平成 24 年度　上越教育大学公開講座

折紙の数学

日時：8 月 29 日 (水)，9 月 5 日 (水)，9 月 12 日 (水)，9 月 19 日 (水)，9 月 26 日 (水)
19:00〜21:00
場所：上越教育大学　人 101 教室

目 次

1　はじめに

日本人は誰でも子ども時代に鶴を折った経験を持っているように，折紙は日本の伝統文化の一つです．しかし，折紙を用いれば，定規とコンパスでは作図できないような任意の角の三等分や立方倍積の問題を解くことができることは一般の人には知られていない．このようなことが可能であることについて，その数学的な理由を解説すると同時に，実際に正 7 角形や正 13 角形などを折紙で折ることを体験してもらう．

定規とコンパスによる作図とは，直線と直線の交点，直線と円の交点，円と円の交点を求めることによるものであるから，座標平面で考えると，代数的には連立 2 元 1 次方程式や 2 次方程式を解くということに対応する．このことから，2 次方程式を繰り返して解くことによって得られるような数と対応するものだけが，定規とコンパスによって作図可能になる．

角の三等分や，与えられた立方体の 2 倍の体積を持つ立方体を作図するという立方倍積の問題は本質的に 3 次方程式を解くことになり (立方倍積の問題では，$x^3 = 2$ を解く)，それは 2 次方程式を解くことによっては得られない．

しかし，折紙を使えば，2 次方程式が解けるだけでなく，3 次方程式も解けるので，角の三等分や立方倍積の問題が解ける (近似解ではなく，理論的には正しい解が求まる)．2 次方程式と 3 次方程式が解けることから，4 次方程式も解けることになる．このことから，定規とコンパスでは作図できなかった，正 7 角形，正 13 角形も折紙では作図できることになる (正 3 角形，正 5 角形，正 17 角形は定規とコンパスで作図できる)．

このように折紙を折ることで 3 次方程式が解けることの背後には，実は放物線の性質が隠れていることを説明したい．

この講座を準備するにあたり，ロベルト・ゲレトシュレーガー氏の著書 [1] を主に参考にした．また，インターネット上で折紙をキーワードに含めて検索して得られる様々な情報も参考にした．

2　折紙による有理数の作図

一辺の長さが 1 の正方形の折り紙があるとき，長さ $\dfrac{1}{3}$ はどうやって折れるだろうか？

一般に，$0 < x, w \leq 1$ とすれば，一辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ の辺 AB 上に点 P を $AP = w$ となるようにとり，辺 BC 上に点 Q を $BQ = x$ となるようにとる．AQ と BP の交点を R とする．R から辺 AB に下ろした垂線の足を H とする．そのとき，$\triangle ARP$ と $\triangle QRB$ は相似であるから，

$$AR : QR = w : x, \qquad QR = \frac{x}{w} AR.$$

$\triangle ARH$ と $\triangle AQB$ は相似であるから，$AH = y$, $HB = z$ とすれば，

$$AR : AQ = y : 1, \qquad y = \frac{AR}{AQ}.$$

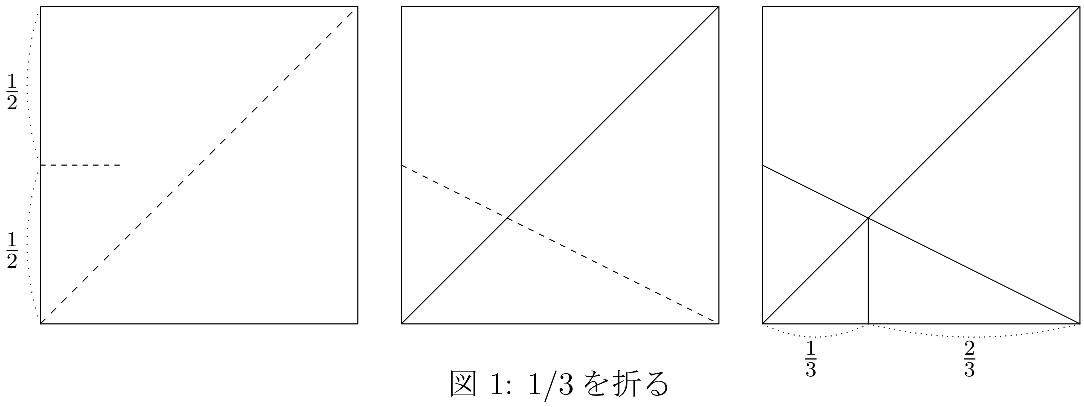

図 1: 1/3 を折る

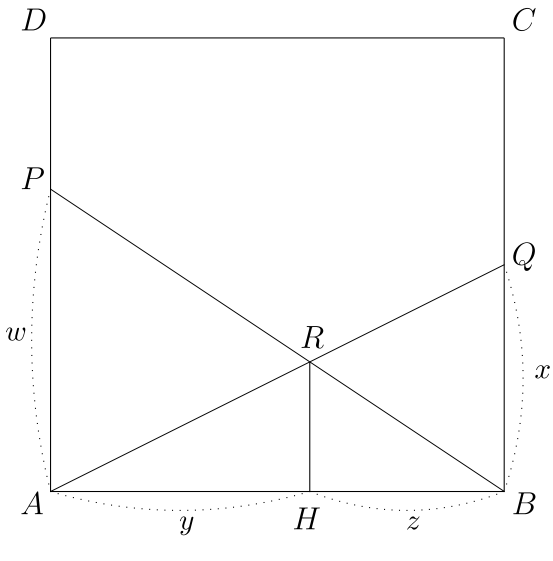

図 2: 有理数を折る

$AQ = AR + RQ$ より，

$$y = \frac{AR}{AR+RQ} = \frac{AR}{AR+\dfrac{x}{w}AR} = \frac{w}{w+x},$$
$$z = 1 - y = \frac{x}{w+x}.$$

正の有理数 $\dfrac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z},\ b > a > 0,\ \gcd(a,b) = 1)$ に対して，

$$2^n \geq \max(a, b-a) > 2^{n-1}$$

となる自然数 n をとり，

$$w = \frac{a}{2^n}, \qquad x = \frac{b-a}{2^n}$$

とおく．明らかに，w, x は折紙で折れるから，図 2 によって，

$$y = \frac{w}{w+x} = \frac{a}{b}$$

も折紙で折れる．

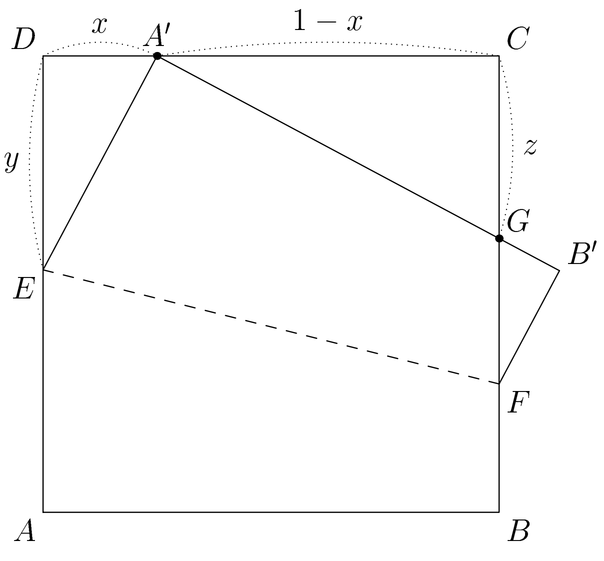

図 3: 芳賀の定理

次に芳賀の定理として知られている，1/3 を折るときなどに有効となる簡単な方法を説明しよう．図 3 のように一辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ を考え，辺 DC 上に $DA' = x$ となる点 A' をとる．頂点 A を点 A' に重なるように折るときの折れ線を EF とし，頂点 B を折り返した点を B' とする．$A'B'$ と BC の交点を G とする．$DE = y$, $CG = z$ とするとき，y, z を x を用いて表そう．2 つの直角三角形 $\triangle EDA'$ と $\triangle A'CG$ において，

$$\angle DEA' = 90^\circ - \angle DA'E = 180^\circ - 90^\circ - \angle DA'E = \angle CA'G.$$

よって，$\triangle EDA'$ と $\triangle A'CG$ は相似である．したがって，

$$y:(1-x)=x:z, \qquad yz=x(1-x).$$

一方，$EA'=EA=1-y$ であるから，直角三角形 $\triangle EDA'$ において三平方の定理を用いれば，

$$x^2+y^2=(1-y)^2, \qquad x^2+y^2=1-2y+y^2, \qquad y=\frac{1-x^2}{2}=\frac{(1-x)(1+x)}{2}.$$

したがって，

$$z=\frac{x(1-x)}{y}=\frac{x(1-x)}{\dfrac{(1-x)(1+x)}{2}}=\frac{2x}{1+x}.$$

特に，$a\geq 3$ を奇数とするとき，自然数 n を $2^{n-1}<a<2^n$ にとって，$x=(a-2^{n-1})/2^{n-1}$ とすれば，

$$z=\frac{\dfrac{2(a-2^{n-1})}{2^{n-1}}}{1+\dfrac{a-2^{n-1}}{2^{n-1}}}=\frac{2a-2^n}{a}.$$

例えば，$a=3$ とすると，$x=1/2$, $z=2/3$ である．$a=5$ とすると，$x=1/4$, $z=2/5$ である．$a=7$ とすると，$x=3/4$, $z=6/7$ である．$a=13$ とすると，$x=5/8$, $z=10/13$ である．

$10/13$ がとれれば，$3/13$ がとれ，これを 4 倍して $12/13$ がとれる．したがって，$1/13$ がとれる．このようにして，$z=(2a-2^n)/a$ がとれれば，$1/a$ もとれることになる．

$a=3$, $x=1/2$, $z=2/3$ のとき，$y=3/8$ である．このとき，$x:y=4:3$ であるから，直角三角形 $\triangle EDA'$ の辺の長さの比は $3:4:5$ である．

3　角の三等分

与えられた角を二等分することは容易にできる．図 4 において，点 P を正方形 $ABCD$ の辺 BC または辺 CD 上にとって $\angle PAB$ が与えられた角度 (鋭角) とするとき，頂点 B が線分 AP 上に重なるように直線 AE を折れ線として折れば，$\angle EAB=\frac{1}{2}\angle PAB$ である．

それでは，$\angle PAB$ を三等分するにはどう折ればよいだろうか．以下に紹介する見事な方法は阿部恒氏によるものである ([2])．図 5 において，点 P を正方形 $ABCD$ の辺 BC または辺 CD 上にとって $\angle PAB$ が与えられた角度 (鋭角) とする．点 F は辺 AD の中点でもよいが，それより少し A よりに任意にとる．点 G を AF の中点とする．辺 BC 上に点 $\bar{F}$,$\bar{G}$ を $F\bar{F}$, $G\bar{G}$ が AB と平行になるようにとる．点 F が線分 AE 上に，点 A が線分 $G\bar{G}$ 上に重なるように折る．そのときの折れ線を IH とし，点 F が点 F' に，点 A が点 A' に折り重なるとする．点 G が点 G' に折り重なるとすれば，G' は線分 $A'F'$ の中点である．$A'G\perp FA$, $FG=AG$ であるから，$\triangle A'FA$ は二等辺三角形である．$\triangle AF'A'$ は

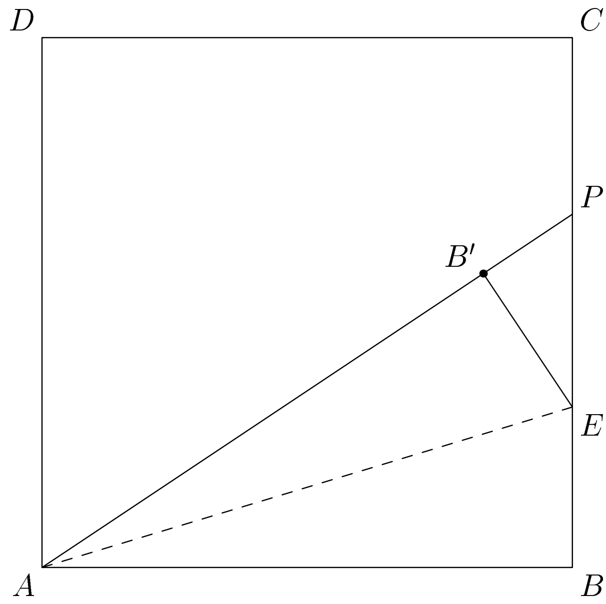

図 4: 角の二等分

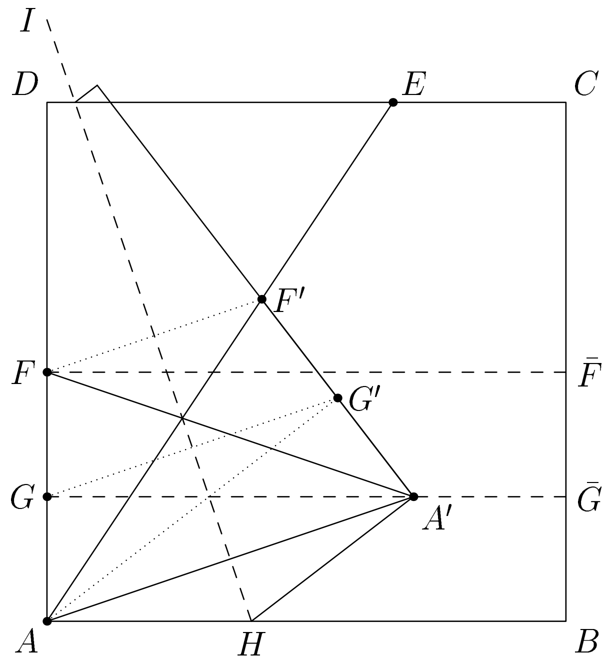

図 5: 角の三等分

$\triangle A'FA$ を直線 IH に関して線対称移動したものであるから，$\triangle AF'A' \equiv \triangle A'FA$ であり，$\triangle AF'A'$ も二等辺三角形である．よって，$AF' = AA'$ である．$F'G' = A'G'$ であるから，$AG' \perp A'F'$ であり，$\angle F'AG' = \angle A'AG'$ である．この角度を α とすれば，$\angle AA'G = \alpha$ である．$G\bar{G}$ は AB と平行であるから，$\angle A'AH = \angle AA'G = \alpha$ である．したがって，

$$\angle EAB = \angle F'AG' + \angle A'AG' + \angle A'AH = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha,$$

$\angle A'AH = \frac{1}{3}\angle EAB$ である．

4　平方根の作図

定規とコンパスで与えられた長さ a の平方根 $\sqrt{a}$ を作図するには次のようにすればよい．図 6 のように，長さ 1 の線分 AC と長さ a の線分 CB が与えられているとする．そのとき，線分 AB の中点を中心とする AB を直径とする円を描く．C を通る AB の垂線と円の交点の 1 つを D とする．このとき，$\angle ADB$ は直径 AB 上の円周角であるから，$90°$ である．2 つの直角三角形 $\triangle ACD$ と $\triangle DCB$ において，

$$\angle CAD = 90° - \angle ADC = \angle CDB$$

である．よって，$\triangle ACD$ と $\triangle DCB$ は相似である．したがって，$AC = 1$, $BC = a$ より，

$$AC : DC = DC : BC, \qquad 1 : DC = DC : a, \qquad DC^2 = a, \qquad DC = \sqrt{a}.$$

同じことを折紙で行うことによって，$\sqrt{a}$ を折紙で作図してみる．図 7 において，A は折紙の 1 つの頂点とし，A を端点とする一つの辺上に点 C と点 B が $AC = 1$, $CB = a$ となるように与えられているとする．まず，点 C を通る線分 AB の垂線 CP を折る．次に，線分 AB の中点 O を折る．さらに，点 B が直線 CP に重なるように点 O を通る直線 OE で折る．そのとき，点 B を折り返した点を D とすれば，$OD = OB$ であるから，D は O を中心とする半径 $(a+1)/2$ の円と，C を通る AB の垂線 CP の交点である．ゆえに，$CD = \sqrt{a}$ である．

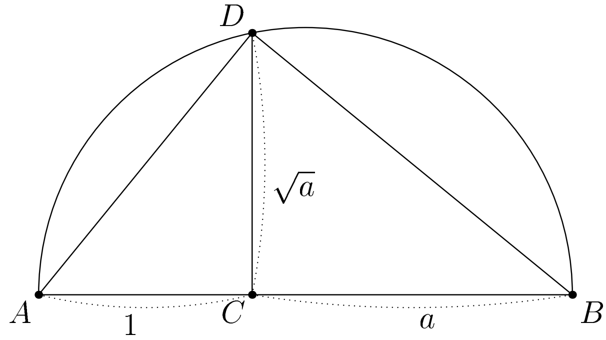

図 6: $\sqrt{a}$ の作図

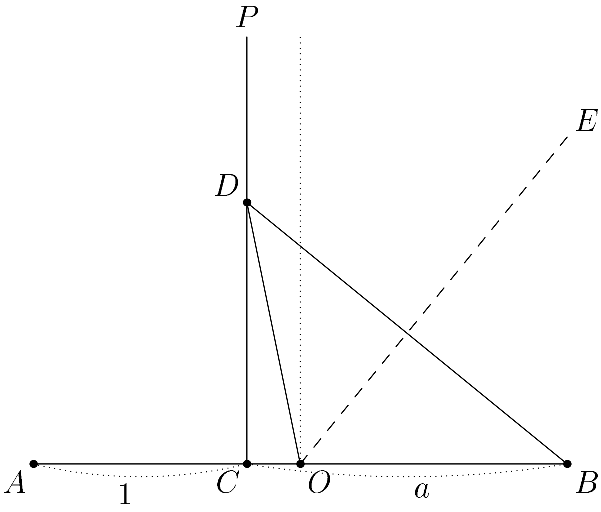

図 7: $\sqrt{a}$ を折る (1)

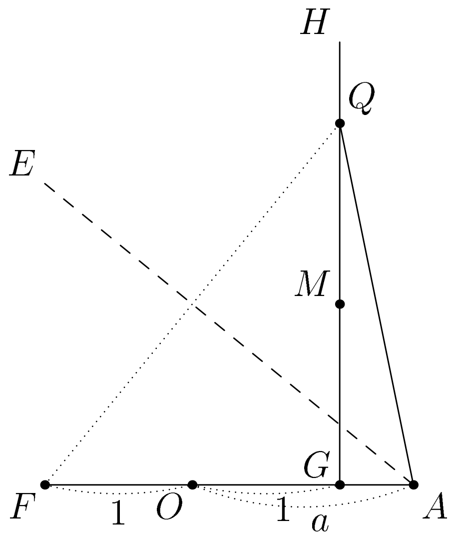

図 8: $\sqrt{a}$ を折る (2)

これとは別の平方根の折り方として次のものがある．図 8 において，F は折紙の 1 つの頂点とし，F を端点とする一つの辺上に点 O,G, A が $OF = OG = 1$, $OA = a$ となるように与えられているとする．まず，点 G を通る線分 FA の垂線 GH を折る．次に，点 F が直線 GH 上にくるように点 A を通る直線 AE で折る．そのとき，点 F を折り返した点を Q とすれば，$AQ = AF = a + 1$ である．$GA = |a - 1|$ であるから，三平方の定理によって，

$$GQ^2 + GA^2 = AQ^2, \qquad GQ^2 = (a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a, \qquad GQ = 2\sqrt{a}.$$

よって，線分 GQ の中点を M とすれば，$GM = \sqrt{a}$ である．

a の値を変化させたとき，折れ線 AE や二等辺三角形 $\triangle AQF$ はどう動くだろうか？ Geogebra というフリーソフトを使って，コンピューターの画面で確認してみよう．

5　放物線の性質

平面上に直線 ℓ と ℓ 上にない点 F が与えられているとき，点 F からの距離と直線 ℓ からの距離が等しいような点 P の軌跡を**放物線**という．点 F をこの放物線の**焦点**，直線 ℓ を**準線**という．この平面に $F = (0, a)$, $\ell : y = -a$ $(a > 0)$ となるような直交座標を導入すれば，放物線上の点 $P = (x, y)$ は，

$$\begin{aligned} |y + a| &= \sqrt{x^2 + (y-a)^2}, \\ 4ay &= x^2. \end{aligned} \tag{1}$$

を満たす.

図 9 のように放物線上の点 P から準線 ℓ へ下ろした垂線の足を Q とすれば，定義によって，$PF = PQ$ であるから，$\triangle PFQ$ は二等辺三角形である．点 P から二等辺三角形 $\triangle PFQ$ の底辺 FQ へ下ろした垂線の足を R とする．そのとき，直線 PR 上にある放物線上の点は P のみであることが次のようにわかる．もし，点 S が直線 PR 上にある放物線上の点であるとすれば，S から準線 ℓ へ下ろした垂線の足を T とすれば，定義によって，$SF = ST$ である．一方，直線 PR は線分 FQ の垂直二等分線であるから，$SF = SQ$ である．ゆえに，$ST = SQ$ である．$T \neq Q$ ならば，$\triangle STQ$ は SQ を斜辺とする直角三角形であるから，$SQ > ST$ となって矛盾である．ゆえに，$T = Q$ であり，したがって，点 S は直線 PQ 上にある．直線 PQ 上にある放物線上の点は P のみであるから，$S = P$ である．以上によって，直線 PR は放物線の点 P における接線であることが示された．

図 10 のように，線分 QP の延長上に Q' を，線分 RP の延長上に R' をとれば，$\angle FPR = \angle QPR = \angle Q'PR'$ である．これは，放物線に沿った鏡があれば，y-軸に平行な光線は放物線で反射して焦点 F に向かって進み，逆に，焦点 F から発せられた光は放物線で反射して y-軸に平行な方向に進むことを示している．

折紙との関係をみよう．図 10 において，$\triangle PFQ$ は二等辺三角形であり，放物線の接線 PR は辺 FQ の垂直二等分線であるから，接線 PR を折れ線として折紙を折れば，焦点 F は準線 ℓ 上の点 Q に重なる．

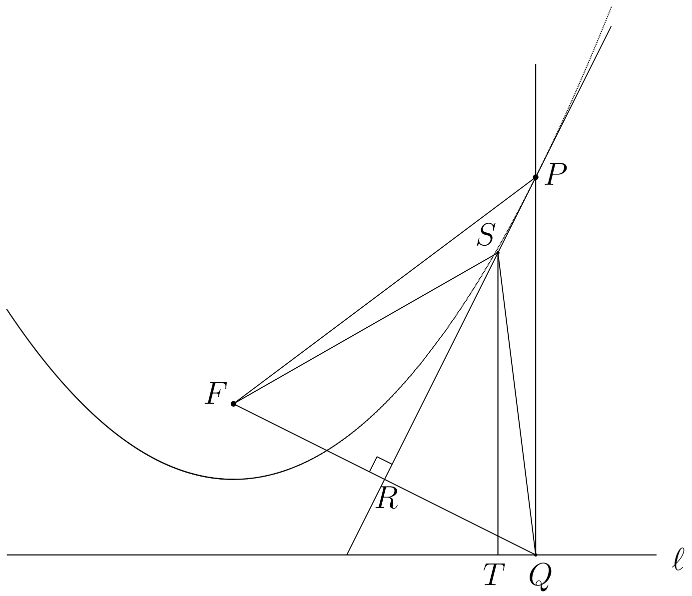

図 9: 放物線の定義と接線

図 8 における平方根の折り方では，折れ線 AE は点 F を焦点とし，直線 GQ を準線とする放物線の接線である．すなわち，直線 ℓ とその上にない点 F が与えられ，さらにもう 1 つの点 A が与えられたとき，F が ℓ 上に重なるように点 A を通る折れ線を折っている．このときの折れ線は F を焦点とし ℓ を準線とする放物線の接線であり，点 A を通るものである．

次節において，座標と方程式を用いて与えられた点を通る放物線の接線について計算してみよう．

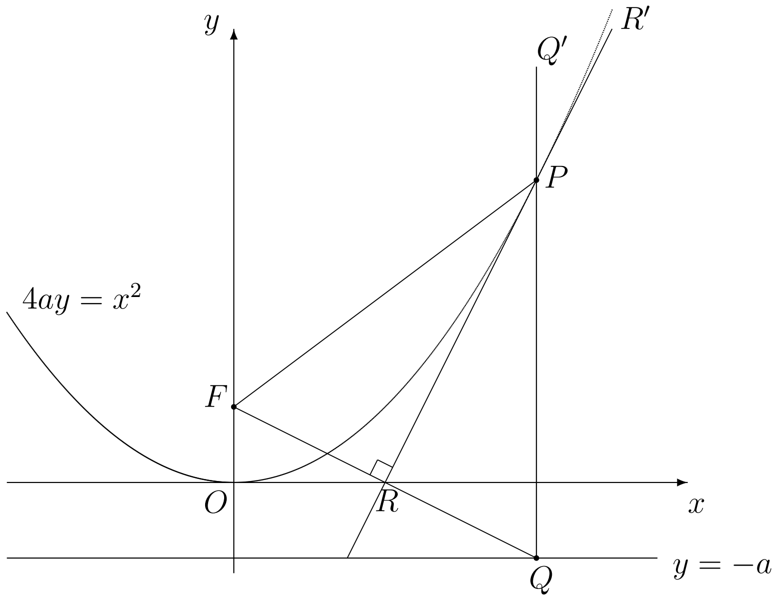

図 10: $4ay = x^2$ の接線

6　与えられた１点を通る放物線の接線と２次方程式

点 (p,q) から放物線 $4ay=x^2$ へ接線が引けたとする．接点を $P=(x_1,y_1)$ とする．P から準線 $\ell : y=-a$ へ下ろした垂線の足を Q とすると，$Q=(x_1,-a)$ であり，Q と焦点 $F=(0,a)$ の中点を $R=(x_1/2,0)$ とすれば，直線 RP が接線であった．直線 RP の傾きは，$x_1 \neq 0$ とすれば，

$$\frac{y_1-0}{x_1-\dfrac{x_1}{2}}=\frac{2y_1}{x_1}=\frac{4ay_1}{2ax_1}=\frac{x_1^2}{2ax_1}=\frac{x_1}{2a}$$

である．これは，$x_1=0$ のときも正しい．直線 RP は $R=(x_1/2,0)$ を通るから，直線 RP の方程式は，

$$y=\frac{x_1}{2a}\left(x-\frac{x_1}{2}\right) \tag{2}$$

である．これが点 (p,q) を通るから，

$$q=\frac{x_1}{2a}\left(p-\frac{x_1}{2}\right)$$

を満たす．よって，x_1 は２次方程式

$$x_1^2-2px_1+4aq=0 \tag{3}$$

の実根である．特に，この２次方程式の判別式は０以上であるから，

$$p^2-4aq \geq 0, \qquad 4aq \leq p^2$$

である．よって，点 (p,q) は放物線の下側にある．逆に，点 (p,q) が放物線の下側にあるとすれば，２次方程式 (3) は実根 x_1 を持ち，$y_1=x_1^2/(4a)$ とおけば，方程式 (2) で与えられる点 (x_1,y_1) における放物線の接線は点 (p,q) を通る．

以上によって，次の命題を得る．

命題 1. 点 (p,q) を通る放物線 $4ay=x^2$ の接線が存在するための必要十分条件は，$4aq \leq p^2$ である．$4aq<p^2$ ならば，(p,q) を通る接線は２本存在し，$4aq=p^2$ ならば，(p,q) を通る接線は１本だけである．

系 2. $4ac \leq b^2$ を満たす点 $(-b,c)$ を通る放物線 $4ay=x^2$ の接線の傾きを t とすれば，t は２次方程式

$$at^2+bt+c=0$$

の根である．

[証明]　命題１より，$(-b,c)$ を通る接線が存在する．接点の座標を (x_1,y_1) とすると，接線の方程式は (2) であるから，その傾きは $t=\dfrac{x_1}{2a}$ である．x_1 は２次方程式

$$x_1^2-2(-b)x_1+4ac=0$$

の根であるから，これに $x_1 = 2at$ を代入して，

$$(2at)^2 - 2(-b)(2at) + 4ac = 0, \quad 4a^2t^2 + 4abt + 4ac = 0, \quad at^2 + bt + c = 0.$$

□

系 3. $d > 0$ とするとき，点 $(0, -d)$ を通る放物線 $4y = x^2$ の接線の傾きは $\pm\sqrt{d}$ である．また，その接線と x 軸の交点の座標は $(\pm\sqrt{d}, 0)$ である．

[証明]　系 2 において，$a = 1$, $b = 0$, $c = -d$ とすれば，第 1 の主張がでる．接線の方程式は $y = \pm\sqrt{d}x - d$ であるから，接線と x 軸の交点の x-座標は，$\pm\sqrt{d}x - d = 0$ より，$x = \pm\sqrt{d}$ である． □

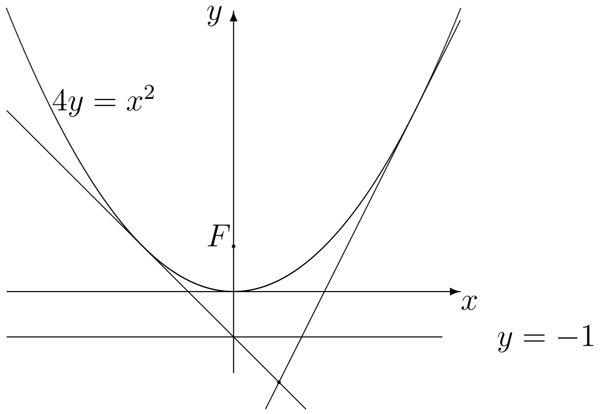

図 11: 与えられた点を通る接線

定義 4. **包絡線**（ほうらくせん，envelope）とは，与えられた（一般には無限個の）全ての曲線たちに接するような曲線のことである．

直線族 $\{4y = 2tx - t^2 \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ の包絡線は，放物線 $4y = x^2$ である．実際，放物線上の点 $(t, t^2/4)$ における接線は

$$4y = 2tx - t^2$$

である．

7　2 つの放物線の共通接線と 3 次方程式

折紙による角の三等分においては，図 5 のように直線 AE と直線 $G\bar{G}$，および点 G と点 A が与えられているとき，点 G が直線 AE 上に重なり，点 A が直線 $G\bar{G}$ に重なるように直線 IH を折れ線として折った．これを一般的に述べれば，2 つの直線 L_1, L_2 と 2 つの点 F_1, F_2 が与えられたとき，F_1 が L_1 上に，F_2 が L_2 上に重なるように折っている．このときの折れ線は F_1 を焦点とし L_1 を準線とする放物線の接線であり，さらに，それは

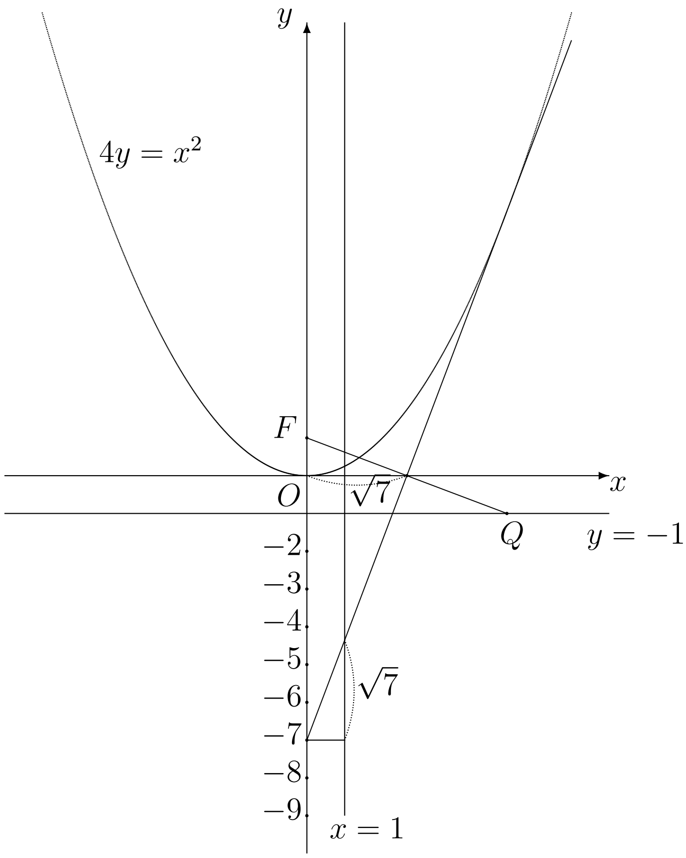

図 12: $\sqrt{7}$ の折り方

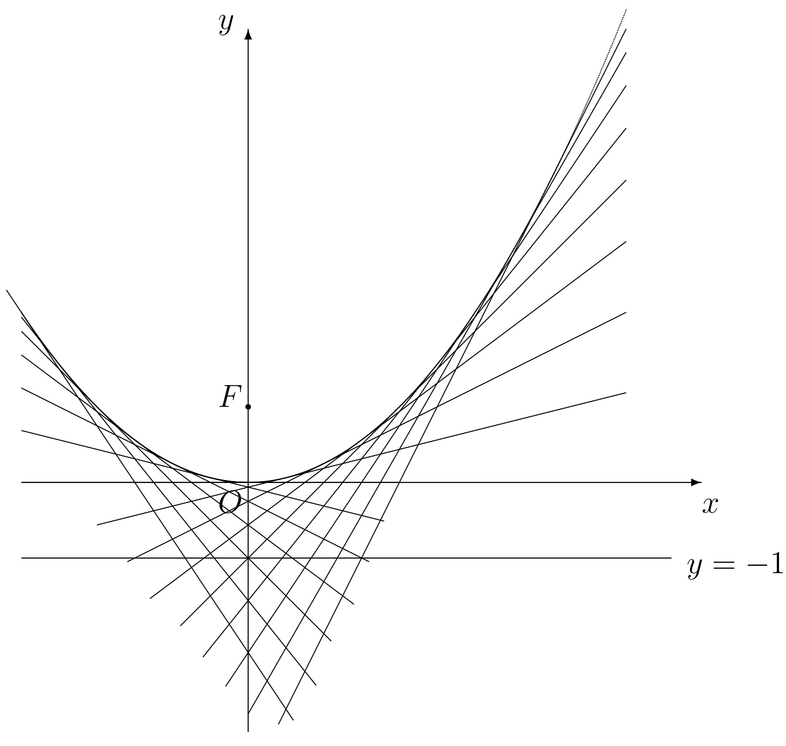

図 13: 直線族の包絡線としての放物線

F_2 を焦点とし L_2 を準線とする放物線の接線でもある．すなわち，2 つの放物線の共通接線を折っているのである．この特別な場合を座標と方程式を使って計算してみよう．

放物線 $p_1 : 4ay = x^2$ と $p_2 : 4d(x+b) = (y-c)^2$ $(a > 0,\ d > 0)$ の共通接線を求める．直線 $\ell : y = tx + m$ が放物線 p_1 と放物線 p_2 の共通の接線であるとする．ℓ は p_1 上の点 (x_1, y_1) における接線であるとすれば，接線の傾きは

$$t = \frac{x_1}{2a}$$

である．したがって，

$$x_1 = 2at, \qquad y_1 = \frac{x_1^2}{4a} = at^2$$

である．同様に，ℓ は p_2 上の点 (x_2, y_2) における接線であるとすれば，接線の傾きは

$$t = \frac{2d}{y_2 - c}$$

である．したがって，

$$y_2 - c = \frac{2d}{t}, \qquad x_2 = -b + \frac{(y_2 - c)^2}{4d} = -b + \frac{d}{t^2}$$

である．(x_1, y_1), (x_2, y_2) は直線 ℓ 上にあるから，

$$m = y_1 - tx_1 = at^2 - 2at^2 = -at^2,$$
$$m = y_2 - tx_2 = c + \frac{2d}{t} + bt - \frac{d}{t} = c + \frac{d}{t} + bt.$$

したがって，

$$c + \frac{d}{t} + bt = -at^2, \qquad at^3 + bt^2 + ct + d = 0.$$

以上によって，次の命題が示された．

命題 5. 放物線 $p_1 : 4ay = x^2$ と $p_2 : 4d(x+b) = (y-c)^2$ $(a > 0,\ d > 0)$ の共通接線の傾き t は次の 3 次方程式の根である．

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0.$$

系 6. 放物線 $p_1 : 4ay = x^2$ と $p_2 : 4dx = y^2$ $(a > 0,\ d > 0)$ の共通接線の傾き t は

$$t = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$$

である．

例 7. 命題 5 において，$a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, $d = -1$ とすれば，放物線 $p_1 : 4y = x^2$ と $p_2 : -4(x+1) = (y+2)^2$ の共通接線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の傾き t_1, t_2, t_3 は 3 次方程式

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

の 3 根である (図 14).

例 8. 系 6 において，$a = 1$, $d = 2$ とすれば，放物線 $p_1 : 4y = x^2$ と $p_2 : 8x = y^2$ の共通接線 ℓ の傾き t は $t = \sqrt[3]{2}$ である (図 15).

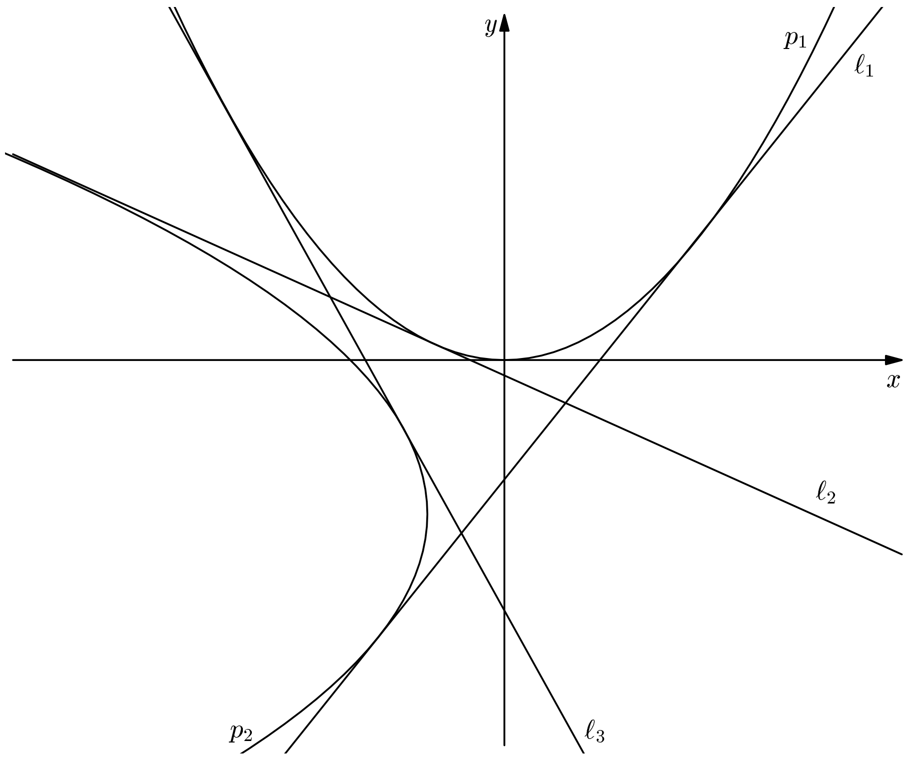

図 14: $4y = x^2$ と $-4(x+1) = (y+2)^2$ の共通接線

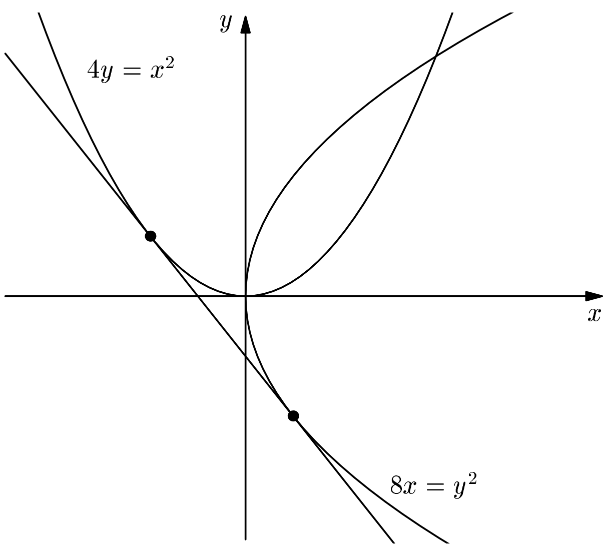

図 15: $4y = x^2$ と $8x = y^2$ の共通接線

8　角の三等分 再論

$\cos 3\theta$ が与えられたとき，

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

であるから，$\cos\theta$ は 3 次方程式

$$4x^3 - 3x - \cos 3\theta = 0$$

の根である．したがって前節の結果によって，2 つの放物線の共通接線の傾きとして，$\cos\theta$ は求められる．したがって，原理的には折紙によって任意の角の 3 等分ができることになる．

これをもっと直接的にみよう．以下は，§ 3 で紹介した阿部氏の方法を計算で示すものである．放物線 $p_1 : 4y = 4 - x^2$ は焦点 $A = (0, 0)$ と準線 $\ell_1 : y = 2$ を持つ．直線 $\ell_2 : y = ax$, $a = \tan 3\theta$ と直線 $y = 0$ のなす角は 3θ である．そのとき，ℓ_2 を準線とし，$F = (0, 4)$ を焦点とする放物線を p_2 とする．p_2 の方程式を求めよう．p_2 は $P = (x, y)$ と ℓ_2 の距離が PF に等しいような点 P の軌跡である．$P = (x, y)$ と ℓ_2 の距離は,

$$\frac{|y - ax|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

である．よって，

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \frac{|y - ax|}{\sqrt{a^2 + 1}},$$
$$(a^2 + 1)(x^2 + y^2 - 8y + 16) = (y - ax)^2 = y^2 - 2axy + a^2x^2.$$

よって，p_2 の方程式は

$$x^2 + 2axy + a^2y^2 - 8(a^2 + 1)y + 16(a^2 + 1) = 0. \tag{4}$$

放物線 p_1 上の点 $(2t, 1 - t^2)$ における接線 ℓ の方程式は,

$$y = -t(x - 2t) + 1 - t^2 = -tx + t^2 + 1 \tag{5}$$

である．(5) を (4) に代入して得られる x の 2 次方程式は

$$(1 - at)^2x^2 + 2\{a(1 - at)(t^2 + 1) + 4(a^2 + 1)t\}x + a^2(t^2 + 1)^2 - 8(a^2 + 1)(t^2 - 1) = 0$$

である．この判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}
\frac{D}{4} &= \{a(1 - at)(t^2 + 1) + 4(a^2 + 1)t\}^2 - (1 - at)^2\{a^2(t^2 + 1)^2 - 8(a^2 + 1)(t^2 - 1)\} \\
&= 8a(a^2 + 1)(1 - at)(t^2 + 1)t + 16(a^2 + 1)^2t^2 + 8(1 - at)^2(a^2 + 1)(t^2 - 1) \\
&= 8(a^2 + 1)[(1 - at)[at^3 + at + (1 - at)(t^2 - 1)] + 2(a^2 + 1)t^2] \\
&= -8(a^2 + 1)(at^3 - 3t^2 - 3at + 1).
\end{aligned}$$

ここで，$b=\tan\theta$, $t=1/b$ とすると，

$$a=\tan 3\theta=\frac{\tan 2\theta+\tan\theta}{1-\tan 2\theta\tan\theta},\quad \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2b}{1-b^2}$$

より，

$$a=\frac{\dfrac{2b}{1-b^2}+b}{1-\dfrac{2b^2}{1-b^2}}=\frac{3b-b^3}{1-3b^2}=\frac{3t^2-1}{t^3-3t},$$

$$at^3-3t^2-3at+1=0.$$

したがって，このように t を与えれば，$D=0$ となって，放物線 p_1 の接線 ℓ は放物線 p_2 の接線でもある．

一般に，直線 $y=mx+n$ に関して，点 (x_1,y_1) と点 (x_1',y_1') が対称ならば，中点 $\left(\dfrac{x_1+x_1'}{2},\dfrac{y_1+y_1'}{2}\right)$ は $y=mn+n$ 上にあり，ベクトル $(x_1'-x_1,y_1'-y)$ はベクトル $(1,m)$ と垂直であるから，

$$\frac{y_1+y_1'}{2}=m\frac{x_1+x_1'}{2}+n,\quad x_1'-x_1+m(y_1'-y)=0.$$

これから，

$$(x_1',y_1')=\left(\frac{(1-m^2)x_1+2my_1-2mn}{1+m^2},\frac{2mx_1+(m^2-1)y_1+2n}{1+m^2}\right).$$

$F=(0,4)$, $A=(0,0)$ の ℓ に関する対称点をそれぞれ F',A' とする．上の公式を $m=-t$, $n=t^2+1$, $(x,y)=(0,0),(0,4)$ について適用すれば，

$$\begin{aligned}F'&=\left(\frac{8m-2mn}{1+m^2},\frac{4(m^2-1)+2n}{1+m^2}\right)=\left(2t-\frac{8t}{1+t^2},6-\frac{8}{1+t^2}\right)\\&=\left(\frac{2t(t^2-3)}{1+t^2},\frac{2(3t^2-1)}{1+t^2}\right),\\A'&=\left(\frac{-2mn}{1+m^2},\frac{2n}{1+m^2}\right)=(2t,2).\end{aligned}$$

したがって，F' と A' の中点を G' とすれば，

$$G'=\left(2t-\frac{4t}{1+t^2},4-\frac{4}{1+t^2}\right)=\left(\frac{2t(t^2-1)}{1+t^2},\frac{4t^2}{1+t^2}\right).$$

よって，直線 AA' の傾きは，

$$\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}=b=\tan\theta.$$

直線 AG' の傾きは，

$$\frac{4t^2}{2t(t^2-1)}=\frac{2t}{t^2-1}=\frac{2b}{1-b^2}=\tan 2\theta.$$

直線 AF' の傾きは,

$$\frac{2(3t^2-1)}{2t(t^2-3)} = \frac{3t^2-1}{t^3-3t} = a = \tan 3\theta.$$

この最後の等式は，ℓ_2 が放物線 p_2 の接線であり，ℓ_2 が p_2 の準線であることから，焦点 F の ℓ に関する対称点 F' は準線 ℓ_2 上にあることからもわかる．

以上によって，最初に与えた角 3θ を 3 等分することができた．また，放物線 p_1 と p_2 の共通接線は 3 本あるが，それらは正三角形をなす．実際，上の計算では，$b = \tan\theta, t = 1/b$ とおいたが,

$$\theta_k = \theta + \frac{2\pi(k-1)}{3}, \quad b_k = \tan\theta_k, \quad t_k = \frac{1}{b_k} \quad (k = 1, 2, 3)$$

とおけば,

$$a = \tan 3\theta = \tan 3\theta_k = \frac{3t_k^2 - 1}{t_k^3 - 3t_k}$$

であるから，直線

$$y = -t_k x + t_k^2 + 1 \quad (k = 1, 2, 3)$$

は放物線 p_1 と p_2 の共通接線である．これらの 3 本の共通接線の傾きは,

$$-t_1 = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad -t_2 = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad -t_3 = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

であるから，これらの直線の交わる角は $\pi/3$ である．

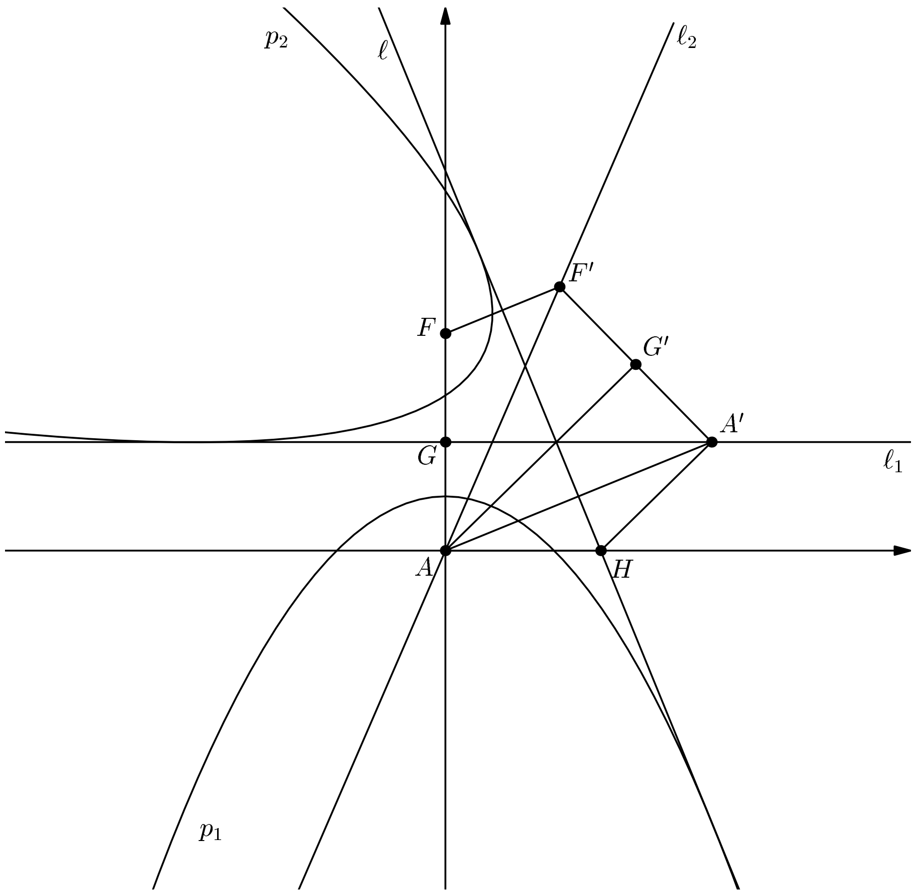

図 16: 角の三等分と放物線

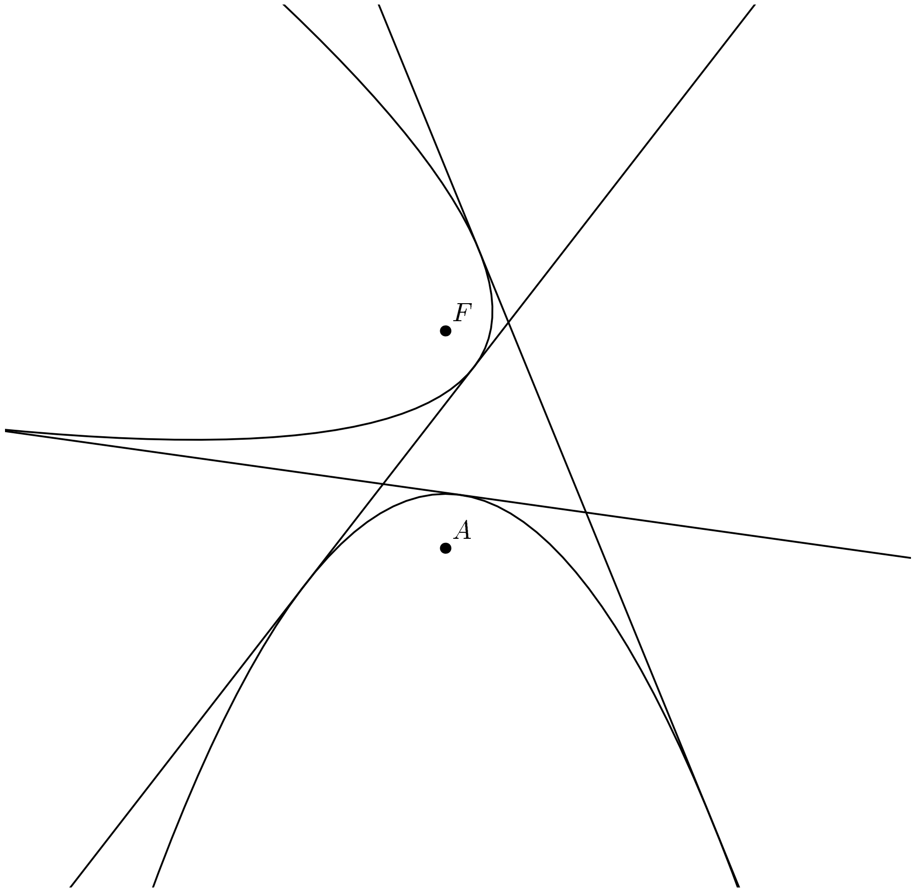

図 17: 角の三等分における放物線の共通接線のつくる正三角形

9　正多角形を折る

複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数，i は虚数単位) を xy-平面上の点 (x, y) によって表したものを複素平面という．$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ を z の絶対値という．絶対値 1 の複素数は複素平面上の 0 を中心とする半径 1 の円周上の点として表される．$|z| = 1$ ならば，$z = \cos\theta + i\sin\theta$ と表せる．ここで，θ は実軸 (x-軸) の正の方向と z のなす角であり，$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．絶対値 1 の 2 つの複素数を $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$, $z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ とすると，三角関数の加法定理によって，積 $z_1 z_2$ は

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

となる．特に，すべての整数 n に対して，ド・モアブルの公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つことが帰納法によって示される．$n > 1$ を自然数とするとき，ド・モアブルの公式によって，$k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して，

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^n = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$$

である．すなわち，n 個の複素数

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

は方程式

$$z^n = 1$$

の根の全体である．これらを複素平面上に図示すれば，単位円 $|z| = 1$ に内接する正 n 角形の頂点になる．

以下，$n = p \geq 3$ が素数の場合を考える．方程式 $z^p - 1 = 0$ は

$$(z-1)(z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1) = 0$$

と因数分解される．$p-1$ 次の方程式

$$z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1 = 0 \tag{6}$$

の根の全体と $z = 1$ を合わせたものが正 p 角形の頂点になっている．したがって，2 次方程式を繰り返して解くことによってこの方程式が解ければ，正 p 角形が定規とコンパスで作図できることになる．このようにして，結局，正 p 角形が定規とコンパスで作図できるための必要十分条件は $p = 2^{2^m} + 1$ の形であることが知られている．このような形の

素数を**フェルマー素数**という．$m = 0, 1, 2, 3, 4$ とすると，$p = 3, 5, 17, 257, 65537$ である．これら以外のフェルマー素数は知られていない．

一方，2 次方程式と 3 次方程式を繰り返して解くことによって方程式 (6) が解ければ，正 p 角形が折紙で折れることになる．結局，$p = 2^m 3^l + 1$ の形ならばよいことになる．$(m, l) = (1, 1), (2, 1), (1, 2)$ とすると，$p = 7, 13, 19$ であるから，正 7 角形，正 13 角形，正 19 角形は折紙で折れることになる．理論的にこれらの正多角形が折れることはわかったが，実際にどう折れればよいかをみていこう．

9.1 正 3 角形

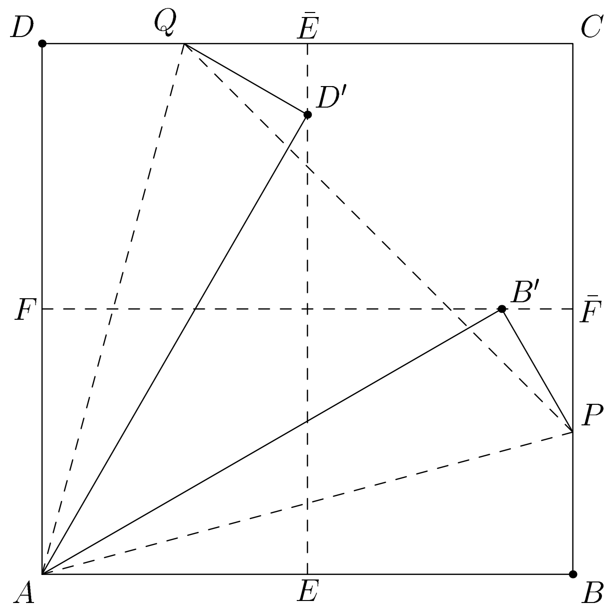

図 18: 正 3 角形の折り方

図 18 のように，まず，正方形の折紙を縦と横をそれぞれ半分に折る．次に頂点 B が線分 $F\bar{F}$ 上に重なるように頂点 A を通る折れ線 AP で折る．同様に，頂点 D が線分 $E\bar{E}$ 上に重なるように頂点 A を通る折れ線 AQ で折る．最後に，線分 PQ を折れば，$\triangle APQ$ は正 3 角形である．なぜならば，正方形の折紙の一辺の長さを 2 とすれば，$AF = 1, AB' = AB = 2$ であるから，直角三角形 $\triangle B'FA$ において，$B'F = \sqrt{3}$ であり，$\angle B'AF = 60°$ である．したがって，$\angle B'AB = 30°$ であり，$\angle B'AP = \angle BAP = 15°$ である．同様に，$\angle DAQ = 15°$ であり，したがって，$\angle PAQ = 90° - 15° - 15° = 60°$ である．また，$AP = AQ$ であるから，$\triangle APQ$ は正 3 角形である．

9.2　正 5 角形

よく知られているように n 角形の内角の和は $(n-2)\times 180^\circ$ である．したがって，正 5 角形の 1 つの内角は

$$\frac{(5-2)\times 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

である．

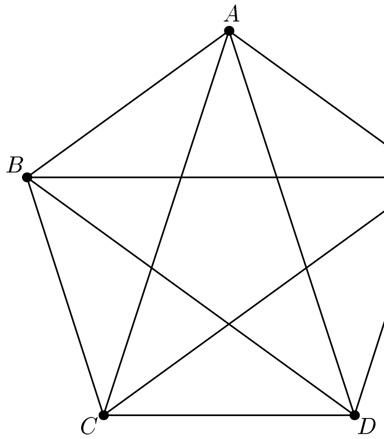

図 19: 正 5 角形

図 19 において，正 5 角形の頂点は同一円周上にあり，$\angle CBD, \angle CAD, \angle CED$ はともに CD に対する円周角であるから，$\angle CBD = \angle CAD = \angle CED$ である．$\triangle CBD \equiv \triangle BAC$ であるから，$\angle CBD = \angle BAC$ である．また，$\triangle DEC \equiv \triangle EAD$ であるから，$\angle CED = \angle DAE$ である．よって，$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = 108^\circ/3 = 36^\circ$ である．これから，$AC = 2$ とすると，$CD = 4\sin 18^\circ$ である．$\theta = 18^\circ$ とすると，$5\theta = 90^\circ, 3\theta = 90^\circ - 2\theta$ であるから，

$$\sin 3\theta = \sin(90^\circ - 2\theta) = \cos 2\theta.$$

sin の三倍角の公式と cos の倍角公式から，

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta, \quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta.$$

よって，$x = \sin\theta$ は 3 次方程式

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0, \quad (x-1)(4x^2+2x-1) = 0$$

を満たす．これを解けば，$x = 1, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$ であるが，明らかに，$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ である．よって，$CD = \sqrt{5}-1$ である．このことから，正 5 角形を作るには，$AC = AD = 2, CD = \sqrt{5}-1$ の二等辺三角形 $\triangle ACD$ を作ればよいことがわかる．

図 20 において，$ABCD$ は一辺の長さが 2 の正方形とする．まず，縦と横をそれぞれ半分に折る．次に，図 20 の (1) のように，CF を折り，さらに，点 B が線分 CF 上に重な

るように折れ線 CG で折る．このとき，$\angle BCG = \alpha$ とすれば，$\angle BCF = 2\alpha$ である．

$$\tan 2\alpha = \frac{F\bar{F}}{C\bar{F}} = \frac{2}{1} = 2$$

である．倍角公式より，

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

したがって，$t = \tan\alpha$ は

$$2 = \frac{2t}{1-t^2}, \quad t = 1 - t^2, \quad t^2 + t - 1 = 0$$

を満たす．これを解けば，$t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ である．$t > 0$ より，$t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ である．

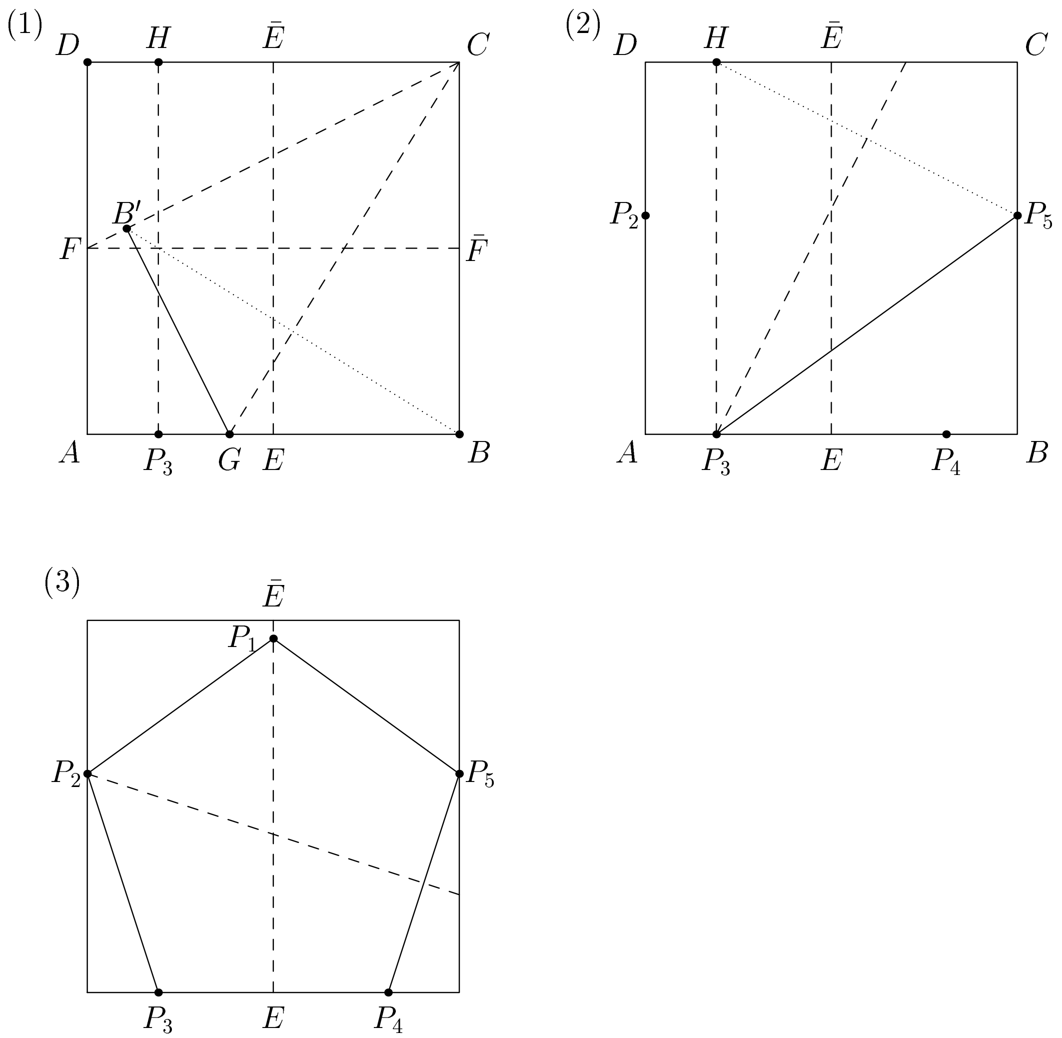

図 20: 正 5 角形の折り方

よって，$BG = 2\tan\alpha = \sqrt{5} - 1$ である．線分 AG の中点を P_3 とすれば，

$$AG = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{5}, \quad AP_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

である．P_3 を通る AD と平行な直線 P_3H で折る．さらに，図 20 の (2) のように，点 H が線分 BC 上に重なるように P_3 を通る折れ線で折る．点 H は点 P_5 に重なるとすれば，$P_3P_5 = P_3H = 2$ である．$E\bar{E}$ で折ったときに，点 P_5 が線分 AD 上の点 P_2 に重なり，点 P_3 が点 P_4 に重なるとする．このとき，

$$P_3P_4 = 2 - 2AP_3 = 2 - (3 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1$$

である．また，$P_2P_5 = 2$ である．P_2, P_3, P_4, P_5 は正 5 角形の 4 つの頂点である．実際，$\angle BP_3P_5 = \beta$ とすれば，

$$\cos\beta = \frac{BP_3}{P_3P_5} = \frac{2 - AP_3}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

一方，$\theta = 18^\circ$ とするとき，

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

よって，$\beta = 2\theta = 36^\circ$ である．したがって，

$$BP_5 = P_3P_5 \sin\beta = 2\sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

$$P_4P_5^2 = BP_4^2 + BP_5^2 = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2.$$

よって，$P_4P_5 = \sqrt{5} - 1 = P_3P_4$ である．すなわち，$\triangle P_3P_4P_5$ は二等辺三角形であり，$\angle P_3P_4P_5 = 180^\circ - 2\beta = 108^\circ$ である．最後に，点 P_4 が点 P_5 に重なるように点 P_2 を通る折れ線で折ったとき，点 P_3 が重なる点を P_1 とすれば，$P_1P_2P_3P_4P_5$ は正 5 角形である．

9.3 正 7 角形

6 次方程式

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \tag{7}$$

の根 z は

$$z = \cos\frac{2k\pi}{7} + i\sin\frac{2k\pi}{7}, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

であった．$x=z+\frac{1}{z}$ とおけば，

$$x^3=z^3+3z+\frac{3}{z}+\frac{1}{z^3}=z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right),\qquad z^3+\frac{1}{z^3}=x^3-3x,$$

$$x^2=z^2+2+\frac{1}{z^2},\qquad z^2+\frac{1}{z^2}=x^2-2.$$

これらを (7) を z^3 で割った方程式

$$z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0,$$

に代入して，

$$\begin{aligned} x^3-3x+x^2-2+x+1&=0,\\ x^3+x^2-2x-1&=0. \end{aligned} \tag{8}$$

3 次方程式 (8) の根 x は

$$x=2\cos\frac{2k\pi}{7},\qquad k=1,2,3$$

である．$\cos\frac{2\pi}{7}>0$, $\cos\frac{4\pi}{7}<0$, $\cos\frac{6\pi}{7}<0$ であるから．3 次方程式 (8) の正の根は $2\cos\frac{2\pi}{7}$ だけである．

例 7 でみたように，3 次方程式 (8) の根は放物線 $4y=x^2$ と $-4(x+1)=(y+2)^2$ の共通接線の傾きであった (図 14)．2 つの放物線を y-軸方向に $+1$ だけ平行移動しても共通接線の傾きは変わらないから，3 次方程式 (8) の根は放物線 $p_1: 4(y-1)=x^2$ と $p_2: -4(x+1)=(y+1)^2$ の共通接線の傾きである．p_1 の焦点は $B=(0,2)$ であり，準線は $y=0$ であり，p_2 の焦点は $A=(-2,-1)$ であり，準線は $x=0$ である．$t_1=2\cos\frac{2\pi}{7}$ とおけば，t_1 は p_1 と p_2 の共通接線 ℓ の傾きである．接線 ℓ の方程式は

$$y=t_1x+1-t_1^2$$

である．ℓ と x-軸 (放物線 p_1 の準線) との交点を D とすれば，$D=(t_1-1/t_1,0)$ である．線分 CD の垂直 2 等分線で折るとき，点 A を通る y-軸に平行な直線が折り返された直線と ℓ との交点を E とする．$E=(x_0,y_0)$ とする．$C=(-4,0)$ であるから，CD の中点の x-座標は

$$\frac{1}{2}\left(t_1-\frac{1}{t_1}-4\right)=\frac{t_1}{2}-\frac{1}{2t_1}-2$$

である．したがって，

$$\frac{x_0+(-2)}{2}=\frac{t_1}{2}-\frac{1}{2t_1}-2,\qquad x_0=t_1-\frac{1}{t_1}-2,$$

$$y_0=t_1\left(t_1-\frac{1}{t_1}-2\right)+1-t_1^2=-2t_1.$$

すなわち，E の y-座標として，$y_0=-2\cos\frac{2\pi}{7}$ が得られた (図 21)．E は p_2 と ℓ の接点ではない．接点は E よりも少し下にある．

このことを使えば，以下のようにして正 7 角形を折ることができる．

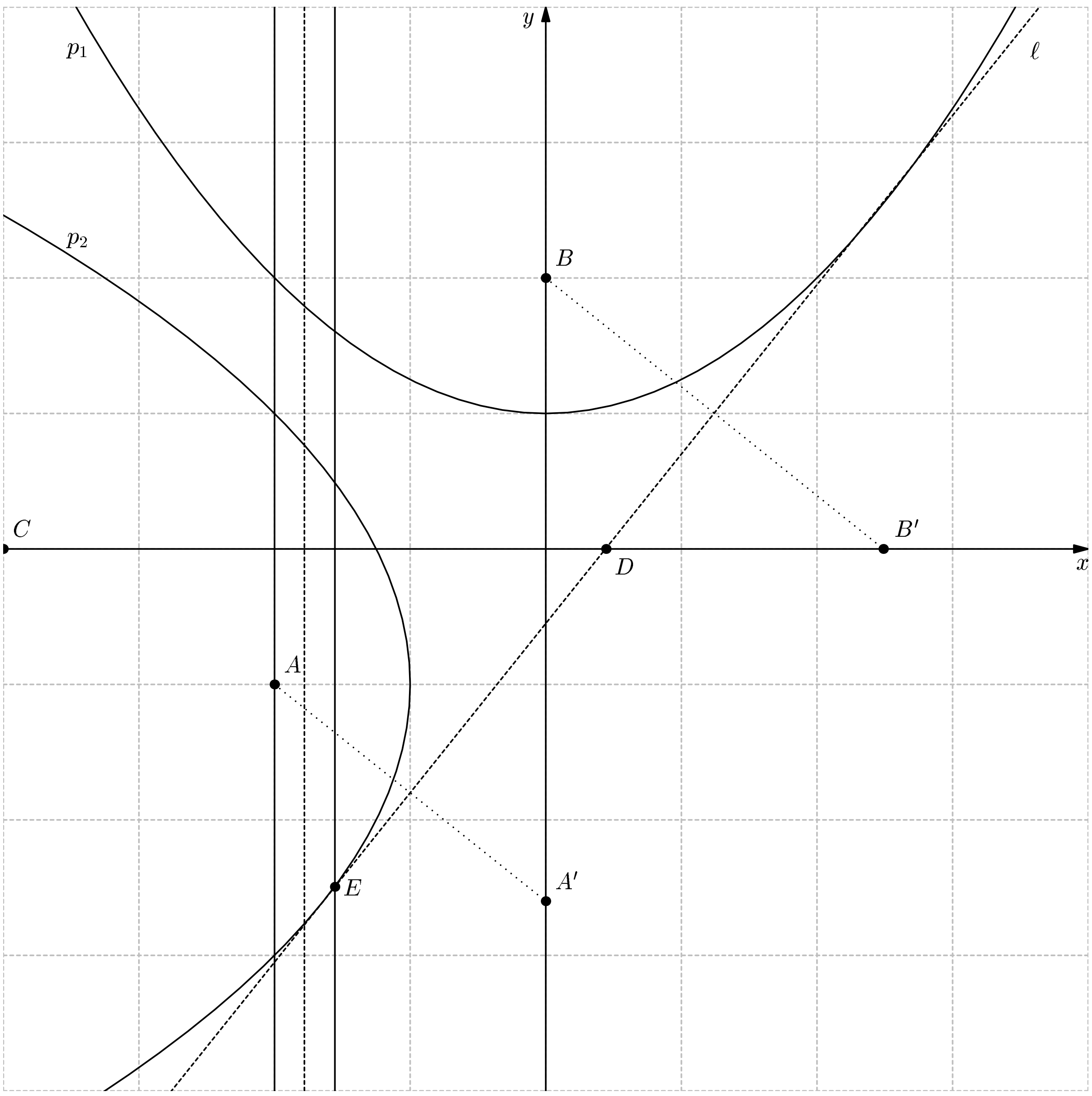

図 21: $2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ を折る

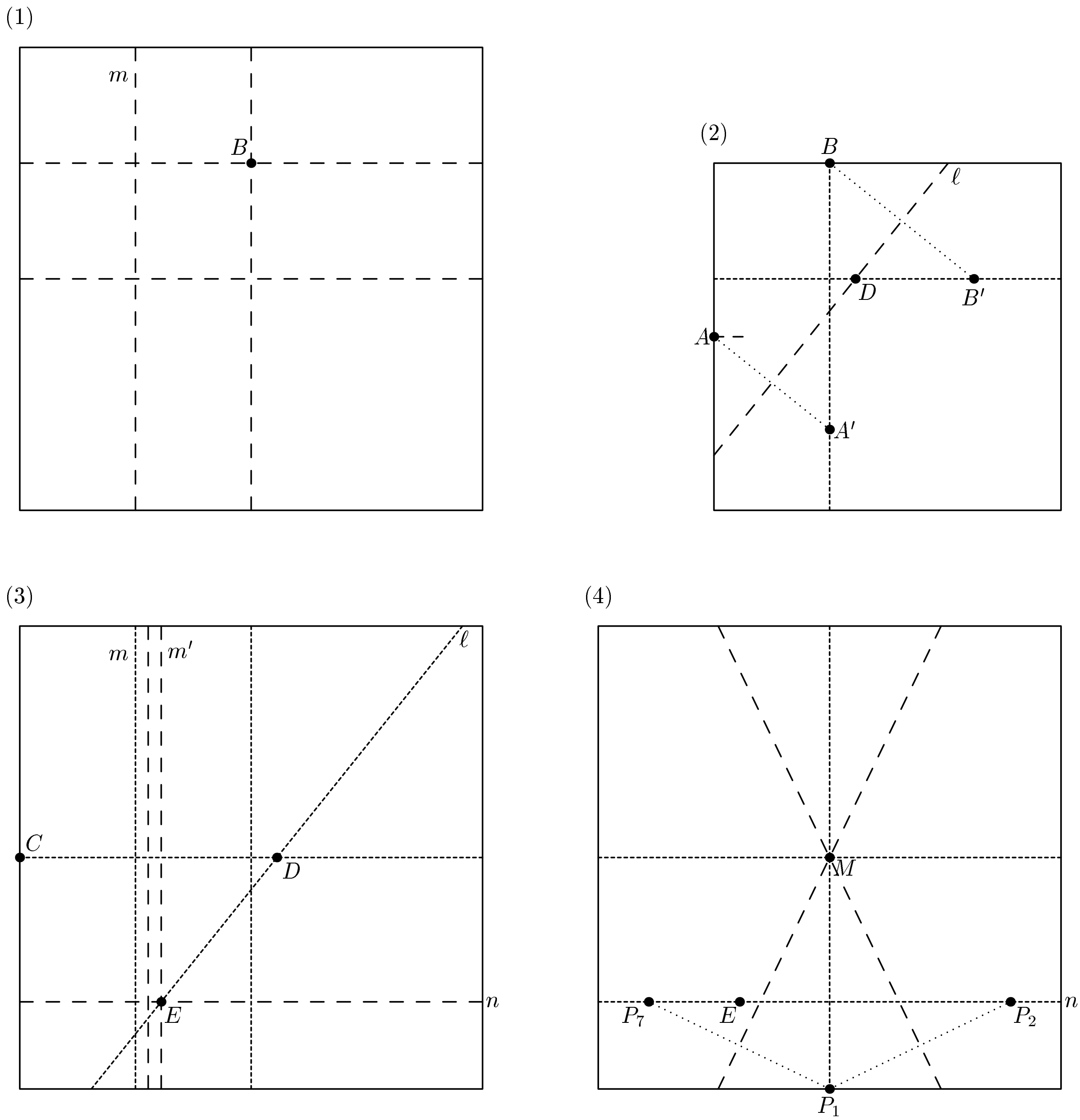

図 22: 正 7 角形の折り方

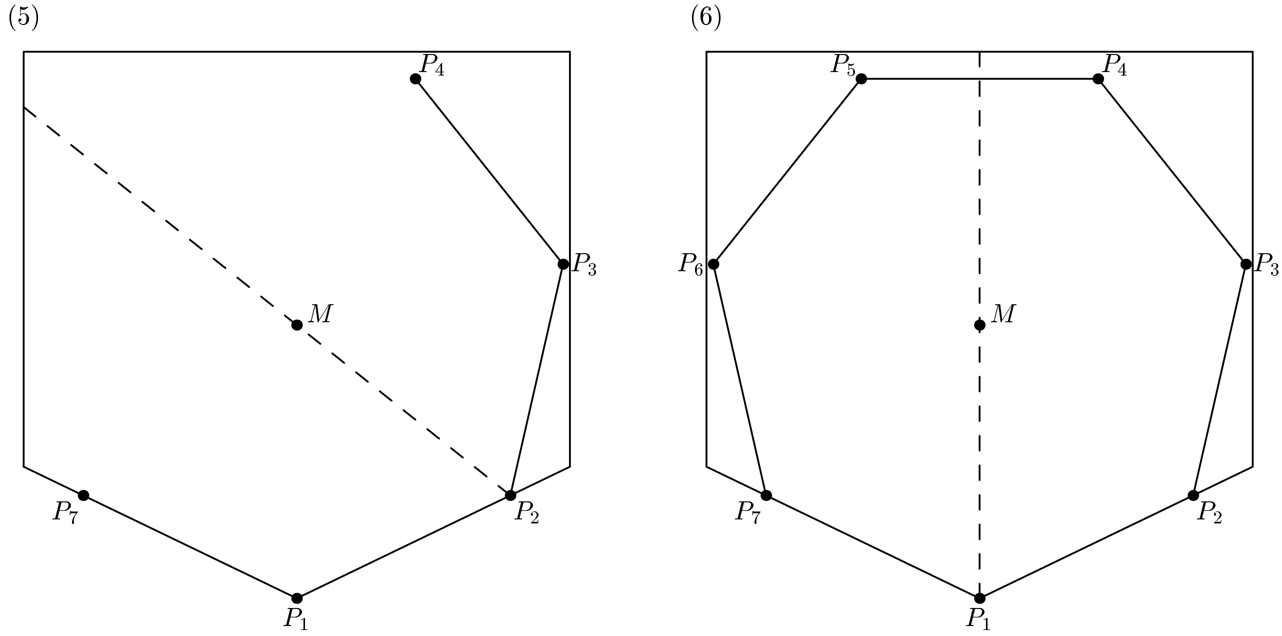

図 23: 正 7 角形の折り方の続き

Step 1. 正方形の折紙の縦と横をそれぞれ半分に折る．次に，左側の辺を縦中線に重なるように折線 m で折り，上側の辺を横中線に重なるように折る (図 22 の (1))．さらに，これらの折線で裏側に折って一辺の長さが 3/4 の正方形にする．

Step 2. 上下の辺を重ねることによって，左側の辺の中点 A を定める．さらに， 図 22 の (2) のように，点 B を横中線上に，点 A が縦中線上に重なるように折る．このときの折線と横中線の交点として，点 D を定める．

Step 3. 元の正方形に広げる．図 22 の (3) のように，点 C が点 D に重なるように折る．そのとき，線分 m が折り重なった線分を m' として，さらに，m' で折り，m' と ℓ との交点として点 E を定めて，点 E を通る横線 n で折る．

Step 4. 図 22 の (4) のように，点 P_1 が線分 n に重なるように中心 M を通る折れ線で二通りに折る．そのとき，点 P_1 が折り重なる点として，点 P_2 と点 P_7 を定める．

Step 5. 図 23 の (5) のように，中心 M と P_2 を通る折れ線で折るとき，点 P_1 が折り重なる点として点 P_3 を定め，点 P_7 が折り重なる点として点 P_4 を定める．

Step 6. 図 23 の (6) のように，中心 M と P_1 を通る折れ線で折るとき，点 P_3 が折り重なる点として点 P_6 を定め，点 P_4 が折り重なる点として点 P_5 を定める．そのとき，7 角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ は正 7 角形である．

9.4　正 13 角形

ド・モアブルの公式によって,

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{13} + i\sin\frac{2\pi}{13}$$

とおけば，12 次方程式

$$z^{12} + z^{11} + \cdots + z + 1 = 0 \tag{9}$$

の根は,

$$\zeta^k = \cos\frac{2k\pi}{13} + i\sin\frac{2k\pi}{13}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 12$$

であった．$\zeta^{13} = 1$ であるから，ζ から出発して次々に平方していけば,

$$\zeta,\ \zeta^2,\ \zeta^4,\ \zeta^8,\ \zeta^3,\ \zeta^6,\ \zeta^{12},\ \zeta^{11},\ \zeta^9,\ \zeta^5,\ \zeta^{10},\ \zeta^7$$

となる．これらのうちの奇数番目だけの和を y_1，偶数番目だけの和を y_2 とすれば,

$$\begin{aligned} y_1 &= \zeta + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^{12} + \zeta^9 + \zeta^{10}, \\ y_2 &= \zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^6 + \zeta^{11} + \zeta^5 + \zeta^7 \end{aligned}$$

とおく．そのとき,

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= \zeta + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^{12} + \zeta^9 + \zeta^{10} + \zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^6 + \zeta^{11} + \zeta^5 + \zeta^7 \\ &= \zeta^{12} + \zeta^{11} + \cdots + \zeta = -1, \\ y_1 y_2 &= (\zeta + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^{12} + \zeta^9 + \zeta^{10})(\zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^6 + \zeta^{11} + \zeta^5 + \zeta^7) \\ &= \zeta^3 + \zeta^9 + \zeta^7 + \zeta^{12} + \zeta^6 + \zeta^8 + \zeta^6 + \zeta^{12} + \zeta^{10} + \zeta^2 + \zeta^9 + \zeta^{11} \\ &\quad + \zeta^5 + \zeta^{11} + \zeta^9 + \zeta + \zeta^8 + \zeta^{10} + \zeta + \zeta^7 + \zeta^5 + \zeta^{10} + \zeta^4 + \zeta^6 \\ &\quad + \zeta^{11} + \zeta^4 + \zeta^2 + \zeta^7 + \zeta + \zeta^3 + \zeta^{12} + \zeta^5 + \zeta^3 + \zeta^8 + \zeta^2 + \zeta^4 \\ &= 3(\zeta^{12} + \zeta^{11} + \cdots + \zeta^2 + \zeta) = -3. \end{aligned}$$

したがって，y_1, y_2 は 2 次方程式

$$y^2 + y - 3 = 0$$

の 2 根である．

$$\zeta^k + \zeta^{13-k} = \cos\frac{2k\pi}{13} + i\sin\frac{2k\pi}{13} + \cos\frac{2(13-k)\pi}{13} + i\sin\frac{2(13-k)\pi}{13} = 2\cos\frac{2k\pi}{13}$$

であるから,

$$\begin{aligned} y_1 &= \zeta + \zeta^{12} + \zeta^4 + \zeta^9 + \zeta^3 + \zeta^{10} = 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{8\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} \\ &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{13} - \cos\frac{5\pi}{13}\right) + 2\cos\frac{6\pi}{13}. \end{aligned}$$

$\cos\frac{6\pi}{13} > 0, \cos\frac{2\pi}{13} > \cos\frac{5\pi}{13}$ より，$y_1 > 0$ である．$y_1 y_2 = -3$ より，$y_2 < 0$ である．よって，

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \quad y_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}.$$

さらに，

$$f_1 = \zeta + \zeta^{12}, \qquad f_2 = \zeta^3 + \zeta^{10}, \qquad f_3 = \zeta^4 + \zeta^9$$

とおけば，

$$\begin{aligned}
f_1 + f_2 + f_3 &= \zeta + \zeta^{12} + \zeta^3 + \zeta^{10} + \zeta^4 + \zeta^9 = y_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \\
f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_1 &= (\zeta + \zeta^{12})(\zeta^3 + \zeta^{10}) + (\zeta^3 + \zeta^{10})(\zeta^4 + \zeta^9) + (\zeta^4 + \zeta^9)(\zeta + \zeta^{12}) \\
&= \zeta^4 + \zeta^{11} + \zeta^2 + \zeta^9 + \zeta^7 + \zeta^{12} + \zeta + \zeta^6 + \zeta^5 + \zeta^3 + \zeta^{10} + \zeta^8 = -1, \\
f_1 f_2 f_3 &= (\zeta + \zeta^{12})(\zeta^3 + \zeta^{10})(\zeta^4 + \zeta^9) = (\zeta + \zeta^{12})(\zeta^7 + \zeta^{12} + \zeta + \zeta^6) \\
&= \zeta^8 + 1 + \zeta^2 + \zeta^7 + \zeta^6 + \zeta^{11} + 1 + \zeta^5 \\
&= 2 + \zeta^2 + \zeta^8 + \zeta^6 + \zeta^{11} + \zeta^5 + \zeta^7 = 2 + y_2 \\
&= \frac{3-\sqrt{13}}{2}.
\end{aligned}$$

したがって，f_1, f_2, f_3 は 3 次方程式

$$f^3 + \frac{1-\sqrt{13}}{2} f^2 - f + \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = 0 \tag{10}$$

の 3 根である．$f_1 = 2\cos\frac{2\pi}{13}$, $f_2 = 2\cos\frac{6\pi}{13}$, $f_3 = 2\cos\frac{8\pi}{13}$ より，$f_1 > f_2 > 0$, $f_3 < 0$ である．命題 5 より，f_1 は 2 つの放物線

$$\begin{aligned}
&p_1 : 4y = x^2, \\
&p_2 : 4\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) = (y+1)^2
\end{aligned}$$

の共通接線の傾きとして求まる．p_1 の焦点は $E = (0, 1)$，準線は $y = -1$ であり，p_2 の焦点は $D = (-2+\sqrt{13}, -1)$ で，準線は $x = 1$ である (図 24)．p_1 の焦点 E が準線 $y = -1$ 上に重なるように，p_2 の焦点 D が準線 $x = 1$ 上に重なるように折るときの折線は 3 本あるが，それらの中で正の傾きのものは 2 本ある．傾きが正で大きい方の共通接線を ℓ とすれば，ℓ の傾きは $f_1 = 2\cos\frac{2\pi}{13}$ である．接線 ℓ の方程式は

$$y = f_1 x - f_1^2$$

である．ℓ と $y = 1$ との交点を F とすれば，$F = (f_1 + 1/f_1, 1)$ である．線分 EF の垂直 2 等分線で折るとき，p_2 の準線 $x = 1$ は直線 $x = f_1 + 1/f_1 - 1$ に折り重なる．直線 ℓ と直線 $x = f_1 + 1/f_1 - 1$ の交点を G とすれば，G の y-座標は，

$$f_1\left(f_1 + \frac{1}{f_1} - 1\right) - f_1^2 = 1 - f_1$$

である．よって，$G=(f_1+1/f_1-1, 1-f_1)$ である．

$P_1=(2,-1)$, $M=(2,1)$ とする．M を中心とする半径 2 の円と，点 G を通る x-軸に平行な直線 $y=1-f_1$ の交点を P_2, P_{13} とする．ただし，P_2 は P_1 の右側にあり，P_{13} は P_1 の左側にあるものとする．M と $y=1-f_1$ の距離は $f_1=2\cos\frac{2\pi}{13}$ であるから，

$$P_2=\left(2+2\sin\frac{2\pi}{13}, 1-2\cos\frac{2\pi}{13}\right),\quad P_{13}=\left(2-2\sin\frac{2\pi}{13}, 1-2\cos\frac{2\pi}{13}\right)$$

である．P_2 と P_{13} は，点 P_1 が点 G を通る直線 $y=1-f_1$ 上に重なるように $M=(2,1)$ を通る直線 (2 つある) で折るとき，P_1 の重なる点として，P_2 と P_{13} を図 24 のように定めることができる．

このことを使えば，以下のようにして正 13 角形を折ることができる．

Step 1. 図 25 の (1) のように一辺の長さが 4 の正方形の折紙の縦と横をそれぞれ半分に折る．上半分と左半分をさらに，二等分する．縦中線と上 1/4 の横線との交点として点 A を定める．このとき，左下角の点と A との距離は三平方の定理によって，$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ である．

Step 2. 点 A が下側の辺上に重なるように，左下角を通る折れ線で折る．そのとき，点 A が折り重なる点として点 B を定める (図 25 の (2))．さらに，点 B を下側の辺の中点 C に重なるように折るとき，右下角の点が重なる点として点 D を定める．左下角の点の座標を $(0,-1)$ とすれば，$B=(\sqrt{13},-1)$, $C=(2,-1)$ であり，D の x-座標は

$$2-(4-\sqrt{13}=-2+\sqrt{13}$$

である．よって，$D=(-2+\sqrt{13},-1)$ である．

Step 3. 左側の辺の中点を E とする．$E=(0,1)$ である．図 25 の (3) のように，点 E が下側の辺 ($y=-1$) に重なり，点 D が左 1/4 縦線 ($x=1$) に重なるように折る．そのときの折れ線と横中線 ($y=1$) の交点として点 F を定める．

Step 4. 点 E が点 F に重なるように縦線で折る．そのとき，左 1/4 縦線 ($x=1$) が折り重なった縦線でさらに折る．図 25 の (4) のように，このときの縦の折れ線と Step 3 の斜めの折れ線との交点として点 G を定める．G を通る横線を折る．

Step 5. 下側の辺の中点を P_1 とする．図 23 の (5) のように，点 P_1 が G を通る横線上に重なるように中心 M を通る折れ線で 2 通りに折る．そのとき，点 P_1 が折り重なる点として点 P_2 と点 P_{13} を定める．

Step 6. 図 26 の (6) のように，中心 M と P_2 を通る折れ線で折るとき，点 P_1 が折り重なる点として点 P_3 を定め，点 P_{13} が折り重なる点として点 P_4 を定める．

Step 7. 図 26 の (7) のように，中心 M と P_3 を通る折れ線で折るとき，点 P_1 が折り重なる点として点 P_5 を定め，点 P_{13} が折り重なる点として点 P_6 を定める．

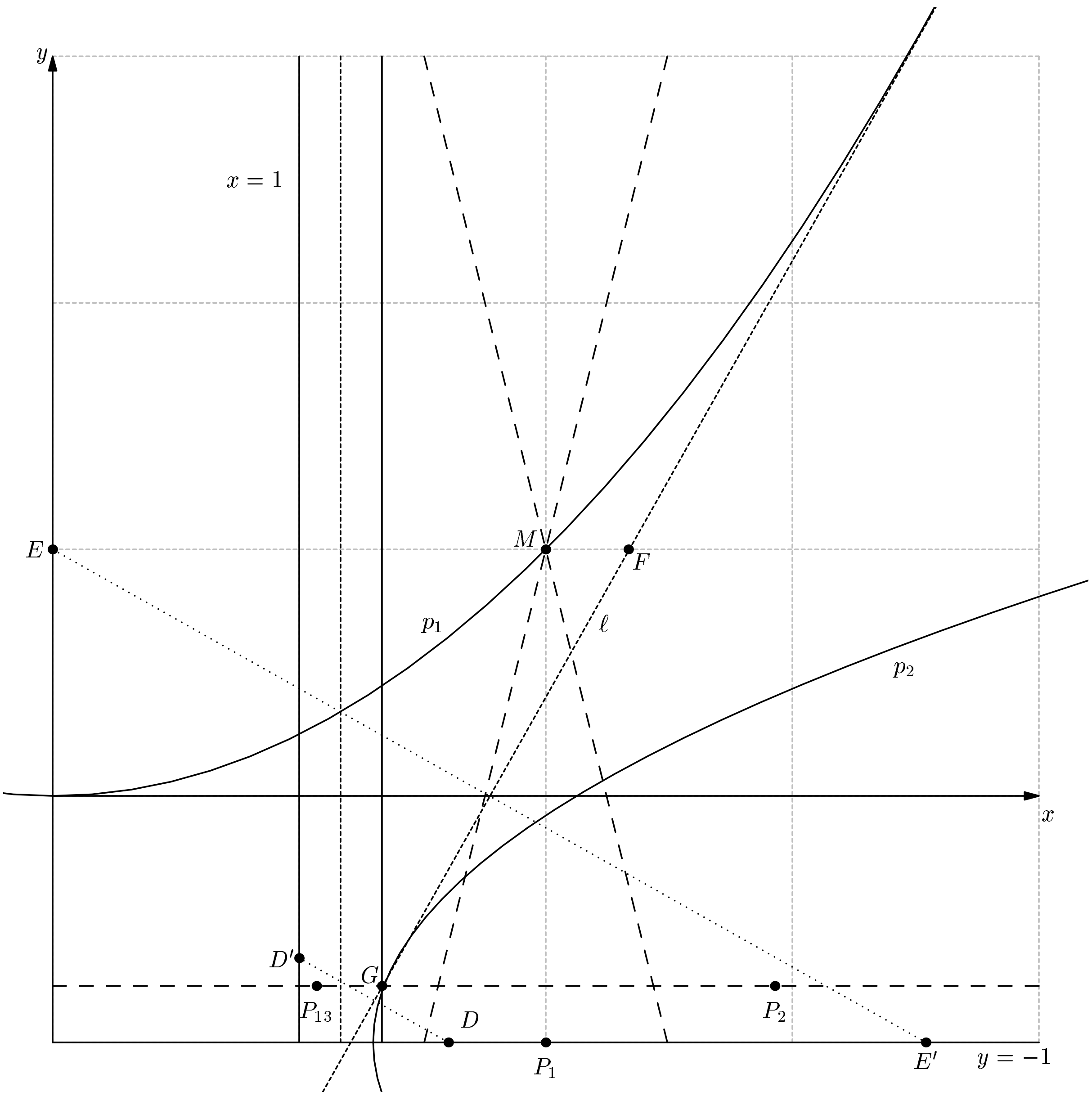

図 24: $2\cos\dfrac{2\pi}{13}$ を折る

Step 8. 図 26 の (8) のように，中心 M と P_{13} を通る折れ線で折るとき，点 P_6 が折り重なる点として点 P_7 を定める．さらに，中心 M と P_1 を通る折れ線で折るとき，点 P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 が折り重なる点として，それぞれ点 P_{12}, P_{11}, P_{10}, P_9, P_8 を定める．そのとき，13 角形 $P_1P_2P_3 \cdots P_{12}P_{13}$ は正 13 角形である．

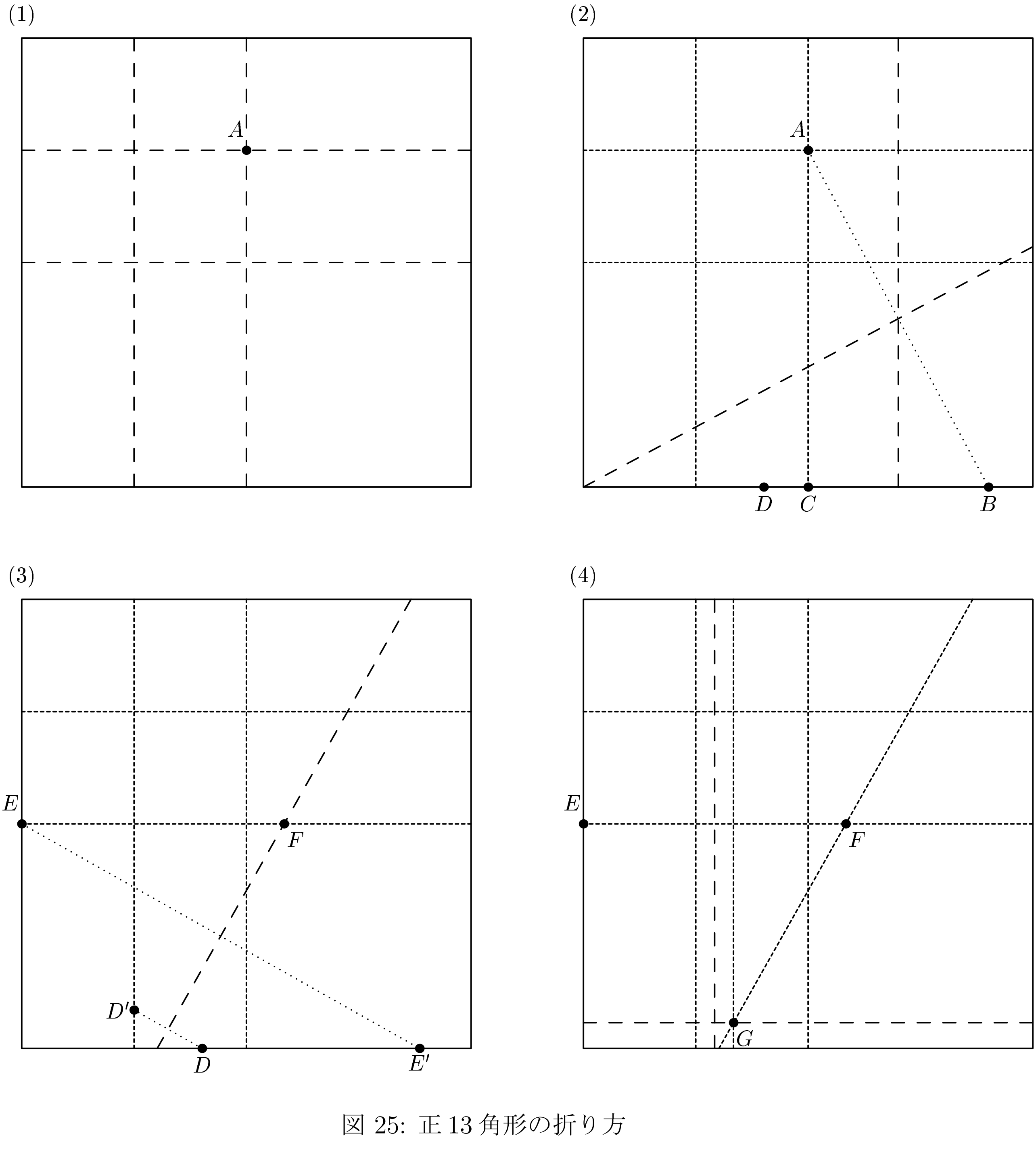

図 25: 正 13 角形の折り方

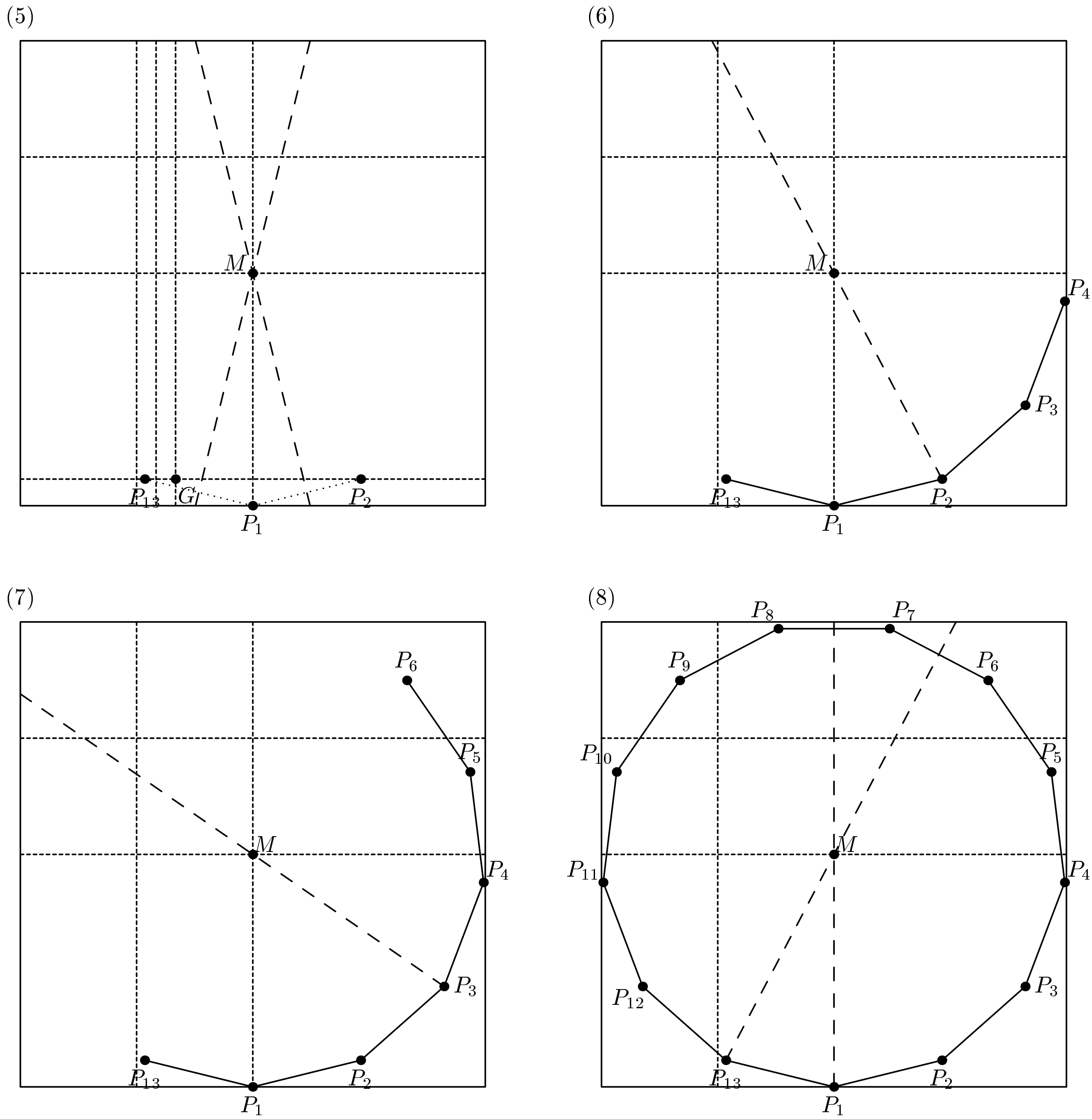

図 26: 正 13 角形の折り方の続き

参考文献

[1] ロベルト・ゲレトシュレーガー，折紙の数学 – ユークリッドの作図法を超えて – ，森北出版，2008.

[2] 阿部恒，すごいぞ折り紙 – 折り紙の発想で幾何を楽しむ – ，日本評論社，2003.