円周率πを計算する
–アルキメデス，和算，ガウスの方法–

上越教育大学 中川仁

平成20年9月3日，10日，17日，24日，10月1日

目 次

0　はじめに

人類は何千年も前から円周率を求めようしてきた。円周の素朴な実測や，円の面積を小さな正方形のマス目の数で求めることによっては，3.14 まで求めることも困難である．実際，円筒形のものに糸を巻き付けて，糸の長さと直径を物差しで測ったところ，円周が 271 mm, 直径が 89 mm となった．円周÷直径は $271/89 = 3.04\cdots$ である．円周率の計算について，歴史的にどのような工夫がなされてきたか，アルキメデス，和算家，インド，ガウスの方法を紹介し，彼らの計算を追体験することによって，人類の知的活動の歴史を鑑賞してみよう．

1　円の面積による計算

1.1　円周率 π は 3 より大きい

半径 1 の円に内接する正 6 角形を考える．円周の長さは 2π であり，正 6 角形の周の長さは，$6 \times 1 = 6$ である．したがって，$2\pi > 6$, $\pi > 3$ である．

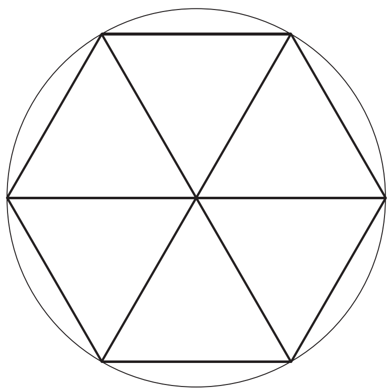


図 1: $\pi > 3$

1.2　円の面積の公式–その 1–

まず，円の面積の公式について考察してみる．円周率の定義によって，半径 r の円の周の長さは $2\pi r$ である．その円の面積は πr^2 で与えられることは，次のように説明されている．円周を $2n$ 等分する．これを $2n$ 個の扇形に切って，それを 2 つずつ互いに逆向きにして組み合わせたものを n 個並べると，$n \to \infty$ のとき，その図形は縦が r，横が πr の長方形に近づくので，円の面積は $r \times \pi r = \pi r^2$ となる．これについては，次で証明を与える．

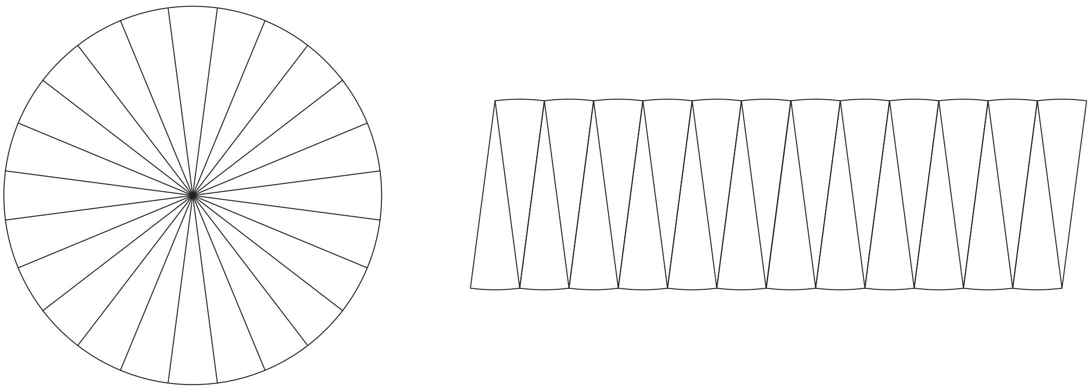


図 2: 円の面積の公式 (24 等分)

1.3　円の面積の公式–その 2–

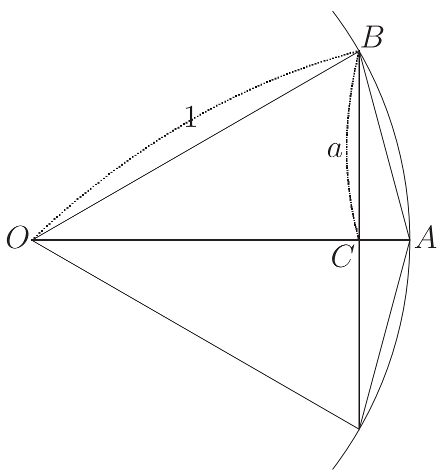


図 3: 円に内接する正多角形の面積と周の長さ

半径 1 の円に内接する正 N 角形の周の長さの半分を p_N とし，半径 1 の円に内接する正 $2N$ 角形の面積を s_{2N} とする．s_{2N} と p_N の関係を調べてみよう．内接す

る正 N 角形の 1 辺の長さを $2a$ とすると，$p_N = (N \times 2a)/2 = Na$ である．一方，図 3 において，$OA = 1$, $BC = a$ であるから，三角形 OAB の面積は，

$$\frac{1}{2} \times 1 \times a = \frac{1}{2}a$$

である．したがって，

$$s_{2N} = (2N) \times \left(\frac{1}{2}a\right) = Na = p_N \tag{1}$$

である．すなわち，正 $2N$ 角形の面積 s_{2N} は，正 N 角形の周の長さの半分 p_N に等しい．したがって，$N \to \infty$ のとき，

$$s_{2N} = p_N \to \pi$$

である．これは半径 1 の円の面積が π であることを示している．

1.4　方眼紙を用いて π を求めてみる

方眼紙のマス目の長さを a とし，原点を中心とする半径 $r = na$ の円の面積 S を考える．$S = \pi r^2 = \pi n^2 a^2$ である．円に完全に含まれる正方形の個数を M，円周と共有点を持つ正方形の個数を B とすれば，

$$Ma^2 < S = \pi n^2 a^2 < (M + B)a^2,$$

したがって，

$$\frac{M}{n^2} < \pi < \frac{M + B}{n^2}$$

が成り立つ．特に，$a = \frac{1}{n}$, $r = 1$ のとき，n を大きくしていけば (マス目の長さを小さくしていけば)，上の不等式の両端は一定の値 π に近づくはずである (積分の原理).

練習問題 1. $n = 10$ のとき，図 4 によって，π の値を上下から評価してみよう (M, B を 1/4 円について数えて 4 倍すればよい).

1.5　円の面積を長方形で近似する

座標平面における原点中心の半径 1 の円 (単位円) の第 1 象限の部分と x-軸，y-軸で囲まれた 1/4 円の面積を考える．N を自然数とし，x-軸上に点 $P_k = \left(\dfrac{k}{N}, 0\right)$, $k = 0, 1, \ldots, N$ をとる．点 P_k を通る y-軸と平行な直線と円の交点を Q_k とすると，

$$Q_k = \left(\frac{k}{N}, \sqrt{1 - \left(\frac{k}{N}\right)^2}\right)$$

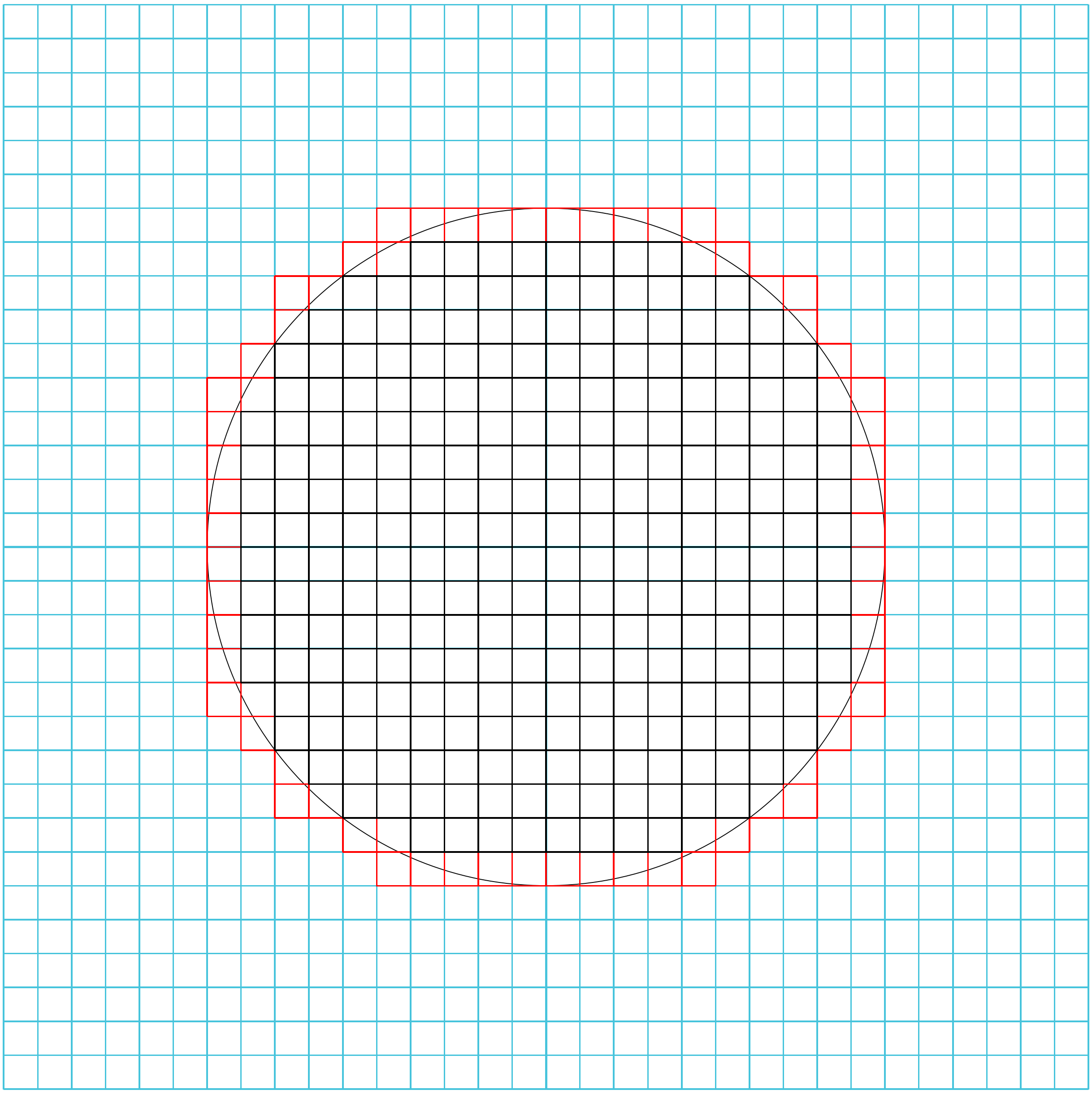


図 4: 方眼紙を用いて π を求める

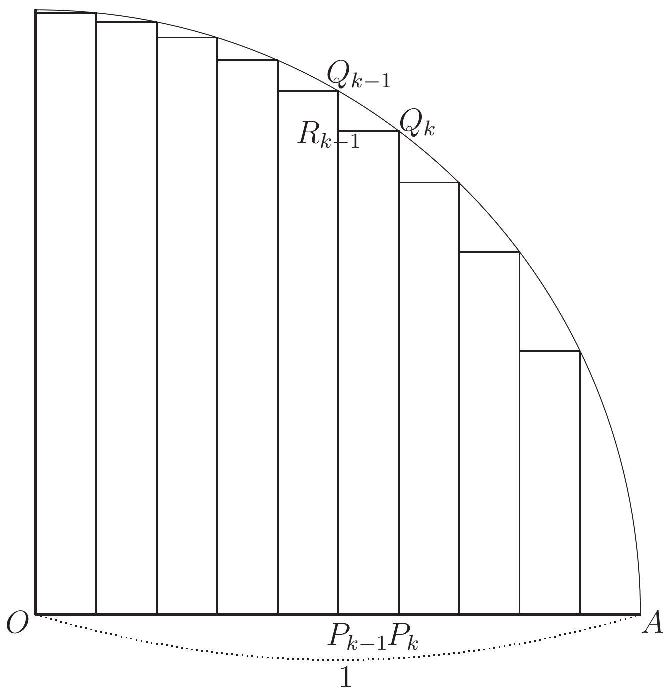


図 5: 円の面積を長方形の面積で下から評価する ($N = 10$)

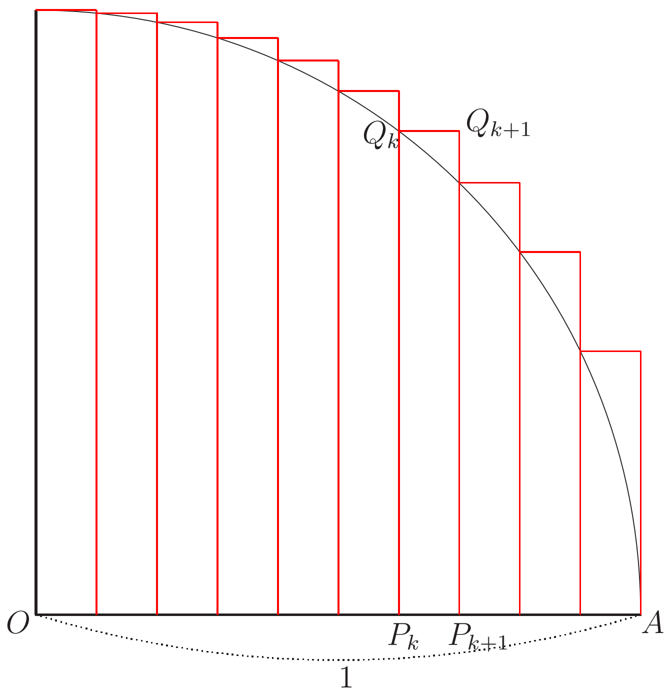


図 6: 円の面積を長方形の面積で上から評価する ($N = 10$)

である．点 Q_k を通る x-軸平行な直線と直線 $P_{k-1}Q_{k-1}$ との交点を R_{k-1} とする．そのとき，1/4 円の面積 $\pi/4$ は，長方形 $P_{k-1}P_kQ_kR_{k-1}$ の面積を $k = 1, 2, \ldots, N-1$ について加えたものより大きい (図 5)．同様に，1/4 円の面積 $\pi/4$ は，長方形 $P_kP_{k+1}Q_{k+1}Q_k$ の面積を $k = 0, 1, \ldots, N-1$ について加えたものより小さい (図 6)．したがって，

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{N}\sqrt{1-\left(\frac{k}{N}\right)^2} < \frac{\pi}{4} < \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sqrt{1-\left(\frac{k}{N}\right)^2}.$$

これから，

$$\frac{4}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\sqrt{N^2-k^2} < \pi < \frac{4}{N^2}\sum_{k=0}^{N-1}\sqrt{N^2-k^2}. \tag{2}$$

N を大きくしていけば，両辺とも π に近づく (両辺の差は $4/N$)．しかし，これは大変効率が悪い．$N = 2000$ としても，$3.140 < \pi < 3.143$ がわかる程度である．

練習問題 2. $N = 10$ のとき，(2) によって，π の値を上下から評価してみよう．

2　アルキメデスの方法

2.1　円に内接・外接する正多角形

N を自然数とする．半径 1 の円に内接する正 N 角形の一辺の長さを $2a$，外接する正 N 角形の一辺の長さを $2b$ とする．同様に，半径 1 の円に内接する正 $2N$ 角形の一辺の長さを $2a'$，外接する正 $2N$ 角形の一辺の長さを $2b'$ とする．これを図示すると次のような図になる．

図 7 において，$\angle OBA = \angle EBD$ であるから，直角三角形 OAB と直角三角形 EDB は相似である．$OA = 1$, $ED = AE = b'$, $AB = b$ であるから，

$$OA : ED = AB : DB, \quad 1 : b' = b : DB, \quad DB = bb'. \tag{3}$$

$\angle ODC = \angle EBD$ であるから，直角三角形 OCD と直角三角形 EDB は相似である．$OD = 1$, $EB = AB - AE = b - b'$, $CD = a$ より，

$$OD : EB = CD : BD, \quad 1 : (b-b') = a : BD, \quad BD = a(b-b'). \tag{4}$$

(3) と (4) から，$bb' = a(b-b')$, $b'(a+b) = ab$, したがって，

$$b' = \frac{ab}{a+b}. \tag{5}$$

次に，$\angle OAF = \angle DAC$ であるから，直角三角形 OFA と直角三角形 DCA は相似である．$OA = 1$, $DA = 2FA = 2a'$, $AF = a'$ であるから，

$$OA : DA = AF : AC, \quad 1 : 2a' = a' : AC, \quad AC = 2a'^2. \tag{6}$$

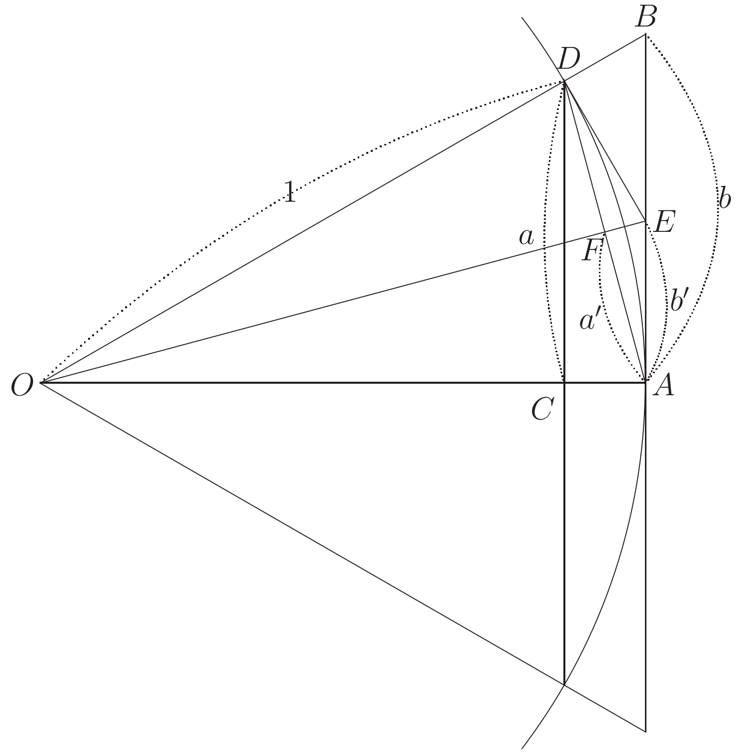


図 7: アルキメデスの方法

さらに，$\angle EOA = \angle AOF$ であるから，直角三角形 OAE と直角三角形 OFA は相似である．よって，直角三角形 OAE と直角三角形 DCA は相似である．$OA = 1$, $DC = a$, $AE = b'$ より，

$$OA : DC = AE : CA, \quad 1 : a = b' : CA, \quad CA = ab'. \tag{7}$$

(6) と (7) から，$2a'^2 = ab'$, したがって，

$$a' = \sqrt{\frac{ab'}{2}}. \tag{8}$$

内接正 N 角形の周の長さの半分を p_N，外接する正 N 角形の周の長さの半分を q_N とすれば，$p_N = Na$, $q_N = Nb$, $p_{2N} = 2Na'$, $q_{2N} = 2Nb'$ である．したがって，$a = p_N/N$, $b = q_N/N$, $a' = p_{2N}/(2N)$, $b' = q_{2N}/(2N)$ を (5), (8) に代入すれば，次の命題を得る．

命題 1.

$$q_{2N} = \frac{2p_Nq_N}{p_N + q_N} \quad (p_N \text{ と } q_N \text{ の調和平均}),$$
$$p_{2N} = \sqrt{p_Nq_{2N}} \quad (p_N \text{ と } q_{2N} \text{ の幾何平均}).$$

アルキメデスは，正 6 角形から出発して，辺の数が 2 倍にして，正 12 角形, 正 24 角形, 正 48 角形，正 96 角形，正 192 角形，について計算した．$p_6 = 3$, $q_6 = 2\sqrt{3}$ である．命題 1 より，

$$q_{12} = \frac{2 \cdot 63 \cdot 2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 12(2 - \sqrt{3}),$$
$$p_{12} = \sqrt{3 \cdot 12(2 - \sqrt{3})} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

これを繰り返して小数で計算すれば，$p_N < \pi < q_N$ より，

$$\begin{aligned} n = 12, &\quad 3.1058\cdots < \pi < 3.2153\cdots, \\ n = 24, &\quad 3.1326\cdots < \pi < 3.1596\cdots, \\ n = 48, &\quad 3.1393\cdots < \pi < 3.1460\cdots, \\ n = 96, &\quad 3.1410\cdots < \pi < 3.1427\cdots, \\ n = 192, &\quad 3.1414\cdots < \pi < 3.1418\cdots. \end{aligned}$$

円周率 π の値として，正 96 角形の計算から，3.14 まで，正 192 角形の計算から，3.141 までわかる．

練習問題 3. 電卓を用いて，命題 1 の公式から，p_N, q_N を $N = 12, 24, 48, 96, 192$ について計算してみよう．

2.2 算術平均・幾何平均・調和平均

正の実数 a, b に対して，

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

とおく．$A(a,b)$ を a と b の**算術平均**, $G(a,b)$ を**幾何平均**, $H(a,b)$ を**調和平均**という．よく知られているように，不等式

$$A(a,b) \geq G(a,b)$$

が成り立ち，等号が成り立つのは $a = b$ のときに限る．実際，

$$\begin{aligned} 4(A(a,b)^2 - G(a,b)^2) &= (a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\ &= a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

調和平均については，

$$A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{H(a,b)}$$

であるから，

$$\frac{1}{H(a,b)} = A\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) \geq G\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) = \sqrt{\frac{1}{ab}},$$

$$H(a,b) \leq \sqrt{ab} = G(a,b)$$

である．したがって，

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$$

が成り立つ．

$$\max(a,b) = \begin{cases} a, & a \geq b, \\ b, & a < b, \end{cases} \qquad \min(a,b) = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b, \end{cases}$$

とおく．$a \leq \max(a,b)$, $b \leq \max(a,b)$ より，

$$A(a,b) = \frac{1}{2}(a+b) \leq \frac{1}{2}(\max(a,b)+\max(a,b)) = \max(a,b)$$

である．$a \geq \min(a,b)$, $b \geq \min(a,b)$ より，

$$A\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\min(a,b)}+\frac{1}{\min(a,b)}\right) = \frac{1}{\min(a,b)},$$

$$H(a,b) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)} \geq \min(a,b).$$

以上によって，

$$\min(a,b) \leq H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b) \leq \max(a,b)$$

である．$p_N < q_N$ と命題 1 より，$q_{2N} = H(p_N, q_N)$, $p_{2N} = G(p_N, q_{2N})$ であるから，

$$p_N < p_{2N} < q_{2N} < q_N$$

が成り立つ．これから，数列 $p_{3\cdot 2^n}$ は単調増加であり，常に q_6 以下である．したがって，ある極限値 α に収束する．同様に，数列 $q_{3\cdot 2^n}$ は単調減少であり，常に p_6 以上である．したがって，ある極限値 β に収束する．

$$q_{3\cdot 2^{n+1}} = H(p_{3\cdot 2^n}, q_{3\cdot 2^n})$$

の両辺で，$n \to \infty$ とすれば，

$$\beta = H(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

を得る．これから，$\alpha^2 + \alpha\beta = 2\alpha\beta$, $\alpha^2 = \alpha\beta$, $\alpha = \beta$ を得る．この極限値 α が円周率 π である．

3　和算家 関孝和の工夫

3.1　p_{2N} と p_N の関係

$N \geq 6$ のとき，p_{2N} と p_N の関係を調べてみよう．図 7 において，三角形 DCA は直角三角形であり，$DC = a$, $CA = 2a'^2$, $DA = 2a'$ であるから，三平方の定理によって，

$$a^2 + (2a'^2)^2 = (2a')^2$$

が成り立つ．$a = p_N/N$, $a' = p_{2N}/(2N)$ を代入すれば，

$$\begin{aligned}\frac{p_N^2}{N^2} + \frac{p_{2N}^4}{4N^4} = \frac{p_{2N}^2}{N^2}, \quad p_{2N}^4 - 4N^2 p_{2N}^2 + 4N^2 p_N^2 = 0,\\ p_{2N}^2 &= 2N^2 \pm \sqrt{4N^4 - 4N^2 p_N^2} = 2N^2 \pm 2N\sqrt{N^2 - p_N^2}\\ &= 2N\left(N \pm \sqrt{N^2 - p_N^2}\right).\end{aligned}$$

$p_{2N} < q_{2N} < q_6 = 2\sqrt{3}$ であるから，符号は $-$ でなければならない．よって，

$$\begin{aligned} p_{2N}^2 &= 2N\left(N - \sqrt{N^2 - p_N^2}\right),\\ p_{2N} &= \sqrt{2N\left(N - \sqrt{N^2 - p_N^2}\right)}. \end{aligned} \tag{9}$$

3.2　階差の比

江戸時代の和算家 関孝和 (1642?–1708) は，円に内接する正多角形の周を計算していて，次のことに気付いた．簡単のために，$a_n = p_{3\cdot 2^n}$ とおく．上の表のように，数列 $\{a_n\}$ の階差 $a_{n+1} - a_n$ を計算し，さらに，隣り合った階差の比 $\dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$ を計算すると，これは，$0.25 = \dfrac{1}{4}$ に近づくようである．

このことを証明しよう．$t_N = \dfrac{1}{N}\sqrt{N^2 - p_N^2}$ とおけば，

$$\sqrt{N^2 - p_N^2} = Nt_N, \quad N^2(1 - t_N^2) = p_N^2, \quad N^2 t_N^2 = N^2 - p_N^2$$

である．したがって，N を $2N$ でおきかえれば，

$$(2N)^2 t_{2N}^2 = (2N)^2 - p_{2N}^2$$

である．また，(9) より，

$$\begin{aligned} p_{2N}^2 &= 2N\left(N - \sqrt{N^2 - p_N^2}\right) = 2N^2(1 - t_N),\\ (2N)^2 t_{2N}^2 &= (2N)^2 - p_{2N}^2 = 4N^2 - 2N^2(1 - t_N) = 2N^2(1 + t_N). \end{aligned}$$

n	$3 \cdot 2^n$	a_n	$a_{n+1} - a_n$	$\dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$
1	6	3.000000000000	0.105828541230	0.253240493911
2	12	3.105828541230	0.026800072051	0.250804913988
3	24	3.132628613281	0.006721589766	0.250200905185
4	48	3.139350203047	0.001681747844	0.250050206125
5	96	3.141031950891	0.000420521395	0.250012550271
6	192	3.141452472285	0.000105135626	0.250003137488
7	384	3.141557607912	0.000026284236	0.250000784376
8	768	3.141583892148	0.000006571080	

表 1: 階差の比

したがって,

$$
\begin{aligned}
t_{2N}^2 &= \frac{1}{2}(1 + t_N), \\
p_{2N}^2 t_{2N}^2 &= 2N^2(1 - t_N)\frac{1}{2}(1 + t_N) = N^2(1 - t_N^2) = p_N^2.
\end{aligned}
$$

まとめると,

$$
p_{2N} t_{2N} = p_N, \quad t_{2N}^2 = \frac{1}{2}(1 + t_N) \tag{10}
$$

である.

公式 (10) を用いて，関孝和が観察したことを証明しよう．$N = 3 \cdot 2^n$ とおくと，$a_n = p_N$, $a_{n+1} = p_{2N}$ である．そのとき，(10) と

$$
1 - t_{2N}^2 = \frac{p_{2N}^2}{(2N)^2}
$$

から,

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= p_{2N} - p_N = p_{2N} - p_{2N} t_{2N} \\
&= p_{2N}(1 - t_{2N}) = \frac{p_{2N}(1 - t_{2N}^2)}{1 + t_{2N}} \\
&= \frac{p_{2N}^3}{(2N)^2(1 + t_{2N})}.
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{p_{4N}^3}{(4N)^2(1 + t_{4N})}.
$$

ここで，$p_{4N} t_{4N} = p_{2N}$ であるから,

$$
a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{p_{2N}^3}{(4N)^2 t_{4N}^3 (1 + t_{4N})}.
$$

したがって，

$$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} = \frac{p_{2N}^3(2N)^2(1+t_{2N})}{p_{2N}^3(4N)^2t_{4N}^3(1+t_{4N})} = \frac{1+t_{2N}}{4t_{4N}^3(1+t_{4N})} \tag{11}$$

を得る．$n \to \infty$ のとき，$N = 3 \cdot 2^n \to \infty$ であり，$p_N \to \pi$ であるから，

$$t_N = \frac{1}{N}\sqrt{N^2 - p_N^2} = \sqrt{1 - \frac{p_N^2}{N^2}} \to 1$$

である．したがって，$t_{2N} \to 1$, $t_{4N} \to 1$ であるから，(11) より，

$$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} = \frac{1+t_{2N}}{4t_{4N}^3(1+t_{4N})} \to \frac{1+1}{4(1+1)} = \frac{1}{4}$$

を得る．

命題 2. $n \to \infty$ のとき，$\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$ は $\dfrac{1}{4}$ に近づく．

3.3　エイトケン加速法

命題 2 によって，a_n よりも速く円周率 π に近づく数列を構成することができる．いま，数列 b_n を

$$b_n = \frac{4a_{n+1}-a_n}{3} \tag{12}$$

によって定義する．$n \to \infty$ のとき，

$$b_n \to \frac{4\pi - \pi}{3} = \pi$$

である．また，

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{4a_{n+2}-a_{n+1}}{3} - \frac{4a_{n+1}-a_n}{3} \\ &= \frac{4(a_{n+2}-a_{n+1})}{3} - \frac{a_{n+1}-a_n}{3} \\ &= \frac{4(a_{n+1}-a_n)}{3}\left(\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n} - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

である．この右辺の第 1 項，第 2 項ともに，$n \to \infty$ のとき，0 に近づくから，b_n は a_n よりも速く π に収束する．関孝和は本質的にこのような計算によって，π を小数点以下 16 桁まで正しく求めている．与えられた数列からより収束の速い数列を構成するこの方法は，20 世紀の数値計算法において開発されたものであり，**エイトケン加速法**という．

練習問題 4. 表 1 の a_n の値と (12) を用いて電卓で，b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 を計算してみよう．

4　グレゴリーの公式–インドで知られていた方法

ヨーロッパでは，17 世紀になり，ようやくアルキメデスの方法から脱却することができた．グレゴリーの公式と呼ばれるこの公式は 1674 年にライプニッツによって発見されたが，1410 年頃，インドの女性数学者マダヴァが既に発見していた ([1])．ここでは，彼女の方法に従って (微積分を使わずに)，この公式を証明しよう ([2])．

4.1　等比級数

準備として，等比級数の和の公式を復習しておく．$-1 < r < 1$ とし，

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n$$

とおく．

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

であるから，両辺を引き算すれば，

$$S_n - rS_n = 1 - r^{n+1}, \quad (1-r)S_n = 1 - r^{n+1}, \quad S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

を得る．ここで，$n \to \infty$ とすると，$r^{n+1} \to 0$ であるから，

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r} \tag{13}$$

が成り立つ．例えば，$r = \dfrac{1}{2}$ のとき，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

である．これは，図 8 によって，視覚的に理解することができる．

4.2　インドで知られていた方法

図 9 において，$OA = 1$, $AC = a$ のとき，扇形 OAB の面積を $S(a)$ とする．$0 < a \leq 1$ のとき，$S(a)$ を a の級数として求めよう．$0 < r < 1$ とする．各 $n \geq 0$ に対して，線分 AC 上に点 C_n を，$AC_n = ar^n$ となるようにとる．$C_0 = C$ である．直線 OC_n と円との交点を B_n，B_n から垂直に上に引いた直線と直線 OC_{n-1} との交点を D_n とする．三角形 OC_nC_{n-1} の面積は，底辺の長さが $C_nC_{n-1} = r^{n-1}a - r^n a = a(1-r)r^{n-1}$ であり，高さは 1 であるから，$\dfrac{1}{2}a(1-r)r^{n-1}$ である．また，三角形 OB_nD_n は三角形 OC_nC_{n-1} と相似であり，$OB_n = 1$, $OC_n = \sqrt{1 + a^2r^{2n}}$ であるか

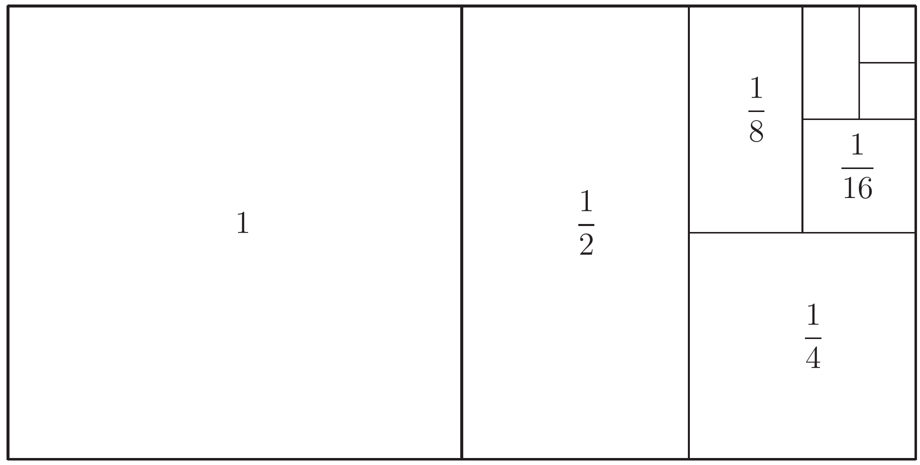


図 8: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$

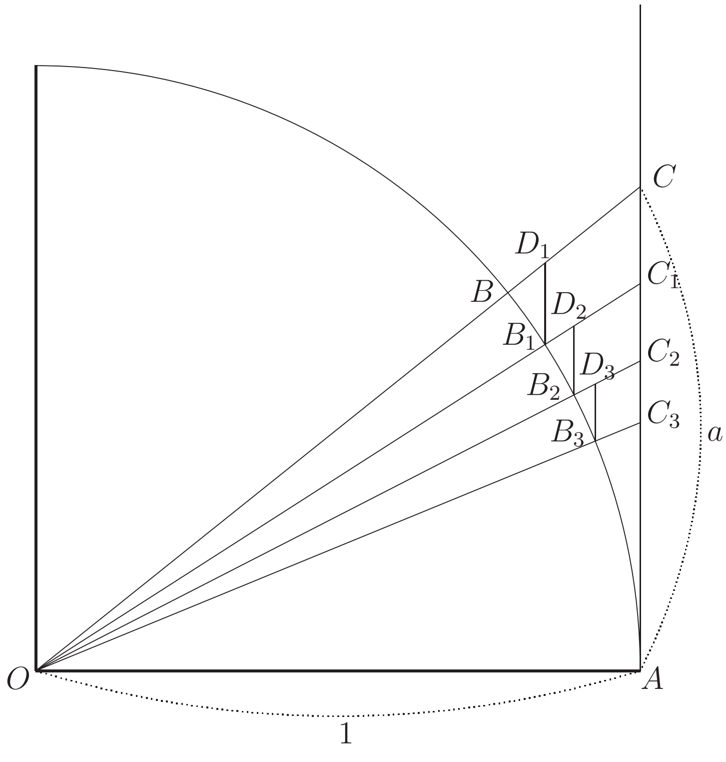


図 9: インドで知られていた方法

ら，三角形 OB_nD_n の面積と三角形 OC_nC_{n-1} の面積の比は，$1:(1+a^2r^{2n})$ である．したがって，三角形 OB_nD_n の面積は

$$\frac{a(1-r)r^{n-1}}{2(1+a^2r^{2n})}=\frac{a(1-r)r^{n-1}}{2}\left(1-a^2r^{2n}+a^4r^{4n}-a^6r^{6n}+\cdots\right)$$

である．これを $n=1,2,\ldots$ について加えれば，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(1-r)r^{n-1}}{2(1+a^2r^{2n})}&=\frac{a(1-r)}{2(1+a^2r^2)}+\frac{a(1-r)r}{2(1+a^2r^4)}+\frac{a(1-r)r^2}{2(1+a^2r^6)}+\frac{a(1-r)r^3}{2(1+a^2r^8)}+\cdots\\
&=\frac{a(1-r)}{2}\left(1-a^2r^2+a^4r^4-a^6r^6+\cdots\right)\\
&\quad+\frac{a(1-r)r^1}{2}\left(1-a^2r^4+a^4r^8-a^6r^{12}+\cdots\right)\\
&\quad+\frac{a(1-r)r^2}{2}\left(1-a^2r^6+a^4r^{12}-a^6r^{18}+\cdots\right)\\
&\quad+\frac{a(1-r)r^3}{2}\left(1-a^2r^8+a^4r^{16}-a^6r^{24}+\cdots\right)\\
&\quad+\cdots\\
&=\frac{a(1-r)}{2}\left(1-a^2r^2+a^4r^4-a^6r^6+\cdots\right)\\
&\quad+\frac{a(1-r)}{2}\left(r-a^2r^5+a^4r^9-a^6r^{13}+\cdots\right)\\
&\quad+\frac{a(1-r)}{2}\left(r^2-a^2r^8+a^4r^{14}-a^6r^{20}+\cdots\right)\\
&\quad+\frac{a(1-r)}{2}\left(r^3-a^2r^{11}+a^4r^{19}-a^6r^{27}+\cdots\right)\\
&\quad+\cdots.
\end{aligned}$$

この式を縦に加えれば,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(1-r)r^{n-1}}{2(1+a^2r^{2n})} &= \frac{a(1-r)}{2}(1+r+r^2+r^3+\cdots) \\
&\quad -\frac{a(1-r)}{2}(a^2r^2+a^2r^5+a^2r^8+\cdots) \\
&\quad +\frac{a(1-r)}{2}(a^4r^4+a^4r^9+a^4r^{14}+a^4r^{19}+\cdots) \\
&\quad -\frac{a(1-r)}{2}(a^6r^6+a^6r^{13}+a^6r^{20}+a^6r^{27}+\cdots) \\
&= \frac{a(1-r)}{2}(1+r+r^2+r^3+\cdots)-\frac{a(1-r)}{2}a^2r^2(1+r^3+r^6+\cdots) \\
&\quad +\frac{a(1-r)}{2}a^4r^4(1+r^5+r^{10}+r^{15}+\cdots) \\
&\quad -\frac{a(1-r)}{2}a^6r^6(1+r^7+r^{14}+r^{21}+\cdots) \\
&= \frac{a(1-r)}{2}\left(\frac{1}{1-r}-\frac{a^2r^2}{1-r^3}+\frac{a^4r^4}{1-r^5}-\frac{a^6r^6}{1-r^7}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a-\frac{a^3r^2}{1+r+r^2}+\frac{a^5r^4}{1+r+r^2+r^3+r^4}-\frac{a^7r^6}{1+r+\cdots+r^6}+\cdots\right).
\end{aligned}
$$

$r\to 1$ とすれば，三角形 OB_nD_n の面積の和は扇形 OAB の面積 $S(a)$ に近づく．
$r\to 1$ のとき，

$$\frac{a^{2n+1}r^{2n}}{1+r+\cdots+r^{2n}} \longrightarrow \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$$

であるから，次を得る．

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}-\frac{a^7}{7}+\cdots\right). \tag{14}$$

特に，$a=1$ とすれば，扇形 OAB の面積は円の面積 π の $1/8$ であるから，

$$\frac{1}{8}\pi=S(1)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right),$$

したがって，円周率を与える次のような公式を得る．

命題 3 (グレゴリーの公式)**.**

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right).$$

4.3　グレゴリーの公式の改良

これは非常にゆっくりと π に近づくので，π の計算には適していない．公式 (14) を工夫して用いることによって，もう少し効率よく π を計算できることを説明しよう．

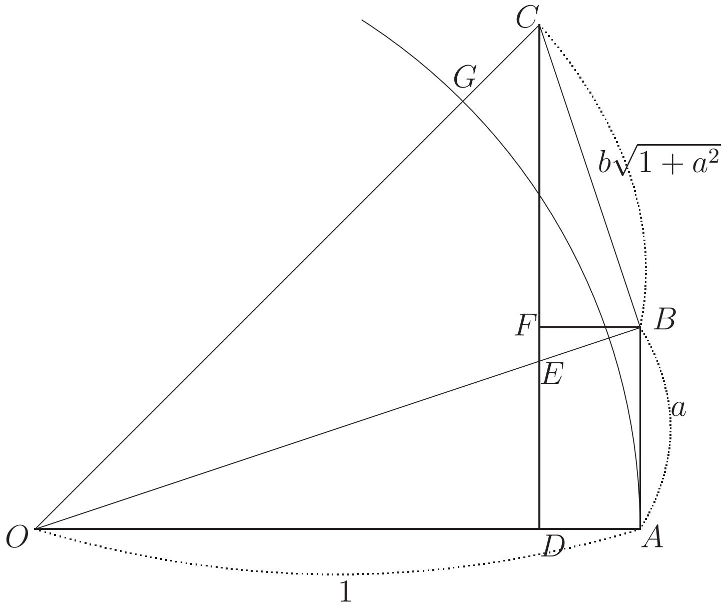


図 10: 逆正接関数の加法定理

図 10 において，$OA = 1$, $AB = a$, $BC = b \cdot OB$, $\angle OAB = 90°$, $\angle OBC = 90°$, $0 < a, b < 1$ とする．点 C から直線 OA におろした垂線を CD とする．直線 CD と直線 OB の交点を E とし，点 B から直線 CD におろした垂線を BF とする．$c = DC/OD$ とおけば，扇形 OAG の面積は $S(c) = S(a) + S(b)$ である．c を a, b を用いて表そう．$\triangle OAB \backsim \triangle ODE$, $\triangle ODE \backsim \triangle BFE$, $\triangle BFE \backsim \triangle CFB$ より，$\triangle OAB \backsim \triangle CFB$ である．したがって，

$$OB : CB = AB : FB, \quad OA : CF = AB : FB$$

である．$CB = b \cdot OB$, $AB = a$ より，

$$OB : b \cdot OB = a : FB, \quad FB = ab$$

を得る．$OA = 1$ であるから，

$$1 : CF = a : ab, \quad CF = b$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned} CD &= DF + FC = AB + FC = a + b, \\ OD &= OA - DA = OA - FB = 1 - ab, \\ c &= \frac{CD}{OD} = \frac{a+b}{1-ab}. \end{aligned}$$

したがって，

$$S\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) = S(a) + S(b) \tag{15}$$

が得られた．特に，(15) において，$a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{3}$ とおけば，

$$\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}} = 1$$

であるから，

$$\frac{\pi}{8} = S(1) = S\left(\frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{1}{3}\right)$$

を得る．これは図 11 によって視覚的に理解できる．同様にして，次の公式が証明

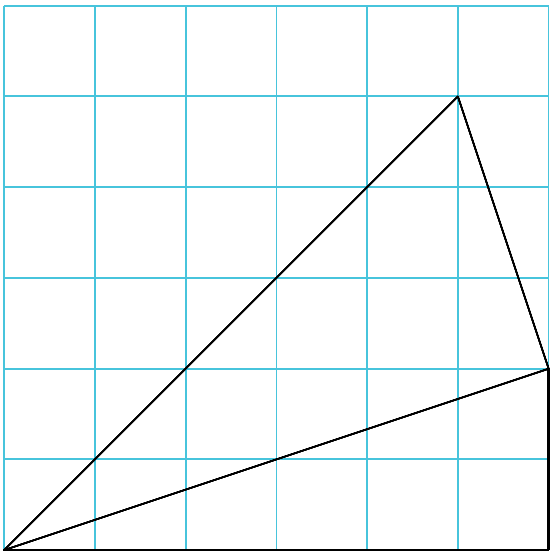


図 11: $S(1/2) + S(1/3) = S(1)$

される．

命題 4 (マチンの公式)**.**

$$\begin{aligned}\pi = {} & 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} - \frac{1}{11\cdot 5^{11}} + \cdots\right) \\ & - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \frac{1}{9\cdot 239^9} - \frac{1}{11\cdot 239^{11}} + \cdots\right).\end{aligned} \tag{16}$$

[証明]　(15) より，

$$2S\left(\frac{1}{5}\right)=S\left(\frac{1}{5}\right)+S\left(\frac{1}{5}\right)=S\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}\right)=S\left(\frac{5}{12}\right).$$

これから，再び (15) を使えば，

$$4S\left(\frac{1}{5}\right)=S\left(\frac{5}{12}\right)+S\left(\frac{5}{12}\right)=S\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}}\right)=S\left(\frac{120}{119}\right).$$

同様にして，

$$S(1)+S\left(\frac{1}{239}\right)=S\left(\frac{1+\frac{1}{239}}{1-1\times\frac{1}{239}}\right)=S\left(\frac{120}{119}\right).$$

よって，

$$\begin{aligned}S(1)+S\left(\frac{1}{239}\right)&=4S\left(\frac{1}{5}\right),\\ S(1)&=4S\left(\frac{1}{5}\right)-S\left(\frac{1}{239}\right).\end{aligned}$$

$S(1)=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，(14) から，マチンの公式を得る．　□

練習問題 5. マチンの公式 (16) の第 5 項までの和，第 6 項までの和を計算することによって，π の値を上下から評価してみよう．

5　ガウスの公式

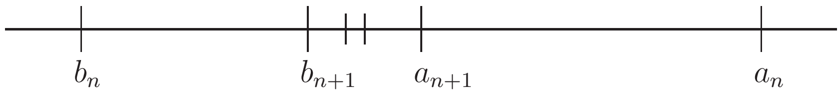
5.1　算術幾何平均

与えられた正の実数 $a>b$ から，$a_0=a$, $b_0=b$,

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\qquad n=0,1,2,\ldots$$

によって数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定義する．アルキメデスの方法のときと同様に，

$$b<b_1<b_2<\cdots<b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n<\cdots<a_2<a_1<a.$$



よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ が存在する．さらに，

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

より，$\alpha = \beta$ を得る．極限値 α を a と b の**算術幾何平均**といい，$M(a,b)$ で表す．

例 1. $M(2,1)$ を計算してみよう．収束はかなり速いことがわかる．

n	a_n	b_n	$a_n - b_n$
0	2.00000000000	1.00000000000	1.00000000000
1	1.50000000000	1.41421356237	0.08578643763
2	1.45710678119	1.45647531512	0.00063146606
3	1.45679104815	1.45679101394	0.00000003421
4	1.45679103105	1.45679103105	0.00000000000

収束が速い理由は，次の等式からわかる．

$$\begin{aligned}(a_{n+1} - b_{n+1}) &= \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \\ &= \frac{(a_n - b_n)^2}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2}. \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，$a_n > b_n \geq 1$ とすれば，$0 < a_n - b_n < 10^{-N}$ のとき，$0 < a_{n+1} - b_{n+1} < 10^{-2N}$ となる．

定理 1 (ガウスの公式)**.** $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $c_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$ とすれば，

$$\pi = \frac{2M\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}.$$

$s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k c_k^2, \quad p_n = \frac{2a_n^2}{1 - s_n}$ とおけば，

p_1	3.	18767	26427	12108	62720	19299	70525	36923	26510
p_2	3.	14168	02932	97653	29391	80704	24560	00938	27957
p_3	3.	14159	26538	95446	49600	29147	58818	04348	61088
p_4	3.	14159	26535	89793	23846	63606	02706	63132	17577
p_5	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971
π	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971

p_3 は小数第 9 位まで，p_4 は小数第 20 位まで，p_5 は小数第 40 位まで，π と一致している．このように，算術幾何平均を用いたガウスの公式は，円周率 π を高速に計算することに適している．この公式によれば，p_{20} 程度で π を約 100 万桁計算できる．ガウスは数値計算によって，1799 年にこの公式を発見して日記に次のように記している．

この事実の証明は必ず解析学の全く新しい分野を開くであろう．

練習問題 6. ガウスの公式 (定理 1) によって，p_1, p_2, p_3 を計算してみよう．

A 筆算で平方根を計算する

アルキメデスの方法では，正の実数 a が 10 進小数で与えられたとき，その平方根 $\sqrt{a}$ を計算しなければならない．これは**開平法**と呼ばれる筆算を用いて実行できることを説明する．

$$\sqrt{10^{2k}a} = 10^k\sqrt{a}$$

であるから，$\sqrt{a}$ を小数第 k 位まで求めたければ，$\sqrt{10^{2k}a}$ の整数部分を求めればよい．$b = 10^{2k}a > 1$ としてよい．b を小数点を基準にして 2 桁ずつに区切ることによって，

$$b = b_0 10^{2n} + b_1 10^{2n-2} + \cdots + b_{n-1}10^2 + b_n + b_{n+1}10^{-2} + b_{n+2}10^{-4} + \cdots$$

とかく．ここで，各 b_i は 0 以上 99 以下の整数であり，$b_0 \geq 1$ である (100 進法表示)．$10^{2n} \leq b < 10^{2n+2}$ であるから，$10^n \leq \sqrt{b} < 10^{n+1}$ である．各 $i = 0, 1, \ldots$ について，

$$Y_i = b_0 10^{2i} + b_1 10^{2i-2} + \cdots + b_{i-1}10^2 + b_i$$

とおく．X_i を $X_i^2 \leq Y_i$ を満たす最大の整数であるようにとる．

$$X_i = c_0 10^i + c_1 10^{i-1} + \cdots + c_{i-1}10 + c_i, \quad c_0, c_1, \ldots, c_i \text{ は 0 以上 9 以下の整数}$$

とかく．そのとき，

$$X_i = 10Z + c_i, \quad Z = c_0 10^{i-1} + c_1 10^{i-2} + \cdots + c_{i-1}$$

とかける．

$$100Z^2 \leq (10X_{i-1}+c_i)^2 = X_i^2 \leq Y_i = 100Y_{i-1}+b_i < 100(Y_{i-1}+1)$$

より，$Z^2 < Y_{i-1}+1$, したがって，$Z^2 \leq Y_{i-1}$ である．また，$10(Z+1) > 10Z+c_i = X_i$ であるから，X_i のとり方から，

$$100(Z+1)^2 > Y_i = 100Y_{i-1}+b_i \geq 100Y_{i-1}.$$

すなわち，$(Z+1)^2 > Y_{i-1}$ である．これは，Z が $Z^2 \leq Y_{i-1}$ を満たす最大の整数であることを示している．したがって，$Z = X_{i-1}$ である．また，c_i は

$$100Z^2 + 20Zc_i + c_i^2 = X_i^2 \leq Y_i = 100Y_{i-1}+b_i,$$

$$20Zc_i + c_i^2 \leq 100(Y_{i-1}-Z^2)+b_i \tag{18}$$

を満たす最大の整数として一意的に定まる．$100(Y_{i-1}-Z^2)+b_i$ を $20Z$ で割った商 Q とすると，

$$20ZQ \leq 100(Y_{i-1}-Z^2)+b_i < 20Z(Q+1)$$

であるから，

$$20Z(Q+1)+(Q+1)^2 > 20Z(Q+1) > 100(Y_{i-1}-Z^2)+b_i$$

である．したがって，$c_i \leq Q$ である．よって，c_i の求めには，$c_i = Q$ がこの不等式を満たすかどうかを計算し，不等式を満たせば，$c_i = Q$ とすればよい．満たさなければ，$c_i = Q-1$ ではどうかというように，一つずつ小さくしていくことによって，最大のものを見つける．このようにして，$X_n^2 \leq Y_n \leq b < (X_n+1)^2$ を満たす X_n を求められる．

$$X_n \leq \sqrt{b} = 10^k\sqrt{a} < X_n + 1$$

であるから，$10^{-k}X_n \leq \sqrt{a} < 10^{-k}X_n + 10^{-k}$ である．以上によって，$\sqrt{a}$ が小数第 k 位まで求められた．このアルゴリズムに基づいて筆算によって平方根を求める方法を**開平法**という．具体例で説明しよう．

例 2. 開平法によって，$\sqrt{3}$ を小数第 4 位まで求めよう．

					1.	7	3	2	0
1					$\sqrt{3}$	00	00	00	
1					1				
2	$\boxed{7}$				2	00			
	7				1	89			
3	4	$\boxed{3}$				11	00		
		3				10	29		
3	4	6	$\boxed{2}$				71	00	
			2				69	24	
3	4	6	4	$\boxed{0}$			1	76	00
				0					00
3	4	6	4	0			1	76	00

上の計算で，まず，1 は $c_0^2 \leq 3$ を満たす最大の整数として定まる．小数第 1 位の 7 は $(20 \cdot 1 + c_1)c_1 \leq 200$ を満たす最大の整数として定まる ($c_1 = 9$ はダメ．$c_1 = 8$ もダメ)．小数第 2 位の 3 は $(20 \cdot 17 + c_2)c_2 \leq (200 - 189) \cdot 100 = 1100$ を満たす最大の整数として定まる (1100 を 340 で割った商は 3, $c_2 = 3$ は上の不等式を満たす)．小数第 3 位の 2 は，$(20 \cdot 173 + c_3)c_3 \leq (1100 - 1029) \cdot 100 = 7100$ を満たす最大の整数として定まる (7100 を 3460 で割った商は 2, $c_3 = 2$ は上の不等式を満たす)．以上によって，$\sqrt{3} = 1.7320\cdots$ である．

練習問題 7. 開平法によって，$\sqrt{2-\sqrt{3}}$ を小数第 3 位まで求めてみよう．

$\sqrt{3} = 1.7320\cdots$ であるから，$2 - \sqrt{3} = 0.2679\cdots$ である．

				0.	5	1	7
0				$\sqrt{0.}$	26	79	00
0				0			
0	$\boxed{5}$				26		
	5				25		
1	0	$\boxed{1}$			1	79	
		1			1	01	
1	0	2	$\boxed{7}$			78	00
			7			71	49
1	0	3	4			6	51

したがって，$\sqrt{0.2679} = 0.517\cdots$ である．同様に，$\sqrt{0.2680} = 0.517\cdots$ である．よって，$\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0.517\cdots$ である．

例 2 から，

$$q_{12} = 12(2 - \sqrt{3}) < 12 \cdot 0.268 = 3.216$$

を得る．練習問題 7 より，$p_{12} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ は，

$$3.102 = 6 \times 0.517 < p_{12} < 6 \times 0.518 = 3.108$$

を満たす．$p_{12} < \pi < q_{12}$ であるから，

$$3.102 < \pi < 3.216$$

であることがわかった．

B　ガウスの公式の証明

ここでは，定理 1 の証明の概略を述べる ([3] を参照)．$0 \leq k < 1$ に対して，次の積分を**楕円積分**という．

定義 1.

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (\textbf{第 1 種楕円積分}),$$
$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \quad (\textbf{第 2 種楕円積分}).$$

いずれも，$x = \sin\theta$ と置換することによって，右側の表示を得る．

定義 2. $a > b > 0$, $k = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ に対して，

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}},$$
$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

とおけば，$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より，

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{a}K(k),$$
$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}\,d\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = aE(k).$$

よって，

$$I(a,b) = \frac{1}{a}K(k), \quad J(a,b) = aE(k). \tag{19}$$

命題 5.

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a,b).$$

[証明]　$b\tan\theta = u$ とおけば，$\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{b}{\cos^2\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}$, $\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{d\theta}{du} = \dfrac{\cos^2\theta}{b\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{b^2+u^2}}$. よって，

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta\sqrt{a^2+b^2\tan^2\theta}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\,du. \end{aligned}$$

したがって，

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)(ab+u^2)}}\,du.$$

ここで，$u = \dfrac{1}{2}\left(v - \dfrac{ab}{v}\right)$ とおけば，$ab + u^2 = \dfrac{1}{4v^2}(ab+v^2)^2$, $\dfrac{1}{\sqrt{ab+u^2}}\dfrac{du}{dv} = \dfrac{1}{v}$, $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + u^2 = \dfrac{1}{4}(a^2+v^2)(1+b^2v^{-2}) = \dfrac{1}{4v^2}(a^2+v^2)(b^2+v^2)$ であり，v が 0 から ∞ まで動くとき，u は $-\infty$ から ∞ まで単調増加する．よって，

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2+v^2)(b^2+v^2)}}\,dv = I(a,b).$$

□

命題 6. $k' = \sqrt{1-k^2}$ とおけば，$K(k) = \dfrac{\pi}{2M(1,k')}$.

[証明]　$a_0 = 1$, $b_0 = k'$ として，$n = 0, 1, \ldots$ について，$a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$ とする．$m = M(1,k')$ とおけば，定義から，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = m$ である．命題 5 の等式

$$I(1,k') = I(a_1,b_1) = \cdots = I(a_n,b_n)$$

において，$n \to \infty$ とすれば，

$$K(k) = I(1,k') = I(m,m) = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{2M(1,k')}.$$

□

次に，$J\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ と $J(a,b)$ の関係を調べよう．そのために，補題をいくつか準備する．証明は省略する．

補題 1. $\dfrac{dE}{dk} = \dfrac{1}{k}(E-K)$, $\dfrac{dK}{dk} = \dfrac{1}{kk'^2}(E-k'^2K)$.

補題 2.

$$\text{(a)}\ \ K(k)=\frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right),\qquad \text{(b)}\ \ K(k)=\frac{2}{1+k'}K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right),$$

$$\text{(c)}\ \ E(k)=\frac{1+k}{2}E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)+\frac{k'^2}{2}K(k),\quad \text{(d)}\ \ E(k)=(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)-k'K(k).$$

命題 7.

$$2J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)-J(a,b)=abI(a,b).$$

[証明]　$k'=\dfrac{b}{a}$, $k=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$, $\dfrac{1-k'}{1+k'}=\dfrac{a-b}{a+b}$ である．$J(a,b)=aE(k)$ より，

$$J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=\frac{a+b}{2}E\left(\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}}\right)=\frac{a+b}{2}E\left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

よって，$J(a,b)=aE(k)$ と $I(a,b)=\dfrac{1}{a}K(k)$ に注意すれば，補題 2 の (d) より，

$$\begin{aligned}
2J\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)-J(a,b)&=(a+b)E\left(\frac{a-b}{a+b}\right)-aE(k)\\
&=(a+b)E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)-aE(k)\\
&=(a+b)\left(\frac{1}{1+k'}E(k)+\frac{k'}{1+k'}K(k)\right)-aE(k)\\
&=bK(k)=abI(a,b).
\end{aligned}$$

□

補題 3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^nc_n^2=0.$

[証明]　(17) からわかる．□

命題 8.

$$J(a,b)=\left(a^2-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}c_n^2\right)I(a,b).$$

[証明]　$A_n=2^n\left(J(a_n,b_n)-a_n^2I(a_n,b_n)\right)$ とおく．命題 7 と命題 5 より，

$$\begin{aligned}
A_{n+1}-A_n&=2^n\left(2J(a_{n+1},b_{n+1})-J(a_n,b_n)\right)-2^{n+1}a_{n+1}^2I(a_{n+1},b_{n+1})+2^na_n^2I(a_n,b_n)\\
&=2^na_nb_nI(a_n,b_n)-2^{n+1}a_{n+1}^2I(a_n,b_n)+2^na_n^2I(a_n,b_n)\\
&=2^{n-1}\left(2a_nb_n-(a_n+b_n)^2+2a_n^2\right)I(a_n,b_n)\\
&=2^{n-1}(a_n^2-b_n^2)I(a_n,b_n)=2^{n-1}c_n^2I(a,b).
\end{aligned}$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
-2^{-n}A_n &= a_n^2 I(a_n,b_n) - J(a_n,b_n) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2 - a_n^2\cos^2\theta - b_n^2\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a_n^2-b_n^2)\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta \le c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}} = c_n^2 I(a_n,b_n).
\end{aligned}
$$

したがって，$0 < -A_n \le 2^n c_n^2 I(a_n,b_n) = 2^n c_n^2 I(a,b)$．補題 3 より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n c_n = 0$ が成り立つから，

$$
A_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(A_{n+1}-A_n) = \lim_{N\to\infty} A_{N+1} = 0.
$$

これから，

$$
\begin{aligned}
J(a,b) - a^2 I(a,b) = A_0 &= -\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n+1}-A_n) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2 I(a,b) \\
&= -I(a,b)\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2, \\
J(a,b) &= \left(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) I(a,b).
\end{aligned}
$$

□

次の**ルジャンドルの関係式**の証明は次節で与える．

命題 9 (ルジャンドルの関係式)**.**

$$
E(k)K(k') + E(k')K(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2}.
$$

[ガウスの公式の証明]

$a = 1,\ b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおけば，$k = k' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．命題 9 より，

$$
2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.
$$

命題 8 より，

$$
E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
$$

よって，
$$\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}2^n c_n^2\right)K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}.$$
命題 6 より，
$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2M\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$
であるから，
$$\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}2^n c_n^2\right)\frac{\pi^2}{4M\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\pi}{2}.$$
以上によって，ガウスの公式を得る．

C　ルジャンドルの関係式の証明

定義 3. $a,b,c\in\mathbb{C}$，c は 0 以下の整数ではないとする．$n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 1$ に対して，$a^{(n)}=a(a+1)\cdots(a+n-2)(a+n-1)$, $a^{(0)}=1$ とおく．そのとき，級数
$$F(a,b,c;u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}b^{(n)}}{n!c^{(n)}}u^n \tag{20}$$
を**ガウスの超幾何級数**と呼ぶ．

命題 10. 超幾何級数 $f(u)=F(a,b,c;u)$ は $|u|<1$ において収束し，単位円板上の正則関数を表す．さらに，これは微分方程式
$$u(1-u)\frac{d^2f}{du^2}+(c-(a+b+1)u)\frac{df}{du}-abf=0 \tag{21}$$
を満たす．

$(1-x)^{-1/2}$ のテーラー展開を用いて，$K(k)$ を項別積分すれば，

命題 11. $K(k)=\dfrac{\pi}{2}F\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1;k^2\right)$.

命題 10 と命題 11 から微分方程式をかきなおせば，

補題 4. $K'(k)=K(k')$ とおけば，$K(k)$, $K'(k)$ は 2 階線形微分方程式
$$(k^3-k)\frac{d^2y}{dk^2}+(3k^2-1)\frac{dy}{dk}+ky=0 \tag{22}$$
の解である．

K と K' が微分方程式 (22) の解であることから，

補題 5. $K'(k) = K(k')$, $E'(k) = E(k')$ とおけば，$EK' + E'K - KK'$ は定数である．

[ルジャンドルの関係式の証明]　補題 5 より，$W = EK' + E'K - KK'$ は定数である．$\lim_{k\to 0} W$ を計算することによってこの定数を求めよう．$K(0) = \dfrac{\pi}{2}$ である．また，

$$E(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \big[\sin\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$W = (E-K)K' + E'K$ であるから，

$$\lim_{k\to 0} W = \lim_{k\to 0}(E-K)K' + E(1)K(0) = \lim_{k\to 0}(E-K)K' + \frac{\pi}{2}.$$

よって，$\lim_{k\to 0}(E-K)K' = 0$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
(K-E)K' &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\right) \times K(k') \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\theta}}\right) \\
&\le k\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\theta}}\right) \\
&= kK\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}} \\
&\le kK\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\,d\theta}{\sqrt{k^2\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta}} = kK\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

したがって，

$$0 < (K-E)K' < kK\frac{\pi}{2} \to 0 \quad (k \to 0).$$

□

参考文献

[1] ジャンポール・ドゥラエ，π–魅惑の数，朝倉書店，2001.

[2] 小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.

[3] 竹之内修・伊藤隆，　π –π の計算 アルキメデスから現代まで–，　共立出版，2007.