) \\
&= \frac{4\pi}{3h}\left(r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}\left(3r^2 + 3rh + h^2\right).
\end{aligned}$$

これは h を 0 に近づければ，$4\pi r^2$ に近づくから，$S = 4\pi r^2$ である．すなわち，$\dfrac{dV}{dr} = S$ である (円の面積も半径 r で微分すれば，円周になる)．

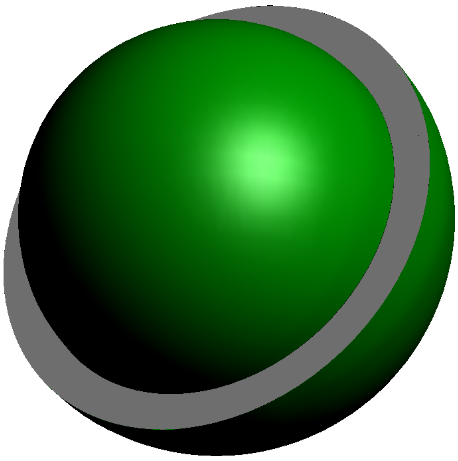

図 8: 球の表面積の求め方